

## 직교이방성 평면탄성체의 응력확대계수 결정에 관한 연구

### A Study on the Determination of Stress Intensity Factors in Orthotropic Plane Elastic Bodies

진치섭\* · 이홍주\*\*

Jin, Chi Sub · Lee, Hong Ju

#### Abstract

Recent work in the mechanics of fracture points out the desirability of a knowledge of the elastic energy release rate, the crack extension force, and the character of the stress field surrounding a crack tip in analyzing the strength of cracked bodies. The objective of this work is to provide a discussion of the energy rates, stress fields and the like of various cases for anisotropic elastic bodies which might be of interest. Reinforced concrete, wood, laminates, and some special types of elastic bodies with controlled grain orientation are often orthotropic. In this paper, determination of the stress intensity factors(SIFs) of orthotropic plane elastic body using crack tip singular element and fine mesh in near the crack tip is performed. A numerical method in this paper was used by displacement correlation method. A numerical example problem of an orthotropic cantilevered single edge cracked elastic body subjected to shear loading was analyzed, and the results of this paper are in good agreement with those of the others.

#### 요지

파괴역학에서 최근의 연구들은 균열체의 강도를 해석함에 있어서 균열선단 주위의 탄성 애너지 해방율, 균열확장력 그리고 응력장의 특성 등에 대한 지식을 요구하고 있다. 이런 연구들의 주안점은 에너지율, 응력장 그리고 탄성이방성체의 여러가지 경우들을 설명하는 데 있다. 철근콘크리트, 목재, 박층구조 그리고 각각의 방향으로 성질을 가지는 탄성체들은 대부분 직교이방성이다. 본 연구에서는 균열선단에 특이요소를 사용하고 균열선단 부근에서 아주 세밀한 요소를 사용하여 직교이방성 탄성체의 응력확대계수를 결정하였다. 본 연구에서 응력확대계수를 구하기 위해 변위상관법을 사용하였으며 타 논문의 결과와 잘 일치함을 알 수 있었다.

#### 1. 서론

최근 산업사회의 발달과 더불어 구조물들이 점차로 대형화되고, 용접구조의 발달로 용접이음이 많이

사용되며, 고장력 재료의 개발로 인하여 부재의 파괴인성(fracture toughness)이 낮아지고, 또한 가혹한 사용조건 등으로 인하여 구조물이 균열로 인한 손상을 받기가 쉽다.

파괴역학 발달의 역사는 중대한 파괴사고의 발생과 밀접한 관계가 있다. 특히 취성파괴(brITTLE frac-

\* 정회원 · 부산대학교 공과대학 토목공학과 교수

\*\* 정회원 · 부산대학교 대학원 토목공학과 박사과정

ture)는 아무 예고없이 갑자기 일어나므로 많은 인적 물적 손해를 초래하게 한다. 이에 1983년도 미국 표준국 보고서는 미국에서 공학재료의 파괴로 인한 손실비용은 매년 1190억불로 국민 총 생산량의 4%를 차지한다고 밝히고 있다.<sup>(1)</sup>

원래 구조재료가 파괴를 일으키는 데는 파괴의 핵이라고도 볼 수 있는 균열의 존재가 전제조건이 된다. 즉, 다시 말하면 파괴는 제조과정 중에 부재 내에 존재하고 있던 미세한 균열, 또는 다시 원래 존재하고 있지 않았더라도 사용 중에 어떠한 위인에 의하여 발생한 미세균열이 외력 또는 환경에 의하여 점차로 또는 급속하게 성장하는 결과로서 일어나는 것이다. 따라서 파괴과정은 균열의 발생(crack nucleation)과 균열의 전파 또는 성장(crack propagation or growth)의 두 단계로 이루어진다. 이와같이 실제로 사용되고 있는 기계요소나 구조물의 부재내에는 균열이 존재하고 있는 경우가 많고 따라서 균열을 포함하는 부재의 강도특성을 취급하는 학문 분야의 필요성이 인식되게 되었다. 그러나 균질인 재료가 역학적으로 이방성을 가질 때 이의 파괴를 합리적으로 추적할 수 있는 방법은 현재까지의 문헌에서는 찾아보기가 힘들고 단편적이고 극히 제한된 방법<sup>(2,3)</sup>이 있으나 너무 난해하고 그 정식화 과정이 복잡하여 범용성이 결여되어 있다. 그런데 최근 건설분야의 신소재로 각광을 받고 있는 섬유보강 콘크리트를 비롯하여 목재나 탄성성질이 다른 강판, 암반 기타 첨단 복합재료들은 사실상 역학적으로 이방성 재료들이다. 이들 이방성체의 파괴역학적 특성을 규명하는 것은 경제적으로나 기술적으로 대단히 중요한 문제이다.

본 연구에서는 이방성 탄성체의 이론과 균열선단에서의 1/4점 특이요소를 이용한 유한요소법을 결합하여 재료가 직교이방성을 지니는 평면탄성체의 응력확대계수를 사방향 각도에 따라 결정하는 방법을 제시하였다.

본 연구의 해석과정의 편의를 위하여 이방성 재료를 균질성이라고 가정하여 실제 이방성 재료들을 이상적인 연속체로 모델링 함으로서 실 재료의 구성성분이 전체적으로 잘 조합되어 있는 이상적인 이방성재료로 취급하였다.

## 2. 탄성이방성체의 좌표변환 매트릭스

이방성 탄성이론은 탄성성질이 방향성을 가지는 복합체의 역학적 성질을 기술하는 데 널리 사용되어 왔다. 이들 재료는 해석과정을 단순화하기 위하여 균질성이라 가정한다. 파괴역학적 관점에서 보는 구성성분의 파괴해석은 초기결합의 시작과 전파에 기본을 둔다. 이 분야는 재료가 등방성이며 균질성이 보장되고, 균열의 크기가 미세구조의 치수에 비하여 충분히 클 때 이들의 파괴거동을 합리적으로 결정할 수 있었다. 섬유보강 복합체와 같은 실제의 이방성 재료에 대한 파괴역학의 응용은 그 재료의 미세구조의 내적결합의 크기와 치수가 상대적으로 작은 균질의 연속체로 취급함으로써 성립된다. 가장 일반적인 등방성의 탄성체에 관한 Hooke 법칙은 다음의 형태로 표시할 수 있다.

$$\sigma_m = C_{mn} \varepsilon_n \quad (1)$$

이 되며 역으로

$$\varepsilon_m = a_{mn} \sigma_n \quad (2)$$

이 성립된다. 여기서  $a_{mn}$ 은 compliance matrix로서 탄성 matrix  $C_{mn}$ 의 역이 된다. 평면화장에 대한 문제들을 고려해 볼 때 탄성체는 평면응력상태와 평면변형률상태에서 박충구조의 표면에 평행한 대칭면을 각 점에서 가지게 되고 전단응력과 수직응력에 관한 항 사이의 서로 연관되는 coupling terms가 없다는 것을 확인하면 이방성체의 독립탄성 상수의 갯수는 5개로 된다. 즉 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

이 되며 역으로

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

이 된다.

여기서  $C_{ij}$ 는 다음으로 주어진다.

$M = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ 라고 하면

$$\begin{aligned} C_{11} &= a_{22}/M, \quad C_{12} = -a_{12}/M, \\ C_{22} &= a_{11}/M, \quad C_{66} = 1/M, \quad C_{21} = C_{12} \end{aligned} \quad (5)$$

이다.

이것을 공학상수로 표현하면 이방탄성체의 평면 응력상태에서

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1, \quad a_{22} = 1/E_2, \quad a_{33} = 1/G_{12}, \\ a_{12} &= -v_{12}/E_2, \quad a_{21} = -v_{12}/E_1 \end{aligned} \quad (6)$$

이 성립한다. 여기서  $E_1, E_2$ 는 탄성성질이 방향성을 가지는 재료에서 각각의 탄성계수가 되며  $a_{12}$ 와  $a_{21}$ 은  $v_{12}E_1 = v_{12}E_2$ 의 관계에 의해 같은 값이 되므로 사실상 필요한 독립탄성상수의 갯수는 4개가 된다.

평면변형률상태에서는 위의  $a_{ij}$  대신에 다음  $b_{ij}$ 를 사용한다.

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{13} a_{33}}{a_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (7)$$

그림 1은 구조좌표계 x, y축이 이방성 재료가 가지는 재료축 1, 2축과 동일하지 않음을 보여주고 있다. 그러므로 축 1, 2에 따르는 탄성재료성질을 축 x-y계로 변환시켜 주어야 한다. 즉, 응력과 변형률은 식 8과 같은 좌표변환식에 따라 변환시켜야 한다. 응력 변형률은 모두 2계 텐서(second order tensor)이고 그것은 다음과 같은 2계 텐서  $T_{ij}$ 이다.

$$T_{ij} = l_{ik} l_{jl} T_{kl} \quad (8)$$

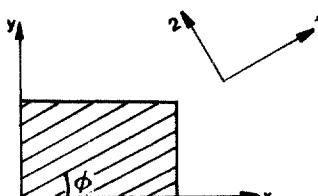


그림 1. 좌표변환계

표 1. 방향여현

Direction	x	y
1	$\cos\phi$	$\sin\phi$
2	$-\sin\phi$	$\cos\phi$

여기서  $l_{ik}, l_{jl}$ 은 x, y축과 1, 2축에 대한 방향여현을 나타내고 있으며 그것은 표 1과 같다.  $\phi$ 는 구조물의 축과 재료성질이 가지는 축 사이의 각이다. 표 1을 이용하여 응력과 변형률에 대한 좌표변환이 다음의 식에서 이루어진다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = [T]_\sigma \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = [T]_\epsilon \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서  $[T]_\sigma, [T]_\epsilon$ 은 좌표변환의 방향여현으로 나타내어지는 응력과 변형률에 대한 좌표변환 매트릭스로서 식 (8)에 따라 다음으로 표현된다.

$$[T]_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & 2\cos\phi\sin\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & -2\cos\phi\sin\phi \\ -\cos\phi\sin\phi & \cos\phi\sin\phi & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[T]_\epsilon = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & -\cos\phi\sin\phi \\ -2\cos\phi\sin\phi & 2\cos\phi\sin\phi & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \quad (11)$$

이 때 탄성 매트릭스  $C_{ij}$ 는 그림 2에서 보는 바와 같이 균열선단에서 r, theta 떨어진 위치에서 유한요소 해석을 하기 위한 기하학적 이방성축(X'-Y')(그림 1의 1-2 축에 대한 적용)과 일반적인 동방성 횡축(X-Y)이 일치하지 않으므로 위의 좌표변환 매트릭스를 이용하여 변환해 주어야 한다.

식 (9)의 첫식에서

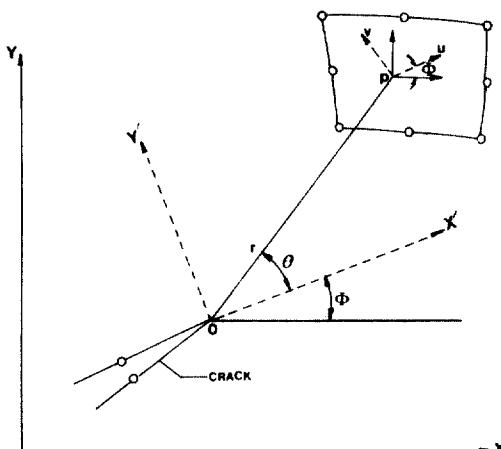


그림 2. 좌표계와 변위성분

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]_{\sigma}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

이 되며 식 (4)를 이용하면

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]_{\sigma}^{-1} [\mathbf{C}] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (13)$$

이 된다. 식 (9)의 두번째 식을 식 (13)에 대입하면

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]_{\sigma}^{-1} [\mathbf{C}] [\mathbf{T}]_{\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}]' \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (14)$$

이 된다. 여기서

$$[\mathbf{C}]' = [\mathbf{T}]_{\sigma}^{-1} [\mathbf{C}] [\mathbf{T}]_{\varepsilon} \quad (15)$$

이다. 식 (15)는 이방성의 변환된 탄성 매트릭스(reduced stiffness matrix)가 된다. 그래서  $[\mathbf{C}]'$ 은 다음 식 (16)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} C_{11}' &= C_{11} \cos^4 \varphi + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad + C_{22} \sin^4 \varphi \\ C_{12}' &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad + C_{12}(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) \\ C_{22}' &= C_{11} \sin^4 \varphi + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad + C_{22} \cos^4 \varphi \\ C_{16}' &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos^3 \varphi \sin \varphi \\ &\quad + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos \varphi \sin^3 \varphi \quad (16) \\ C_{26}' &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos \varphi \sin^3 \varphi \\ &\quad + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos^3 \varphi \sin \varphi \\ C_{66}' &= (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66}) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad + C_{66}(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) \\ C_{21}' &= C_{12}' \\ C_{61}' &= C_{13}' \\ C_{62}' &= C_{26}' \end{aligned}$$

### 3. 이방성 탄성체의 파괴이론

균열선단의 근방에서 응력장과 변위장은 균열체의 파괴강도를 해석하는 데 있어 상당히 중요한 것들이다. 이방성 탄성체에서 균열선단 근처의 응력장은 국부적인 혼합모드 하에서 구해진다.

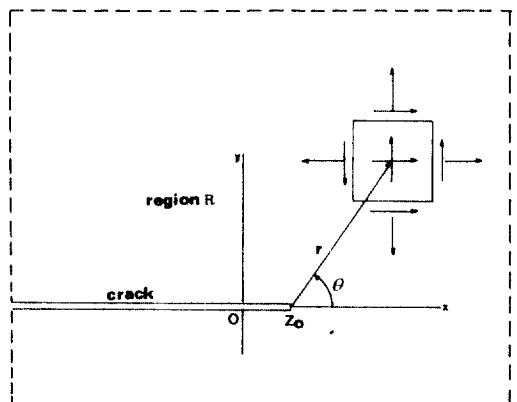


그림 3. 균열선단에서의 파괴영역

그림 3에서 x축에 직선으로 균열을 가진 복소변수  $Z=x+iy$ 의 평면을 영역 R이라고 가정한다. 여기서 Muskhelishvili<sup>(4)</sup>에 의해 주어진 holomorphic function  $\Phi_j'(z_j)$ 를 도입한다.

이 함수는 그림 3의 영역 R에서 바로 구해지는 것이 아니라 적절한 근사변형  $X_j=x+\alpha_{ijy}$ ,  $Y_j=\beta_{ijy}$ 에 의해서 R로부터 얻어진 3개의 영역  $R_j$  ( $j=1, 2, 3$ )에서 결정된다.

즉,  $z_o$ 에서 균열선단이 가까워질 때  $\Phi_j'(z_j)$ 는 다음 식으로 표현된다.

$$\Phi_j'(z_j) = \frac{\Psi_j^{(1)}(z_j)}{\sqrt{z_j - z_o}} + \Psi_j^{(2)}(z_j) \quad (j=1, 2, 3) \quad (17)$$

$$\text{여기서 } \Psi_j^{(0)}(z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{jn}^{(0)} (z_j - z_o)^n, \quad (18)$$

$$(l=1, 2 \quad j=1, 2, 3)$$

여기서  $\Psi_j^{(0)}(z_j)$  역시 균열선단  $z_o$ 에서 holomorphic function이 된다.

여기서 극좌표  $r, \theta$ 를 도입하면

$$z_j - z_o = re^{i\theta} \quad (19)$$

이 성립한다. 여기서  $r$ 은 균열선단으로부터 떨어진 반경이며  $\theta$ 는 반경 vector와 균열 평면의 확장한 곳 사이의 각이 된다. 식 (19)를 식 (17)에 대입하면 균열선단 근처의 응력함수들은 다음과 같이 근사화 된다.<sup>(4)</sup>

$$\lambda_{j0}^{(1)}(z_i) = \frac{\lambda_{10}^{(1)}}{\sqrt{r(\cos\theta + s_i \sin\theta)}} + 0(r^{0.5}) \quad (20)$$

$r$ 의 고차항은  $r$ 이 다른 평면상의 차원보다 작기 때문에 위의 식에서 무시할 수 있다. 여기서 상수  $\lambda_{j0}^{(1)}$ 는 실제로 응력확대계수의 형태이며 이것들은 등방성의 경우에 대한 것으로서 일정한 형식을 가지는  $K_j$ 로 정의되며 각각의 모드에 대해 식 (21)로 표시된다.

모드 I에서

$$\lambda_{10}^{(1)} = -\frac{s_2}{2\sqrt{2}(s_1 - s_2)} \left[ K_I + \frac{K_{II}}{s_2} \right]$$

모드 II에서

$$\lambda_{20}^{(1)} = \frac{s_1}{2\sqrt{2}(s_1 - s_2)} \left[ K_I + \frac{K_{II}}{s_1} \right] \quad (21)$$

모드 III에서

$$\lambda_{30}^{(1)} = -\frac{K_{III}}{2\sqrt{2}}$$

이 된다. 여기서  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ 는 응력확대계수이다. 한편, 2차원 이방성 탄성체의 문제들은 간단히 복소변수로 된 해석함수 항  $\phi_j(Z_i)$ 로 표현할 수 있다.

$$Z_j = x_j + i y_j \quad (j=1, 2) \quad (22)$$

여기서

$$x_j = x + \alpha_j y \quad y_j = \beta_j y \quad (j=1, 2) \quad (23)$$

변수  $\alpha_j$ 와  $\beta_j$ 는  $s_j$ 의 실수부와 허수부로서

$$s_j = \alpha_j + i\beta_j \quad (24)$$

( $j=1, 2$   $\beta_j > 0$ 인 경우에 근이 존재)

로 표현된다.

$s_j$ 는 다음의 재료특성 방정식<sup>(21)</sup>의 근으로서 구할 수가 있다.

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad (25)$$

여기서 복소함수를 사용하면 이때의 응력성분과 변위성분들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} [s_1^2 \phi_1'(z_1) + s_2^2 \phi_2'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} [\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [s_1 \phi_1'(z_1) + s_2 \phi_2'(z_2)] \end{aligned} \quad (26)$$

그리고

$$\begin{aligned} u &= 2 \operatorname{Re} [p_1 \phi_1(z_1) + p_2 \phi_2(z_2)] \\ v &= 2 \operatorname{Re} [q_1 \phi_1(z_1) + q_2 \phi_2(z_2)] \end{aligned} \quad (27)$$

이 된다. 여기서  $s_j$ 는 식 (25)에서 구한 특성방정식의 근이 되며  $p_j$ ,  $q_j$ 는 이방성 탄성체를 복소변수의 2계 편미분이 가능한 해석함수로 나타낼 때 나오게 되는 파라미터로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_j &= a_{11}s_j^2 + a_{12} - a_{16}s_j, \\ q_j &= \frac{a_{12}s_j^2 + a_{22} - a_{26}s_j^2}{s_j} \end{aligned} \quad (28)$$

이상에서, 균열선단 부근의 응력장과 변위장을 구해보면 먼저 식 (26)과 (27)에 식 (20)과 (21)을 대입하면 모드 I 상태에서

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} [s_1^2 \phi_1'(z_1) + s_2^2 \phi_2'(z_2)] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r(\cos\theta + s_1 \sin\theta)}} \left[ -\frac{s_1^2 s_2}{2\sqrt{2}(s_1 - s_2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left( K_I + \frac{K_{II}}{s_2} \right) - \frac{s_1 s_2^2}{2\sqrt{2}(s_1 - s_2)} \left( K_I + \frac{K_{II}}{s_1} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

이 된다. 이하 모두 동일한 방법으로 하면 다음의 응력식과 변위식이 나오게 된다.

응력식, 모드 I에서

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left[ \frac{s_2}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{s_1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ \frac{s_1}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{s_2}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left[ \frac{1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right] \end{aligned} \quad (30)$$

이 된다.

모드 II에서

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ \frac{s_2^2}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{s_1^2}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ \frac{1}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ \frac{s_1}{(\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{s_2}{(\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2}} \right] \right]\end{aligned}\quad (31)$$

이고 변위장, 모드 I에서

$$\begin{aligned}u_1 &= K_I \sqrt{\left(\frac{2r}{\pi}\right)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [s_1 p_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - s_2 p_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\} \\ v_1 &= K_I \sqrt{\left(\frac{2r}{\pi}\right)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [s_1 q_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - s_2 q_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\}\end{aligned}\quad (32)$$

이며 모드 II에서

$$\begin{aligned}u_2 &= K_{II} \sqrt{\left(\frac{2r}{\pi}\right)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [p_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - p_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\} \\ v_2 &= K_{II} \sqrt{\left(\frac{2r}{\pi}\right)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} [q_2 (\cos\theta + s_2 \sin\theta)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - q_1 (\cos\theta + s_1 \sin\theta)^{1/2}] \right\}\end{aligned}\quad (33)$$

이 된다. 균열선단부근의 응력상태를 잘 표현하기 위하여  $\theta = 180^\circ$ 를 식 (32)와 식 (33)에 대입하면 다음의 매트릭스 형태로 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \quad (34)$$

$$\begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{s_1 - s_2} (s_1 p_2 - s_2 p_1) \right] & \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{s_1 - s_2} (p_2 - p_1) \right] \\ \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{s_1 - s_2} (s_1 q_2 - s_2 q_1) \right] & \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{s_1 - s_2} (q_2 - q_1) \right] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix}$$

또는

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} [B] \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

이 된다. 여기서  $[B] = [2 \times 2]$ 이다.

#### 4. 이방성 탄성체의 응력확대계수(S.I.F)

여기서는 변위상관법에 의해 SIF를 결정하는 데 이 방법은 균열선단 부근의 임의점에서 수치해법에 의해 구해지는 변위와 해석해로부터 얻어지는 변위와의 관계에 의해서 응력확대계수를 정하는 것으로 이 방법의 정확성을 향상시키기 위하여 균열선단 부근은 응력의 특이성을 잘 표현할 수 있는 특이 유한요소(singular finite element)를 사용해야 하고 아울러 세밀한 요소분할이 요구된다.

1/4 절점 특이 등매개변수 요소는 다음의 형태와 같은 변위장을 가진다.

$$u = A + B \sqrt{\frac{x}{L}} + C \frac{x}{L} \quad (36)$$

한편 그림 4에서 1/4 절점 삼각형 특이요소의 절점 1~2~3을 따르는 한변을 균열의 한면으로 볼 수 있다.

균열선단에서 변위장은 다음식으로 표현할 수 있다.

$$u = (N_1 + N_7 + N_8)u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \quad (37)$$

그리고 응력확대계수 계산에 있어서 미소항을 무

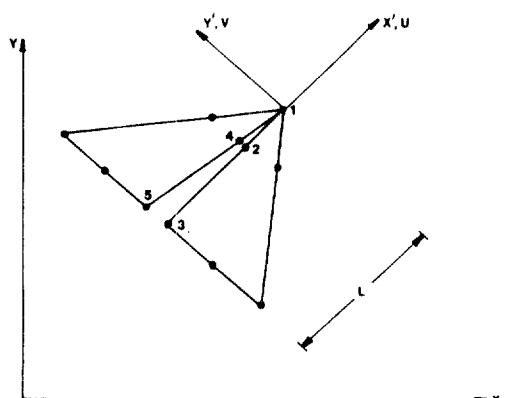


그림 4. 균열선단을 따르는 1/4 절점 특이요소

시한다면 다음의 변위장을 얻게 된다. 또

$$r = L/4(1 + \xi_2) \quad (38)$$

으로 표현 가능하다. 그러므로

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u_4 - u_5 \\ 4v_4 - v_5 \end{bmatrix} \sqrt{\frac{r}{L}} \quad (39)$$

그림 4에 적용하면

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(u_4 - u_2) - (u_5 - u_3) \\ 4(v_4 - v_2) - (v_5 - v_3) \end{bmatrix} \sqrt{\frac{r}{L}} \quad (40)$$

또는

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [A] \sqrt{\frac{r}{L}} \quad (41)$$

이다. 여기서  $[A] = [2 \times 1]$ 이다.  $L$ 은 특이요소의 길이이다.(그림 4 참조)

그림 4는 균열면을 특이요소로 표현하고자 하는데 의미가 있다.(삼각요소와는 무관)  $u_i$ 와  $v_j$ 는 그림 4에서처럼 균열선단요소에서 균열의 내면을 따르는 절점에서 전체  $x$ ,  $y$ 의 변위를 균열면에 대한 접선방향의 변위와 법선방향의 변위로 바꾸어 나타낸 값이다.

식 (35)는 요소내 임의점에서 해석해에 의해 구해지는 변위식이 되며 식 (41)은 수치해법에 의해 얻게 되는 변위가 되므로 응력확대계수를 구하기 위한 변위상관법에 의해 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} = [B]^{-1} [A] \sqrt{\frac{r}{L}} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \\ = [B]^{-1} [A] \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \quad (42)$$

이것이 2차원 이방성체에서 응력확대계수를 구하는 일반적인 식이다.

## 5. 계산예

수치예제의 모델로서 그림 5처럼 상부단에 전단단위 등분포하중을 받고 있는 이방성질의 cantilever로 된 single-edge cracked elastic body를 유한

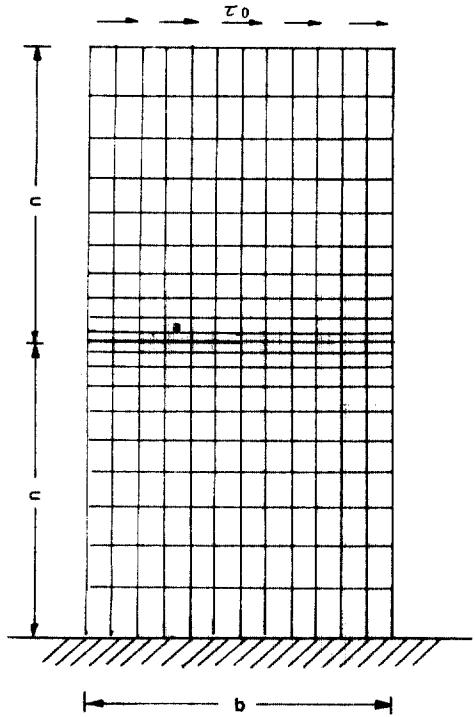


그림 5. Single edged cantilever plate의 유한요소모델

표 2. 흡합모드에서 Single edge crack을 가진 이방성판의  $K_I$ ,  $K_{II}$

$\theta$	$K$	$K_I$	$K_{II}$	$\theta$	$K$	$K_I$	$K_{II}$	비고
0°	26.89	3.96		50°	15.58	31.04		
10°	26.43	11.39		60°	12.54	28.98		
20°	25.01	19.36		70°	9.90	23.68		
30°	22.07	25.85		80°	7.57	17.03		
40°	18.95	30.16		90°	6.12	12.32		
$E_1$ 사용	25.76	4.36		$E_2$ 사용	26.18	4.41		동방성

요소로 해석하여 S.I.F를 구해 보았다. 탄성성질은 다음과 같고 유한요소 분할은 그림 5와 같다.

$$E_1 = 21 \times 10^6 \text{ psi}, \quad E_2 = 1.7 \times 10^6 \text{ psi},$$

$$v_{12} = 0.21, \quad G_{12} = 1.4 \times 10^6 \text{ psi}.$$

요소분할은 automatic mesh generation을 사용

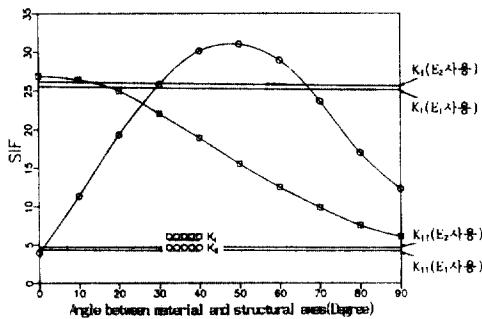


그림 6. 혼합모드에서 각도별 SIF의 변화

하여 상하대칭으로, 각각 120개씩 8절점 등매개 변수요소를 사용하여 총 240개로 하였으며 crack의 길이  $a$ 는 3.5", crack의 폭은 0.004", 판의 폭  $b$ 는 7" 그리고 높이  $2c$ 는 14"로 하였고 단위두께로 처리하여 평면응력 상태로 해석하였다. 그리고 균열선단 요소는 1/4절점 특이요소(a quarter point singular element)를 사용하였다. 이방향 탄성성질의 사방향에 대한 각도  $\phi(0^\circ - 90^\circ)$ 에 따른  $K_I$ 과  $K_{II}$ 를 구하였으며 등방성인 경우 때 와도 비교하여 보았다.

그림 5에 의한 유한요소해석 결과로  $K_I$   $K_{II}$ 가 아래 표 2와 그림 6에 있다. 앞서 서술한 바와 같이 이방성의 탄성매트릭스는 등방성 횡축과 유한요소 해석의 기하학적 축이 불일치하므로 변환 2계 텐서를 이용하여 좌표변환을 취해야 하며 또한 균열부분의 절점당 변위를 균열의 각도(수평축에 대한)를 이용하여 변화시켜 주어야 한다.

아래 식 (43)<sup>(15)</sup>에서 보는 바와 같이 응력확대계수값은 응력의 크기를 나타내므로  $K(SIF)$  값의 증가와 감소는 응력의 상태를 잘 표현한다.

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad \tau_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (43)$$

여기서  $r$ 과  $\theta$ 는 극좌표에 대한 값들이다.

## 6. 결 론

탄성성질이 방향성을 가지는 이방성 구조물에서 이방성체의 파괴거동을 해석하기 위한 균열선단 부근의 응력상태를 평가하여 보았다. 이에 선형탄성 파괴역학 이론으로부터 탄성 이방성체의 파괴역학에

적용과정 등을 살펴 보았고 이방성탄성체에서 응력확대계수결정에 관한 유한요소 프로그램을 개발하였다. 응력확대계수결정 기법으로 본 연구에 사용된 변위상관법의 정확도를 향상시키기 위하여 요소 자동분할 기법을 이용하여 요소망을 형성한 후 균열선단 부근에는 세밀한 요소로 수정을 가 하였으며 균열선단요소는 특이 유한요소를 사용하였다.

본 연구에서 작성된 프로그램을 수치예로써 사용된 이방성탄성체의 균열선단에서 응력확대계수 결정에 적용시켜 봄으로서 얻어진 결과는 다음과 같다.

- 각각  $E_1$   $E_2$ 를 가지는 등방성문제에서 탄성계수  $E_1$ 을  $E_2$ 의 약 13배 정도로 가정했을 때  $E_1$ 을 사용하였을 경우보다  $E_2$ 를 사용하였을 경우의 응력확대계수  $K_I$ 는 1.63%,  $K_{II}$ 는 1.14% 더 크게 나타났다.
- 이방성의 경우  $K_I$ 은  $x$ 축을 기점으로 각도  $\phi$ 가  $y$ 축으로 증가해 갈에 따라 점점 감소함을 알 수가 있었다.
- 이방성의 경우  $K_{II}$ 는 각도  $\phi$ 가 증가할 수록 약 50° 부근까지는 증가하다가 그 이후로는 급격히 감소하는 것을 알 수 있었다.
- 0°에서 10° 부근에서  $K_I$ ,  $K_{II}$ 는 등방성의 경우와 거의 일치하고 있음을 알 수 있었다.
- 아래 표와 같이 본 연구와 비슷한 요소망과 탄성성질을 사용하여 이방성각도 0°일 때만을 검토하였던 Saouma et al<sup>(3)</sup>과 Kim<sup>(5)</sup>의 보고에서도 본 연구와 잘 접근함을 볼 수 있었다.

	$K_I$	$K_{II}$
Saouma et al	27.6	3.43
Kim	25.3	4.08
본 연구	26.89	3.96

- 본 연구는 균열을 가진 이방성체의 균열거동을 파악하기 위한 기초적 연구로서 현 단계에서 해석결과에 대한 결과는 타 연구자와 비교하여 이방성 각도변화를 취급할 수 있는 잇점이 있고 앞으로 균열방향의 변화를 연구할 예정이다.

辭 謝

이 논문은 1991년도 교육부지원 한국학술진흥재단의 지방대학 육성과제 학술연구조성비에 의하여 연구한 내용의 일부로서 그 재정적 지원에 감사드린다.

## 참 고 문 헌

1. National Bureau of Standard, "The Economic Effects of Fracture in the United States", sp 647-1, 1983.
2. Heppler, G. and Hansen, J.S., "Mixed Mode Fracture Analysis of Rectilinear Anisotropic Plates by High Order Finite Elements", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 17, 1981, pp. 445-464.
3. Saouma, V.E. and Sikiotis, E.S., "Stress Intensity Factors in Anisotropic Bodies using Singular Isoparametric Elements", *Engineering Fracture Mechanics*, 25(1), 1986, pp. 115-121.
4. Muskhelishvili, N.I., "Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity", Noordhoff, Groningen, Holland, 1963.
5. Kim, J.W., "A Contour Integral Computation of Stress Intensity Factors in the Cracked Orthotropic Elastic Plates", *Engineering Fracture Mechanics*, 21(2), 1985, pp. 353-364.
6. Lekhnitskii, S.G., "The Theory of Elasticity of an Anisotropic Body", Holden Day Inc., San Francisco, 1963.
7. Sih, G.C., Paris, P.C. and Irwin, G.R., "On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies", *Int. J. Fracture Mech.*, 1(3), 1965, pp. 189-203.
8. Benzley, S.E., "Representation of Singularities with Isoparametric Finite Element", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 8, 1974, pp. 537-545.
9. Atluri, S.N., Kobayashi, A.S. and Nakagaki, M., "An assumed displacement Hybrid Finite Element Model for Linear Fracture Mechanics", *Int. J. of Fracture Mech.*, 11(2), 1975, pp. 257-270.
10. Chawla, K.K., "Composite Materials Science and Engineering" Materials Research and Engineering, Springer-Verlag, New York Inc., 1987, pp. 204-213.
11. Barsoum, R.S.: "On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 10, 1976, pp. 25-37.
12. Barsoum, R.S., "Triangular Quarter-point Elements as Elastic and Perfectly Plastic Crack Tip Elements", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 11, 1977, pp. 85-98.
13. G.C. Sih, *Fracture Mechanics of Composite Materials*, 1980, pp. 111-130.
14. Owen, D.R.J. and Fawkes, A.J.F., *Engineering Fracture Mechanics Numerical Methods and Application*, Pineridge Press Ltd., Swansaea, U.K., 1983, pp. 1-305.
15. Saouma, V.E. and Schwemmer, D., "Numerical Evaluation of Quarter-Point Crack Tip Element", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 20, 1984, pp. 1629-1641.
16. Foschi, R.O. and Barrett, J.D., "Stress Intensity Factors in Anisotropic Plates using Singular Isoparametric Elements", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 10, 1976, pp. 1281-1287.
17. 陳致燮, 張熙碩, "균열선단 응력확대계수 결정을 위한 후처리 기법", *대한토목학회 논문집*, 11(1), 1991.
18. Ingraffea, A.R. and Manu, C., "Stress Intensity Factor Computation in Three Dimensions with Quarter Point Elements." *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 15, 1980, pp. 1427-1445.
19. Inglis, C.E., "Stress in a Plate due to the Presence of Cracks and Sharp Corners" *Trans. Int. Naval Architects*, 1913, Vol. 55, pp. 219-241.
20. Sih, G.C. and Liebowitz, H., "Mathematical theories of brittle fracture" Fracture, Vol. II, Academic Press 1986, pp. 108-112.
21. Irwin, G.R. "Fracture", "Handbuch der Physik", Vol. 6, Springer, Berlin, 1958.
22. Irwin, G.R. "Analysis of Stress and Strains near the end of a Crack Traversing a Plate" *Trans. A.S.M.E., J. Appl. Mech.*, 1957.

(接受 : 1993. 1. 15)