

# 시간의존 비탄성 문제의 유한요소-경계요소 조합에 의한 해석

## A Coupled Analysis of Finite Elements and Boundary Elements for Time Dependent Inelastic Problems

김문겸\* · 허택녕\*\* · 장정범\*\*\* · 오세호\*\*\*\*

Kim, Moon Kyum · Huh, Taik Nyung · Jang, Jung Bum · Oh, Se Ho

### Abstract

The long-term behavior, such as in excavation problems of weak medium, can be dealt with by the elasto-viscoplasticity models. In this paper, a combined formulation of elasto-viscoplasticity using boundary elements and finite elements without using internal cells is presented. The domain integral introduced due to the viscoplastic stresses is transformed into a boundary integral applying direct integration in cylindrical coordinates. The results of the developed boundary element analysis are compared with those from the explicit solution and from the finite element analysis. It is observed that the boundary element analysis without internal cells results in some error because of its deficiency in handling the nonlinearity in local stress concentration. Therefore, a coupled analysis of boundary elements and finite elements, in which finite elements are used in the area of stress concentration, is developed. The coupled method is applied to a time dependent inelastic problem with semi-infinite boundaries. It results in reasonable solution compared with other methods where relatively higher degree of freedoms are employed. Thus, it is concluded that the combined analysis may be used for such problems in the effective manner.

### 요 지

지하구조물은 일반적으로 영역의 무한성, 다양한 하중, 복합적인 구성재료 등으로 인하여 그 거동의 해석이 난이하다. 특히, 장기거동이 중요시되는 연약지반의 굴착문제 등에 있어서는 시간에 의존하는 점탄소성거동을 해석에 고려하여야만 한다. 본 연구에서는 점탄소성거동을 해석하는 방법으로서, 내부요소를 사용하지 않은 경계요소 해석방법을 유도하고, 경계요소와 유한요소를 조합하여 해석하는 방법을 도출하였다. 점탄소성을 고려한 지배적분방정식에서 점소성응력에 대한 영역적분은 극좌표를 이용한 직접적분방법을 적용하여 경계적분화하였고, 이에 따른 계방정식을 이용하여 프로그램화하였다. 또한 경계요소 프로그램을 점소성 유한요소 프로그램과 조합하여 굴착면 주위에 발생하는 시간의존 비탄성거동을 합리적으로 해석하도록 하였다. 경계요소해석 및 조합해석 결과는 정해 및 유한요소해석의 결과와 비교하여 검토하였다. 비교결과 내부요소를 사용하지 않은 경계요소법으로는 국부적인 응력집중으로 인한 비선형성이 충분히 고려되지 못함을 알 수 있었다. 반면에 유한요소-경계요소 조합방법

\* 정회원 · 연세대학교 공과대학 토목공학과 부교수

\*\* 정회원 · 연세대학교 산업기술연구소 선임연구원

\*\*\* 정회원 · 연세대학교 대학원 토목공학과 박사과정

\*\*\*\* 정회원 · (주) 삼환까무 토목부

으로는 상대적으로 많은 자유도를 가진 타 방법에 비교하여 합리적인 결과를 얻을 수 있었다. 따라서 시간에 의존되는 비탄성체의 해석에 있어서 조합방법을 사용하면 하중조건과 경계조건에 따르는 구조물의 거동을 합리적으로 예측할 수 있으며, 유한요소와 경계요소의 장점을 살려 보다 효율적인 해석의 수행이 가능할 것으로 판단된다.

## 1. 서 론

지하구조물은 다양한 하중과 복합적인 구성재료로 인하여 그 거동의 해석이 난이하다. 특히 연약지반의 굴착이나 장기거동이 중요시되는 팽창성 지반내의 구조물설계에 있어서는 탄소성 해석만으로는 많은 오차가 포함된 결과를 얻을 수 있다. 이러한 구조계에서는 국부적인 응력집중으로 인하여 연속적으로 시간에 의존하는 비탄성 거동이 발생하게 된다. 본 연구에서는 시간의존 비탄성거동의 예측에 점탄소성 모형을 도입하고 이에 대한 지배방정식의 해를 구하기 위하여 적절한 수치해석 기법을 이용하고자 한다.

일반적으로 지하구조물과 같이 무한 또는 반무한 영역을 갖는 구조계를 유한요소해석하기 위해서는 인위적인 경계를 설정하여야 하고, 인위적 경계설정 영향 줄이기 위해서는 요소의 수가 많아져야만 하므로, 자료의 입력과 반복계산시간이 길어지는 단점이 있다. 또한 경계요소로 비선형해석을 수행할 시에도 기존의 방법으로는 내부요소(internal cell)<sup>(1)</sup>를 이용하여 영역을 미리 분할하여야 하므로 그 방법의 장점을 반감시키고 있다. 본 연구에서는 내부요소를 사용하지 않고, 영역적분의 형태로 나타나는 점소성항을 극좌표를 이용하여 경계적분으로 변환하는 방법을 연구하여 점탄소성 경계요소의 적용한계를 고찰하고, 이를 점탄소성 유한요소와 조합하여 시간의존 비탄성 문제에 대한 효율적인 해석방법을 제시하고자 한다.

시간의존 비탄성거동의 해석을 위한 이론적인 연구는 1966년 Perzyna에 의하여 점소성문제에 대한 기본가정으로부터 이루어졌다<sup>(2)</sup>. 1974년도부터 Zienkiewicz와 Cormeau에 의하여 유한요소 접근방법이 시도되었으며<sup>(3)</sup>, 1982년에는 Brebbia와 Telles가 내부요소를 사용한 비탄성 경계요소의 계방정식을 유도하였다<sup>(4)</sup>. 비선형 문제의 유한요소-경계요소 조합

방법은 1981년에 Beer와 Meek가 무한 및 반무한 영역에서의 탄소성 조합방법을 에너지이론으로부터 유도하였으며<sup>(5)</sup>, 국내에서도 최근에 황학주 등이 무한 및 반무한 영역을 갖는 지하구조체의 유한요소-경계요소 조합방법을 연구하였다<sup>(6)</sup>. 본 연구에서는 Perzyna의 점소성 지배방정식으로부터 비탄성 경계요소의 계방정식을 도출하고, 에너지이론을 이용한 유한요소-경계요소 조합방법을 사용하여 시간의존 비탄성문제를 연구하였다.

## 2. 시간의존 비탄성체의 경계요소법

### 2.1 점소성문제의 기본이론

점소성이나 크리프와 같은 비탄성 문제에 있어서의 총변형률비는 식 (1)과 같이 탄성변형률비와 비탄성변형률비의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}) = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (1)$$

여기서  $(\cdot)$ 는 시간에 대한 미분을 의미하며 비탄성변형률은 점소성 초기변형률만을 고려하였다. 비의 형태로 표현한 영역  $\Omega$  내에서의 평형방정식과 기하학적 경계  $\Gamma_1$  및 역학적 경계  $\Gamma_2$ 에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\dot{\sigma}_{ij} + \dot{b}_j = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2a)$$

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (2b)$$

$$\dot{t}_i = \dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{t}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (2c)$$

여기서  $\sigma_{ij}$ 는 응력텐서로서 외부하중에 의한 탄성응력과 점소성응력의 합으로 나타낼 수 있으며,  $b_j$ 는 물체력,  $u_i$ 는 변위벡터,  $t_i$ 는 경계에서의 표면력, 그리고  $n_j$ 는 경계에서 외부로 향하는 단위법선벡터의 방향여현이다. 또한  $\underline{u}$ 와  $\underline{t}$ 는 각각 기지인 경계변위 및 표면력이다. 식 (1)에 평형방정식과 경계조건을

이용하여 탄성부분의 총변형률텐서에 Hooke의 법칙을 적용하고 점소성변형률을 초기변형률로 고려하면, 이때의 응력은 다음과 같다.

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}^{vp}_{ij}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\dot{\epsilon}_{mm} - \dot{\epsilon})\delta_{ij} \quad (3)$$

여기서  $\epsilon^{vp}_{ij}$ 는 점소성 초기변형률이며,  $e$ 는  $\epsilon^{vp}_{kk}$ 을 의미한다.

Perzyna의 점소성모형<sup>(2)</sup>에 의하면 점소성변형률 비는 식 (4)와 같이 표현될 수 있다.

$$\dot{\epsilon}^{vp}_{ij} = \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{F}{\sigma_Y} \right) \right\rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

여기서  $\gamma$ 는 시간과 경화의 함수로 표현되는 재료의 유동계수이고,  $F$ 는 등방성 경화에 대한 정적 항복 함수이며,  $\sigma_Y$ 는 항복응력,  $\sigma_{ij}$ 는 탄성변형률에 의존되는 총응력이다. 또한, 함수  $\Phi$ 는 실험적 결과로부터 얻어지는 함수이며, 부호  $\langle \rangle$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\left\langle \Phi \left( \frac{F}{\sigma_Y} \right) \right\rangle = \begin{cases} 0 & F \leq 0 \\ \Phi \left( \frac{F}{\sigma_Y} \right) & F > 0 \end{cases} \quad (5)$$

제안된 점소성 구성방정식으로부터 그림 1과 같은 일차원 점탄소성 모형의 시간과 변형률간의 관계를 볼 수 있다. 식 (5)의 양변에  $\sigma_{ij}$ 를 곱하고, 점소성 항복면을 지정하는 항복함수  $f(\sigma_{ij})$ 를 주어진 조건에서 제차(homogeneous)라고 가정하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

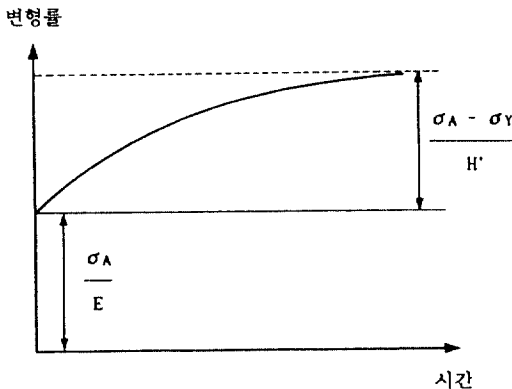


그림 1. 점탄소성체의 시간-변형률 관계

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}^{vp}_{ij} = \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{F}{\sigma_Y} \right) \right\rangle f(\sigma_{ij}) \quad (6)$$

여기서 등가 점소성변형률비의 정의를 적용하고, 항복함수  $F$ 가 0보다 크다고 가정하면, 다음과 같이 등가 점소성변형률비를 이용하여 항복함수를 구할 수 있다.

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_Y(\kappa) \left[ 1 + \Phi^{-1} \left( \frac{\epsilon^{vp}_{ij}}{\gamma} \right) \right] \quad (7)$$

여기서  $\kappa$ 는 경화계수,  $\epsilon^{vp}_{ij}$ 는 등가 점소성변형률이며, 식 (4)와 식 (7)을 이용하면 결과적으로 다음과 같은 점소성 응력비를 구할 수 있다.

$$\dot{\sigma}^{vp}_{ij} = \gamma \left\langle \Phi \left( \frac{F}{\sigma_Y} \right) \right\rangle \left[ D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right] \quad (8)$$

여기서  $D_{ijkl}$ 은 등방성 탄성계수 텐서이다.

## 2.2 경계적분방정식

영역  $\Omega$ 와 기하학적 경계  $\Gamma_1$ , 역학적 경계  $\Gamma_2$ 를 가지고 평형방정식을 만족하는 비탄성 구조계의 가 정된 해에 대하여 오차를 최소화하기 위해서 식 (9)와 같은 가중 잔차 방정식(weighted residual equation)을 구성한다.

$$\int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{jk} + \dot{b}_k) u^*_k d\Omega = \int_{\Gamma_2} (\dot{i}_k - \dot{t}_k) u^*_k d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (\dot{u}_k - \dot{t}_k) t^*_k d\Gamma \quad (9)$$

여기서  $u^*_k$ 와  $t^*_k$ 는 가중영역에서의 변위 및 표면력벡터이다. 식 (9)를 두번 부분적분하고 식 (1)의 변형률-변위 관계를 이용하면 다음과 같은 경계적분방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} b^*_k \dot{u}_k d\Omega = \int_{\Gamma} u^*_k \dot{t}_k d\Gamma - \int_{\Gamma} t^*_k \dot{u}_k d\Gamma + \int_{\Omega} u^*_k \dot{b}_k d\Omega + \int_{\Omega} \epsilon^*_{ijk} \dot{\sigma}^{vp}_{jk} d\Omega \quad (10)$$

무한 및 반무한문제에서  $u^*_{ij}$ ,  $t^*_{ij}$  및  $\epsilon^*_{ijk}$ 는 영역내 임의의 점  $\xi$ 에서  $i$  방향으로 작용하는 단위절점하중으로 인한 대상점  $x$ 의  $j$  방향 변위, 표면력 및  $jk$  방향 변형률이라고 하고 이를 가중영역에서의 기본해로 사용하기로 한다. 평면변형률 문제에서 Kelvin

해<sup>(1)</sup>를 사용하면 변위, 표면력, 변형률은 다음과 같다.

$$u_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} \{(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}\} \quad (11a)$$

$$t_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \{[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i} n_{,j} - r_{,j} n_{,i})\} \quad (11b)$$

$$\varepsilon_{ijk}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \{(1-2\nu)(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik}) - r_{,i} \delta_{jk} + 2 r_{,i} r_{,j} r_{,k}\} \quad (11c)$$

여기서  $G$ 는 전단탄성계수,  $\nu$ 는 포아손비이며,  $r$ 은 재하점  $\xi$ 와 변위, 표면력 및 변형률이 발생하는  $x$ 점 사이의 거리를 나타낸다. 반무한영역 문제의 기본해는 무한영역에 대한 Kelvin의 기본해에 반무한영역의 보충항을 추가하여 구성된다<sup>(7)</sup>.

가중항으로 Kelvin 해를 이용하는 경우, 경계상에 특이점이 발생하게 되는데 영역내부의 재하점을 경계상으로 접근시켜 상반작용의 원리를 적용하면 식 (10)을 다음과 같은 경계적분방정식으로 전환할 수 있다.

$$c_{ij} \dot{u}_j + \int_{\Gamma} t_{ij}^* \dot{u}_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \dot{t}_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* \dot{b}_j d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \dot{\sigma}_{vpk} d\Omega \quad (12)$$

여기서  $c_{ij}$ 는 경계면 상의 기하학적 형상에 의하여 결정되는 상수이며,  $\sigma_{vpk}$ 는 기지의 응력으로부터 반복적으로 구할 수 있다.

### 2.3 점소성 영역적분항의 해석기법

식 (12)의 경계적분방정식에서 물체력항을 무시하면 변위와 표면력의 항은 경계적분의 형태로 변환되었지만 점소성응력에 대한 마지막 항은 영역적분의 형태로 남아 있다. 이러한 점소성응력항은 내부요소를 사용하여 적분하는 방법, 즉 특이점을 기준으로 하여 다수의 부요소로 분할하여 계산을 수행함으로써 해결될 수는 있으나, 이는 경계요소해석에서 영역내부의 문제를 경계에서의 문제로 치환하는 장점을 반감시키고 그 효율성을 떨어뜨리게

된다. 본 연구에서는 경계적분방정식에서 영역적분의 형태로 남아 있는 점소성응력항을 극좌표를 이용한 직접적분 방법으로 경계적분화하도록 한다<sup>(8,9)</sup>. 극좌표를 이용한 점소성응력항의 영역적분은 다음과 같이 표시된다.

$$Q_p = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \dot{\sigma}_{vpk} d\Omega = \int_{\theta} \int_r \varepsilon_{ijk}^* r dr \dot{\sigma}_{vpk} d\theta \quad (13)$$

식 (13)에서 임의의 시간에 있어서 재하점과 대상점간의  $r$ 에 대하여 점소성응력이 하나의 적분구간 안에서는 일정하다고 가정하고,  $\theta$ 에 대한 적분을 경계에 대한 적분으로 변환하면  $d\theta$ 는 다음과 같다.

$$d\theta = n_m R_m / R d\Gamma \quad (14)$$

식 (14)를 식 (13)에 대입하면  $Q_p$ 는 다음과 같이 경계적분화된다.

$$Q_p = \int_{\Gamma} Q_{ijk}^* \dot{\sigma}_{vpk} d\Gamma \quad (15)$$

여기서  $Q_{ijk}^*$ 는 다음과 같다.

$$Q_{ijk}^* = \left[ \int_r \varepsilon_{ijk}^* r dr \right] \frac{n_m R_m}{R} \quad (16)$$

### 2.4 경계요소 계방정식

경계적분방정식은 한 점의 변위에 대하여 전체 경계  $\Gamma$ 와 전체 영역  $\Omega$ 에 대한 적분항으로 표시된다. 이 경계적분방정식을 풀기 위해서는 경계를 요소화하고, 이 요소에 대한 근사해를 구하기 위하여 계방정식을 구성한다. 물체력의 영향을 무시할 때, 경계적분방정식을 행렬형태로 나타내기 위해서 변위, 표면력, 응력을 형상함수로 나타낼 수 있다.

$$u = [\phi]^T \{u^n\} \quad (17a)$$

$$t = [\phi]^T \{t^n\} \quad (17a)$$

$$\{\sigma^{vp}\} = [\phi]^T \{\sigma^{vpn}\} \quad (17c)$$

여기서  $[\phi]^T$ 는 형상함수이며  $\{u^n\}$ ,  $\{t^n\}$ ,  $\{\sigma^{vpn}\}$ 은 각각 절점에서의 변위, 표면력, 점소성응력이다. 식 (17)을 경계적분방정식 (12)에 대입하면 다음과 같다.

$$[c] \{\dot{u}\} = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \{u^*\} [\phi]^T d\Gamma \right) \{t^j\}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \{t^*\} [\phi]^T d\Gamma \right) \{\dot{u}^n\} \\
 & + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \{Q^*\} [\phi]^T d\Gamma \right) \{\dot{\sigma}^{vp,n}\} \quad (18)
 \end{aligned}$$

여기서 N은 경계상의 절점수이며, 식 (18)을 수치 적분의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 [c] \{\dot{u}\} = & \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{q=1}^L |J|_q w_q (\{t^*\} [\phi]_q^T) \right] \{\dot{t}^n\} \\
 & + \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{q=1}^L |J|_q w_q (\{t^*\} [\phi]_q^T) \right] \{\dot{u}^n\} \\
 & + \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{q=1}^L |J|_q w_q (\{Q^*\} [\phi]_q^T) \right] \{\dot{\sigma}^{vp,n}\} \quad (19)
 \end{aligned}$$

여기서  $|J|$ 는 Jacobian 행렬식,  $w$ 는 Gauss 적분의 가중치, L은 경계요소의 수이다. 따라서 식 (12)의 경계적분방정식은 다음과 같이 계방정식으로 표시된다.

$$[H] \{\dot{u}\} = [G] \{\dot{t}\} + [Q] \{\dot{\sigma}^{vp}\} \quad (20)$$

여기서  $[Q]$ 는 식 (16)으로부터 구할 수 있는 점소성변형률의 적분항이며, 행렬  $[H]$ 와  $[G]$ 는 탄성영역에서 얻어지는 것과 동일하다. 적절히 구성된 문제 (well-posed problem)에 있어서 식 (20)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[A] \{\dot{x}\} = \{\dot{f}\} + [Q] \{\dot{\sigma}^{vp}\} \quad (21)$$

여기서  $\{x\}$ 는 미지의 표면력과 변위를 의미하며,  $\{\dot{f}\}$ 는 지정된 변위와 표면력 값들의 영향을 고려한 기지의 벡터이다. 식 (20)의 양변에  $[A]^{-1}$ 을 곱하면

$$\{\dot{x}\} = [R] \{\dot{\sigma}^{vp}\} + \{\dot{m}\} \quad (22)$$

이 되고, 여기서  $[R]$ 과  $\{\dot{m}\}$ 은 다음과 같다.

$$[R] = [A]^{-1} [Q], \{\dot{m}\} = [A] \{\dot{f}\} \quad (23)$$

### 3. 유한요소를 이용한 점탄소성 해석과 조합 방법

#### 3.1 점탄소성 유한요소법

유한요소 이론으로부터 점소성변형률 증분  $\Delta \epsilon^{vp}$ 는 Euler의 시간증분체계를 사용하여 시간간격  $\Delta t$ 에 의하여 다음과 같이 형성된다.

$$[\Delta \epsilon^{vp}] = [\dot{\epsilon}^{vp}] \Delta t + [W] [\Delta \sigma] \quad (24)$$

여기서  $[W]$ 는 총응력과 시간에 의존되는 텐서이며<sup>(3)</sup>, 식 (4)의 구성방정식으로부터 시간에 따른 응력 증분  $[\Delta \sigma]$ 를 구할 수 있다.

$$[\Delta \sigma] = [D] [\Delta \epsilon^e] = [D] ([\Delta \epsilon] - [\Delta \epsilon^{vp}]) \quad (25)$$

여기서  $[D]$ 는 탄성계수행렬이고,  $\Delta \epsilon$ 은 총변형률의 증분이다. 임의의 시간 t에서 만족되는 증분형태의 평형방정식과 점선강성도행렬  $[K]$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\Omega} [B]^T [\Delta \sigma] d\Omega + \{\Delta F\} = 0 \quad (26)$$

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [\bar{D}] [B] d\Omega \quad (27)$$

여기서  $[\bar{D}]$ 는 점선탄성계수행렬이고,  $[B]$ 는 변형률행렬이며,  $\{\Delta F\}$ 는 외부에서 가해진 하중에 의한 등가절점하중의 증분 벡터이다.

응력증분의 계산은 증분형태의 평형방정식의 선형화된 형상으로 이루어진다. 그러므로 다음 단계의 총응력은 실제의 하중벡터와 평형을 이루지 않게 된다. 이러한 오류를 제거하기 위하여 잉여력(residual force)을 계산하고, 다음 시간증분에서 보정하여야 한다. 추가되어야 할 점소성항은 다음과 같다.

$$\{\Delta V\} = \int_{\Omega} [B]^T [\bar{D}] [\dot{\epsilon}^{vp}] \Delta t d\Omega \quad (28)$$

#### 3.2 시간 간격의 설정

시간적분계에서 시간간격은 고정이거나 또는 변화하며, 변화하는 시간계에서는 시간 증분계수  $\tau$ 를 이용하여 시간간격을 결정한다. 시간증분계수  $\tau$ 는 식 (29)에 나타난 바와 같이 총 유효변형률로 최대 유효 점소성변형률의 증분을 제한하는 계수이다.

$$\begin{aligned}
 \|\Delta \epsilon^{vp,e}\|^n = & \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)} \left[ \|\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}\|^n \|\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}\|^n \right]^{1/2} \\
 \Delta t_n \leq & \tau \|\epsilon_e\|^n \quad (29)
 \end{aligned}$$

등매개요소에서 모든 변형률은 가우스 적분점에서

계산되므로 식 (29)를 만족하는 시간 간격  $\Delta t_n$ 을 가우스 적분점에 대하여 결정할 수 있고, 시간간격  $\Delta t_n$ 은 식 (30)에 의하여 그 크기가 제한된다.

$$(\{\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}\}^n)^{1/2} \Delta t_n \leq \tau (\{\epsilon_{ii}\}^n)^{1/2} \quad (30)$$

여기서  $\{\epsilon_{ii}\}^n$ 은 총변형률의 불변량이고,  $\{\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}\}^n$ 는 점소성변형률의 불변량이다. 그러므로  $\Delta t_n$ 은 일반적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta t_n = \tau [ \{\epsilon_{ii}\}^n / \{\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}\}^n ]^{1/2} \min. \quad (31)$$

여기서, 최소값은 모든 가우스 적분점의 수치중에서 가장 작은 값을 의미한다. Explicit 시간계에서 시간중분계수  $\tau$ 는 일반적으로 0.01-0.15 사이의 값을 가지며, 전후 두개의 시간간격 사이의 시간간격 변화량을 결정하는 계수  $k$ 는 보통 1.5를 취하므로써 안정적인 해를 얻을 수 있다.

$$\Delta t_{n+1} \leq k \Delta t_n \quad (32)$$

시간간격길이에 대한 이론적인 제한으로는 점소성 흐름법칙의 고유형과 explicit 시간적분형으로 제안되었는데, 본 연구에서는 explicit 시간적분계를 채택하였다<sup>(10)</sup>.

### 3.3 유한요소-경계요소의 조합

유한요소와 경계요소의 조합은 경계요소의 계방정식을 유한요소형 계방정식으로 변환시키는 유한요소형 접근방법<sup>(6)</sup>을 사용한다. 점소성이론으로부터 구성된 시간에 따른 유한요소영역의 증분형태 계방정식은 식 (33)과 같이 하중-변위의 관계로 표시된다.

$$[K]_{FE} \{\Delta u\}_{FE} = \{\Delta F\}_{FE} + \{\Delta Q\}_{FE} \quad (33)$$

여기서  $[K]_{FE}$ 는 식 (27)로부터 구해지는 점선강성도행렬이고,  $\{\Delta u\}_{FE}$ 는 절점변위의 증분이다.

경계요소 영역에서는 경계적분방정식에 대한 계방정식은 표면력-변위 관계로 구성되므로 이를 하중-변위 관계로 변환한다. 에너지이론을 이용하여 경계요소에서 얻어진 요소행렬을 대칭화하는 방법을 사용한다. 경계요소 영역에 대하여 최소위치에너지 원리로부터 구한 평형방정식을  $\{u\}$ 와  $\{t\}$ 에 대해서 형상함수를 이용하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} (\{\delta u\}^T [N] \{t\} + \{\delta t\}^T \{u\})$$

$$- \{\delta u\}^T \{F\} - \{\delta u\}^T \{Q\} = 0 \quad (34)$$

여기서  $\{u\}$ 와  $\{t\}$ 는 절점에서의 미지값이고,  $\{Q\}$ 는 점소성 초기응력항을 나타내며,  $[N]$ 은 형상함수의 적분으로 얻어진다. 식 (20)의 적분방정식으로부터 점소성응력항을 제외하고,  $\{t\}$ 에 대한 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\{t\} = [G]^{-1} [H] \{u\} = [C] \{u\} \quad (35)$$

식 (35)를 식 (34)에 대입하여 이산화하면, 식 (36)과 같이 유한요소 형태로 쓸 수 있으며 이때의 강성도행렬  $[K]_{BE}$ 는 대칭행렬로써 식 (37)과 같다.

$$[K]_{BE} \{u\}_{BE} = \{F\}_{BE} + \{Q\}_{BE} \quad (36)$$

$$[K]_{BE} = \frac{1}{2} ([N][C] + [C]^T [N]^T) \quad (37)$$

유한요소의 강성도행렬  $[K]_{FE}$ 와 경계요소의 강성도행렬  $[K]_{BE}$ 은 모두 하중-변위 관계를 갖고 있으므로 유한요소와 경계요소의 접합부분에서 공유하는 절점에 대하여 강성도와 하중을 조합하여 전체 강성도행렬과 하중행렬을 구성하여 유한요소 형태로 만들 수 있다.

$$([K]_{FE} + [K]_{BE}) (\{u\}_{FE} + \{u\}_{BE}) = \{F\}_{FE} + \{F\}_{BE} + \{V\}_{FE} + \{Q\}_{BE} \quad (38)$$

이로부터 전체 강성도행렬과 전체하중 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$[K]_G \{u\}_G = \{F\}_G + \{Q\}_G \quad (39)$$

여기서  $[K]_G$ 는 조합된 전체 강성도행렬,  $\{u\}_G$ 는 조합된 전체 변위,  $\{F\}_G$ 는 조합된 전체 외부하중,  $\{Q\}_G$ 는 조합된 전체 점소성응력항을 나타낸다.

## 4. 결과분석 및 검증

### 4.1 내부요소를 사용하지 않은 점탄소성 경계요소법의 검증

시간의존 비탄성문제에 대한 유한요소-경계요소 조합해석 방법의 검증을 위하여 우선 내부요소가 없는 점탄소성 경계요소해석방법을 검증한다. 그림 2와 같은 길이 10m, 폭 1m의 단순 축방향 하중을 받는 인장재를 생각한다. 해석대상은 평면 변형률

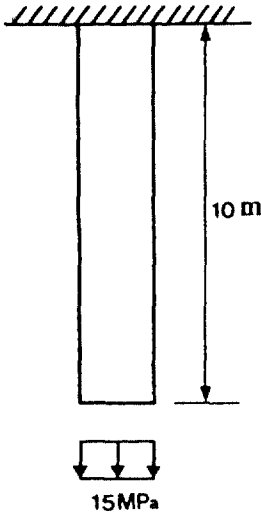


그림 2. 단순 인장재의 해석대상 모형

상태의 하중 15 MPa를 받는 인장재이고, 물성은 탄성계수 10000 MPa, 포아손비 0, 항복응력 10 MPa, 유동계수  $0.001 \text{ MPa}^{-1}\text{sec}^{-1}$ , 변형률 경화계수 5000 MPa이다. 물체력의 영향은 무시하였으며, 항복조건으로는 Von-Mises 파괴조건식을 사용하였다. 유한요소해석에서는 20개의 요소와 33개의 절점을 사용하였으며, 경계요소해석에서는 24개의 선형요소와 28개의 절점을 사용하였다.

대상구조체에 작용응력  $\sigma_A$  가하여졌을 때, 단부의 수직변위  $u$ 의 이론해<sup>(10)</sup>는 다음과 같다.

$$u = \frac{L}{E} \sigma_A + (\sigma_A - \sigma_{y0}) L \cdot \gamma \cdot t \quad (40)$$

여기서  $L$ 은 부재의 길이,  $E$ 는 탄성계수,  $\sigma_{y0}$ 는 초기항복응력,  $\gamma$ 는 유동계수,  $t$ 는 하중재하 이후의 시간이다.

그림 3은 시간에 따른 단부의 변위에 대한 이론해, 유한요소해석 및 경계요소해석의 결과값을 비교한 것이다. 유한요소해석시의 결과가 정해와 거의 일치하는 반면, 경계요소법의 결과치는 초기값을 기준으로 이론해에 비하여 2% 정도 작게 나타났다. 이러한 결과가 나타난 이유는 식 (13)의 점소성 영역적분항을 경계적분으로 변환할 때 재하점과 적분점 사이의 거리  $r$ 이 점소성응력의 변수로도 작용하는데 기인한다고 사료된다. 또한 경계적분화시에

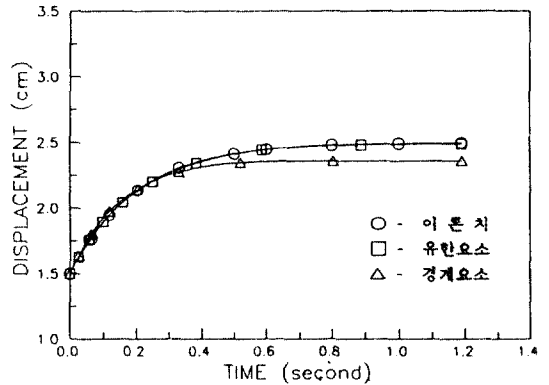


그림 3. 단순 인장재의 단부변위

선형인 형상함수를 이용하므로써 수치적인 오류가 발생하여 국부적인 응력집중부의 비선형성이 충분히 고려되지 못했기 때문인 것으로 판단된다.

실제로 내부요소를 나누지 않은 경계요소해석에서 영역적분항을 경계적분으로 변환할 때 점소성응력은 재하점과 적분점 사이의 거리의 함수이다. 하지만 이러한 점을 고려하게 되면 매 반복(iteration)시 점소성 영역적분항 전체를 다시 적분해야 되므로 매우 비효율적이게 된다. 본 연구에서는 유한요소법과의 조합에 있어서 효율적인 경계요소법의 개발을 위하여 점소성응력을 재하점과 적분점 사이의 구간안에서 일정하다고 가정한다. 응력집중영역 이외의 구간에서 발생하는 점소성응력이 미소하다는 가정으로부터 다음의 유한요소-경계요소 조합해석을 검증한다.

#### 4.2 유한요소-경계요소 조합해석에 대한 검증

유한요소와 경계요소를 조합한 경우를 검증하기 위하여 그림 4와 같이 지표에서 30m 아래에 굴착된 지름이 10m이고 20 MPa의 내압을 받는 원공을 가진 반무한 모형에 대하여 점탄소성 해석을 실시하여 그림 5, 6과 같은 유한요소 및 경계요소 모형의 해석결과와 비교하였다. 조합해석은 반무한영역에 대하여 해석하였으며, 항복조건은 Mohr-Coulomb 파괴조건을 사용하였다.

해석대상의 물성은 탄성계수 2000 MPa, 포아손비 0.2, 점착력 5 MPa, 내부마찰각  $10^\circ$ , 유동계수  $0.001 \text{ MPa}^{-1}\text{day}^{-1}$ , 변형률 경화계수 10000 MPa이다. 경계요소해석은 42개의 요소와 46개의 절점을 가진



BEM

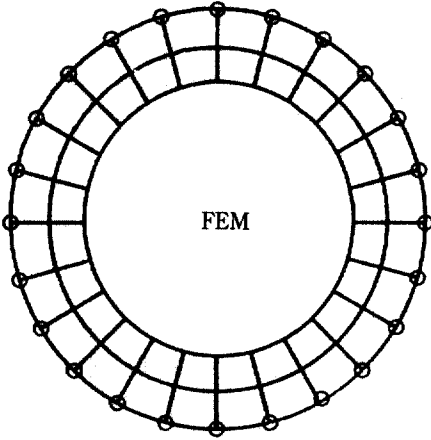


그림 4. 반무한 영역문제의 조합해석 모형

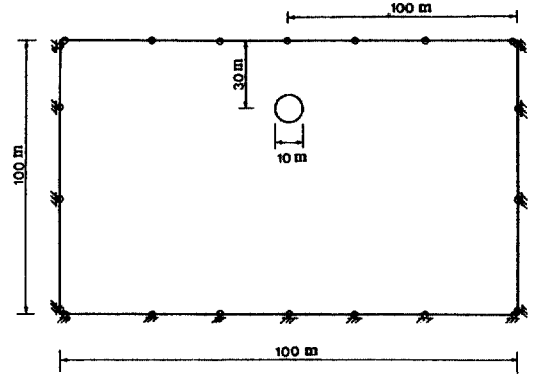


그림 6. 경계요소해석 모형

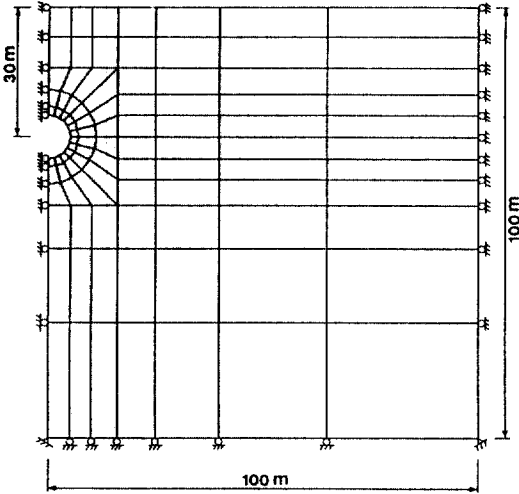


그림 5. 유한요소해석 모형

내부영역문제에 대하여 수행하였으며, 유한요소해석은 95개의 요소와 120개의 절점으로 수행하였다. 유한요소해석에서의 자유지지조건은 구조물의 안정을 위한 최소한의 구속지점만을 선택하여 수행하였다. 또한 조합해석은 24개의 경계요소와 48개의 유한요소로 구성하였으며, 유한요소는 원공중심에서 11m 까지를 고려하였다.

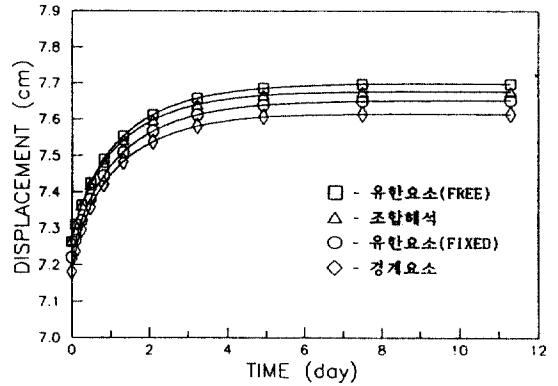


그림 7. 원공 천단부의 변위비교

해석결과 그림 7은 시간에 따른 원공천단부의 변위량을 해석조건별로 비교, 도시한 것이다. 단순 축방향 인장 예에서와 마찬가지로 경계요소법만의 해석결과는 다른 결과 값에 비하여 다소 작게 나타남을 볼 수 있지만, 정상상태에서의 조합해석 결과가 구속조건에 따른 유한요소해석 결과의 사이에 들어옴으로 전반적인 경향은 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 즉 반무한성을 고려한 조합해석의 결과가 경계에서의 모든 지점을 구속한 유한요소해석 결과 보다는 작게 나타나고, 최소한의 지점을 제외한 모든 지점을 자유단으로 해석한 결과 보다는 크게 나타나므로 조합해석의 결과가 합리적임을 알 수 있다. 그림 8은 원공 중심으로부터의 x 방향 거리에 따른 최대주응력을 도시한 것이다. 유한요소 해석시의 최대주응력이 조합해석시 보다 크게 나타난 이유는 조합해석에서는 지반의 반무한성이 고려된 반면,



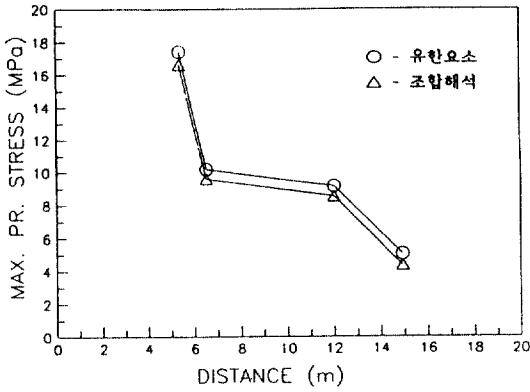


그림 8. 거리에 따른 최대 주응력의 변화

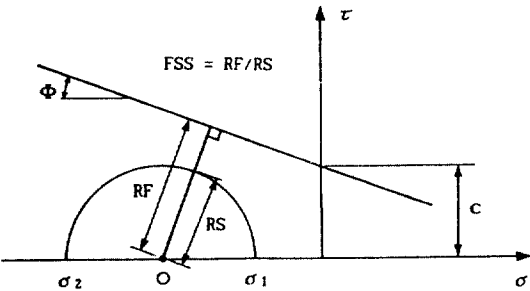


그림 9. Mohr-Coulomb 파괴조건

유한요소해석시에는 인위적인 경계의 구속으로 인하여 실제의 강성보다 크게 고려된 것으로 판단된다. 유한요소해석 결과를 기준으로 할 때 조합해석 결과와의 전체 최대주응력의 오차는 약 7.7%이며, 이는 실제로 미소한 차이이므로 이의 결과도 타당한 것으로 판단된다.

구성된 해석단면의 안정성을 검토하기 위하여 초기 전단파괴에 대한 응력비 FSS는 그림 9의 Mohr-Coulomb 파괴조건을 기준으로 다음식에 의하여 구한다.

$$FSS = RF/RS \quad (41)$$

여기서 RF는 O점에서 초기의 파괴포락선에 내린 수선의 길이이고, RS는 계산된 응력의 Mohr원까지의 길이로 각각 다음과 같다.

$$RF = [(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi] / 2 + C \cos \phi \quad (42)$$

$$RS = [(\sigma_1 - \sigma_2)] / 2 \quad (43)$$

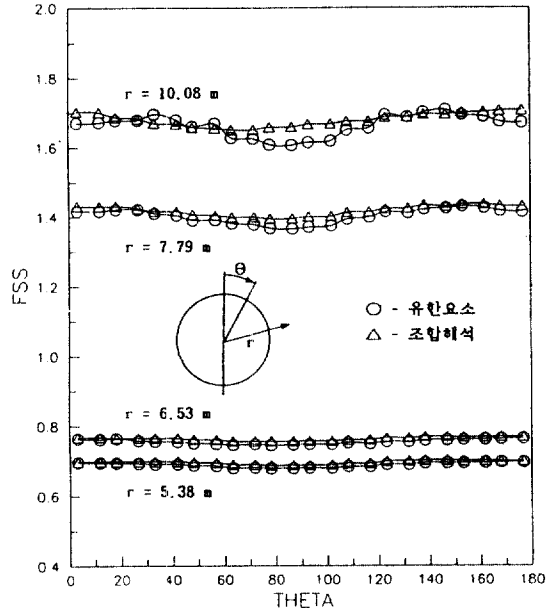


그림 10. 초기 전단파괴에 관한 응력비의 비교

그림 10은 각 요소의 가우스 적분점에서의 초기 전단파괴에 대한 응력비 FSS의 유한요소해석 결과와 조합해석의 결과를 비교한 것이다. 유한요소해석시의 응력비가 근거리에서는 조합해석시의 응력비보다 미소하게 작음을 알 수 있고 거리가 멀어질수록 조합해석의 반무한성에 의하여 그 차가 커짐을 알 수 있다. 그림에서 보는 바와 같이 원경 중심에서 반경 7m 이내에서 재료의 항복이 발생하며, 이는 유한요소망 내부에서만 점소성변형이 발생함을 의미하므로 구성된 조합모형이 합리적임을 알 수 있다. 위의 해석결과에 따르면 유한요소해석 결과와 비교하여 조합해석 결과가 타당한 것으로 판단된다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 시간에 의존되는 비탄성체의 거동 해석을 위해서 점탄소성 지배방정식을 경계요소해석 기법에 도입하였다. 경계요소해석에 있어서는 내부요소를 분할하지 않고 영역적분의 형태로 남아있는 점소성항을 경계적분화하는 방법을 연구하였다. 그리고 이를 점소성 유한요소이론과 조합하여 기존의

유한요소결과와도 비교검증하였다.

내부요소를 사용하지 않은 경계요소법만으로 구조물을 해석할 경우 소성거동이 심하게 발생하는 곳에서는 약간의 오차가 발생함을 알 수 있었으며, 이는 영역적분시 점소성응력이 소정의 적분구간 내에서 일정하다는 가정 때문인 것으로 판단되었다. 이러한 가정을 근거로 국부적인 응력집중부에서는 유한요소를, 그리고 점소성의 영향이 거의 없는 무한 및 반무한 영역에서는 경계요소를 사용하는 조합방법을 해석에 적용한 경우 상대적으로 많은 자유도를 가진 유한요소해석결과와 비교하여 타당한 결과를 얻을 수 있었다.

결과적으로 시간에 의존되는 비탄성체의 해석에 있어서 조합방법을 사용하면 하중조건과 경계조건의 변화에 따른 무한 및 반무한 영역의 지하구조물의 거동을 합리적으로 예측할 수 있으며, 유한요소와 경계요소의 장점을 살려 보다 효율적인 해석의 수행이 가능할 것으로 판단된다.

### 감사의 글

본 연구는 연세대학교 학술연구비의 지원으로 진행된 것으로 재단에 깊은 감사를 드립니다.

### 참 고 문 헌

1. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., *Boundary element techniques*, Springer-Verlag, 19

- 84.
2. Perzyna, P., "Fundamental problems in viscoplasticity", *Advan. Appl. Mech.*, Vol. 9, 1966, pp. 243-377.
  3. Coumeau, I., "Numerical stability in quasi-static elasto/viscoplasticity", *Int. J. Numerical Methods Engng.*, Vol. 9, 1975, pp. 109-127.
  4. Brebbia, C.A., and Telles, J.C.F., "Elastic/viscoplastic problems using boundary elements", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 24, 1982, pp. 605-618.
  5. Beer, G. and Meek, J.L., "The coupling of boundary and finite element methods for infinite domain problems in elasto-plasticity", *Boundary Element Method, Proc. of the Third Int. Seminar, Irvine*, 1981, pp. 575-591.
  6. 황학주, 김문겸, 임운묵, "유한요소와 경계요소의 조합에 의한 반무한영역 문제의 비선형해석", *한국전산구조공학회지*, 제 2권, 제 1호, 1988, pp. 55-64.
  7. Telles, J.C.F., and Brebbia, C.A., "Boundary element solution for Half-plane problems", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 17, 1981, pp. 1149-1158.
  8. Venturini, W.S., *Lecture Notes in Engineering 4, Boundary Element Method in Geomechanics*, Springer-Verlag, 1983.
  9. 황학주, 김문겸, 허택녕, 나경용, "물체력이 작용되는 반무한영역 문제의 비선형유한요소-경계요소 조합해석", *대한토목학회논문집*, 제 11권, 제 1호, 1991., pp. 45-53.
  10. Owen, D.R.J. and Hinton, E., *The Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press, 1980.

(接受 : 1993. 4. 14)