

<논 문> SAE NO. 933768

최적화 기법을 이용한 곡면페어링

Fairing B-spline Surfaces Using Optimization Technique

박 상 근,* 이 건 우**
S. K. Park, K. W. Lee

ABSTRACT

The needs for smooth curves and surfaces are increasing in modeling cars, ships, airplanes, and other consumer products either for aesthetic or functional purpose. However, the curves and surfaces generated by conventional modeling methods usually exhibit an unwanted behavior due to digitizing errors or inadequate generation method, and thus much time and extra effort is spent afterwards to get the faired results.

The objective of this work is to develop a fairing scheme by which well refined shape of a surface can be acquired with detecting and removing the shape imperfections of the given surface represented by NURBS. The fairing scheme is based on an optimization process in which the control points of the given surface are repositioned to minimize the integration of the jumps(perturbations) of the unit normal vectors at all surface points.

주요기술용어 : Fairing(페어링), Optimization(최적화), Unit Normal Vectors(단위법선벡터), NURBS(비주기유리 B-스플라인곡면), Shape imperfections(모양흠집)

1. 서 론

최근들어 금형 등과 같이 복잡한 형상을 갖는 제품의 효율적인 가공 및 생산을 위하여 설계단계에서 상용 곡면모델러를 도입하여 사용하는 것이 보편적인 추세가 되고 있다. 이러한 상용 곡면 모델러에서는 곡선 및 곡면의 생성과 수정 기능을 제공하고 있으며 대부분의 경우 곡선 및 곡면식을 NURBS를 이용하여 표현하고 있다. 또한 곡선 및 곡면을 생성하는 가장 기본적인 방

법으로 보간법(interpolation)과 근사법(data fitting)등을 제공하고 있다. 특히 자유곡면의 경우에는 그 외에도 하나 또는 그 이상의 단면곡선을 이용하여 곡면을 생성하는 스킨닝(skinning), 스위핑(sweeping), 스윙(swinging) 그리고 로프팅(lofting)등 여러가지 방법을 제공하고 있다.

그러나, 이와같은 여러가지 방법에 의해 생성된 곡선 및 곡면의 형상이 그 사용목적에 부합될 수도 있지만 대부분의 경우 생성된 곡선 및 곡면에 미흡하나마 흠집(shape imperfections)이 있

* 정회원, 서울대 대학원 기계설계학과

** 서울대 기계설계학과

을수가 있다. 여기서 모양흠집이란 주로 곡선이나 곡면의 진동현상이 나타나는 부분을 의미하는데, 곡선의 경우 변곡점이 자주 나타나는 부분을 말하고 곡면의 경우는 가우시안 곡률(Gaussian curvature)의 부호가 바뀌는 부분 등을 말한다. 또한 곡률의 변화가 불연속적이거나 변화량이 점차적(gradual)이지 않은 부분도 모양흠집이라고 말한다. 특히 보간법과 근사법에 의한 생성은 생성하고자 하는 곡선, 곡면의 특성모양(characteristic shape)을 나타낼 수는 있지만 곡선, 곡면의 부분부분에 대해서는 심한 진동이나 곡률의 불연속 등을 보이기도 한다. 따라서 생성된 곡선, 곡면을 실제 응용에서 사용하기 위해서는 설계자가 흠집을 판단하여 수정을 하여야 하는데, 실제로 컴퓨터화면상에서는 전체 모양을 보기 위해 작은 스케일로 표시하기 때문에 실제 스케일의 곡선이나 곡면에서 나타나는 흠집을 판단하기가 어렵다. 결국, 곡면모델링 시스템에 의해 생성된 곡선이나 곡면은 설계 목적에 부합하는 전체적인 특성모양만을 유지할 수 있을 뿐이므로, 곡선이나 곡면의 어느 부분에 흠집이 존재하는지를 자동으로 찾아내어 이를 부드럽게(smooth) 만들어 주는 기능이 별도로 필요하게 된다. 이를 위해서는 곡선이나 곡면의 질(quality)을 평가할 수 있는 도구가 있어야 하며, 흠집을 없애주는 페어링(fairing) 과정이 필요하다.

실제로 자동차 회사 등 설계현장에서는 수작업으로 페어링을 하여 곡면을 부드럽게 만들어 주는데, 그 예로 Volvo사에서는 자동차 후드(hood) 곡면을 페어링하기 위해서 전문 기술자들이 약 170시간을 소요해서 원하는 곡면을 만들어 낸다.¹⁾ 이와같이 수작업으로 하는 페어링은 막대한 시간과 비용을 낭비하므로 자동페어링 기능이 가능하다면 설계기간의 상당한 단축을 기대할 수 있을 것이다.

따라서 본 연구에서는 곡선 및 곡면의 평가 기준 및 방법을 정의하고 흠집을 판단하여 자동으로 페어링하는 기능을 개발하였다. 본 연구에서는 곡선 및 곡면식으로 NURBS를 사용하였고, 조정점(Control points)을 설계변수로 하여 목적함수를 정의하고 최적화 기법으로 페어링을 수

행하였다. 본 연구의 특징으로는 곡선 및 곡면상의 페어링 영역을 사용자가 부여할 수 있어 국부적 페어링을 가능하게 했으며 초기 형상으로부터 조정점의 최대 변화량을 설계자가 정의할 수 있도록 하여 페어링정도를 조절할 수 있도록 하였다. 그리고 다양한 구속조건을 부여할 수가 있어 사용자의 요구조건을 최대한 수용할 수 있도록 하였다.

2. 관련 연구

지금까지 발표된 곡면 관련 연구논문을 보면 대부분 곡면의 모양흠집(shape imperfections)을 정의하고 이를 찾아내어 수작업으로 이를 없애거나 혹은 어떤 알고리즘에 의해 제거하는 내용이라고 할 수 있다.

Poeschl²⁾는 등조선(isophote)을 이용하여 곡면 패치(surface patch) 간의 공통 외곽선(common boundary)에서의 곡면 미분값(surface derivatives)의 연속성을 조사하도록 하였다. 즉 두 곡면 패치간의 매끄러운 등조선은 공통 외곽선에서의 기하학적 연속성(geometric continuity)을 의미하므로, 두 곡면의 경계부분에서 미분값의 차이를 그래픽상에서 사용자가 한 눈으로 알아 볼 수 있게 하였다. 그리고 Hoschek^{3,4)}는 곡면의 흠집을 바람직하지 않는 곡률을 가지고 있는 영역으로 정의하여 가우시안 곡률(Gaussian curvature)의 값이 0이 되거나 그 부호가 변하는 지점을 찾도록 하였다. 이는 극 이미지(polar image)를 그려봄으로써 그 영역을 찾아낼 수가 있다. 일단 흠집이 있는 영역이 찾아지면 이를 제거하는 방법으로 직접 해당 영역의 조정점을 수작업으로 수정하도록 하였다. 그리고 Hoschek는 또한 케이오소토크 곡면(K-orthotomic surface)을 그려서 특이점(singularities)을 찾는 방법을 제시하였는데 이 역시 가우시안 곡률의 값이 0이거나 부호가 변할 때의 점을 찾는 방법으로서 $K=0$, $\frac{\partial K}{\partial u}=0$, $\frac{\partial K}{\partial v}=0$ 를 만족하는 상태의 점을 찾는 것이다. 이러한 점에 대한 수정 방법으로 매우 제한적인 방법을 제시하였는데, 등파라미터선($v=\text{const}$ 인 곡선)을 따라 가며 $K=0$, $\frac{\partial K}{\partial u}=0$ 인 바람직하지 않은 영역을

찾고 조정점의 z좌표값(z-component)를 움직여서 그 영역을 제거하는 것이다.

한편 곡면의 트위스트(twist)벡터를 조정하여 곡면모양의 진동을 감소시키거나 에너지 최소화 상태의 곡면생성을 위한 최적의 트위스트벡터를 결정하는 문제 등의 연구논문^{5,6,7)}이 있다. Brunet⁵⁾는 곡면 패치(patch)들 간의 진동(oscillation)을 감소시키기 위해 트위스트 요소(twist factors)을 조정하는데, 조정후 생성된 곡면은 C² 연속성을 잃고 C¹인 곡면이 되는 단점이 있다. 그리고 Hagen⁶⁾는 쿤스패치(Coons patch)를 사용하였고 페어니스 기준(fairness criterion)으로 다음의 식을 사용하여 곡면을 페어링하도록 하였다.

$$\int (k_1^2 + k_2^2) ds, \quad (k_1, k_2 : \text{principal curvatures of the surface})$$

이때 사용한 방법은 변이 접근이고 최적 트위스트(optimal twist)을 결정하도록 하였다. 이 방법을 사용할 때 문제점은 적당한 초기 트위스트 벡터를 사용자가 주어야 하며 이에 따른 트위스트 비상용(twist incompatibilities)문제의 발생이다. 그리고 Kallay와 Ravani⁷⁾는 사각 곡선망(Rectangular network of curves)을 가지고 곡면을 생성할 때 문제가 되는 트위스트 벡터를 곡면에너지의 최소화 상태에서 구하도록 하였다. 여기서 에너지의 표현식을 단순화시켜 $E = \iint (k_1^2 + k_2^2) dS$ 대신에 $E = \int \int_0^1 \int_0^1 R_u^2 dudv$ 를 사용하였다. 이때 해법은 $\frac{\partial E}{\partial R_u} = 0$ 을 필요 조건으로 해서 선형 방정식(linear equation)을 유도하고 그 해를 구하도록 하였다. 이 방법은 에너지 표현식을 단순화시킴으로써 다른 편미분 항을 무시하였고 따라서 이 무시된 항(예를 들면, $R_{uu}, R_{vv}, R_u \times R_v \dots$)이 곡면 모양에 어떤 영향이 있을 지를 무시하였다고 볼 수 있다. 즉 한 방향의 에너지만을 고려하였고 진정한 의미의 최적 트위스트벡터(optimal twist vector)를 구했다고 할 수가 없다.

한편 B-spline 곡면을 가지고 최적화 기법으로 곡면페어링을 한 연구논문⁸⁾이 있다. Ferguson, Frank와 Jones⁸⁾는 곡면의 등파라미터 곡선(isoparametric curves)의 곡률(curvature)을 조정하여

볼록(convex)한 곡면을 생성하고자 하였다. 이때 사용한 목적함수와 구속조건은 다음과 같다.

$$\text{목적함수} : f(C_{ns}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|C_{ns} - \hat{C}_{ns}\|^2$$

구속조건 : convex isoparametric curves

여기서 C_{ns} 는 페어링된 후의 곡면의 조정점이고 \hat{C}_{ns} 는 페어링 전의 곡면의 조정점이다. 여기서 구속조건인 볼록조건은 너무 엄격(too sufficient conditions)하고 한 매개변수 방향의 등파라미터 선(isoparametric curves)에 대한 것이어서 다른 매개변수 방향에 대해서는 어떤 결과를 나타낼지 예측할 수가 없는 문제가 있다. 또한 초기치(initial guess)를 주어야 하고 잘못되면 틀린해를 찾으려 많은 CPU 사용시간을 요구하는 문제도 있다.

Lott와 Pullin⁹⁾는 에너지 최소화 개념으로 곡면을 페어링하였다. 여기서는 페어링할 때, 다음의 조건들을 가정하였다.

- 페어링전의 초기 곡면(initial surface)은 페어링 후의 곡면(finished product)에 매우 가까워야 한다.
- 페어링을 요하는 부분은 틀림없이 어떤 그래픽처리(graphical display)가 이루어져야 한다.

이상의 요구를 가지고 얇은 사각 탄성 판의 변형에너지(strain energy)와 유사하게 에너지 형태로 곡면 페어니스의 측정도를 다음과 같이 소개하였다.

$$E = \iint (k_1^2 + k_2^2) \|R_u \times R_v\| dudv$$

여기서, k_1, k_2 는 주곡률(principal curvatures)이고, R_u, R_v 는 곡면의 u, v 방향의 1차 편미분한 값이다. 또한 페어링 후 곡면이 초기 곡면에 가까워야 하기 때문에 다음의 구속 조건을 세웠다.

$$Err = \iint_R ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{1/2}$$

$$\|R_u \times R_v\| dudv < \epsilon$$

여기서, (x_0, y_0, z_0) 는 초기 곡면이고, (x, y, z) 는 페어링 과정후의 곡면이다. 또한 적분영역 R 는 u, v 영역이고, ϵ 는 사용자가 주는 허용치(tolerance)이다.

Lott와 pullin는 위의 식들을 다시 단순화시키고 설계변수(design variables)인 조정점의 움직임 방향을 제한시켰다. 단순화시킨 식은 다음과 같다.

$$\text{목적함수는 } E = \int_L (k_1^2 + k_2^2) du \quad (dv) \text{로}$$

$$\text{구속조건은 } Err = \int_L ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{1/2} du \quad (dv) < \epsilon \text{로 하였다.}$$

여기서 L 은 등파라미터선을 나타낸다. 즉, 유클리드 공간상의 면적분을 파라미터 공간상의 선적분으로 단순화시킨 것이다. 그리고 조정점의 움직임 방향을 3개(x, y, z 방향)에서 1개(곡면 법선벡터방향)로 자유도를 감소시켰다. 위의 단순화된 식으로 타당한 해를 구할 수 있다고 언급하였으나 많은 부분에서 생략되고 단순화되었기 때문에 진정한 의미에서는 최적해(optimal solution)를 구한다고 할 수 없다.

3. 페어니스(fairness)의 서술적 정의

일반적으로 페어링이란 심미적으로 매끄러운 곡선, 곡면을 얻기 위해 주어진 곡선 혹은 곡면에 가해지는 재정리의 과정(refining process)이라고 말한다. 이 과정은 해당 곡선, 곡면의 영역 중 국부적 혹은 전체적으로 이루어진다. 그런데 곡면 페어니스에 관한 양적인 측정(quantitative measure)으로 곡면의 페어니스를 정의하기란 결코 쉬운 일은 아니다. 현재 곡면의 페어니스 즉 곡면의 기하학적 질(geometric quality)을 수학적으로 정의하여 측정하려는 시도는 진행중이다. 그러나 정확한 곡면의 페어니스를 정의하려는 데 있어서 어려움은 곡면모양의 두가지 요소때문이다. 즉 곡면의 모양을 특성모양(characteristic shape)과 혼란모양(undesirable shape)으로 분류할 수가 있지만 두 모양에 대한 구분이 곡면을 설계하는 의도에 따라서 달라질 수가 있기 때문

이다. 일반적으로 곡면의 특성모양은 곡면의 설계자가 의도한 모양으로 정의할 수 있는데 이 모양은 곡면의 페어링과정 후에도 반드시 유지되어야 하는 부분이다. 한편 곡면의 혼란모양은 설계자의 설계의도와는 전혀 관련없이 곡면생성 방법상의 문제 등으로 해서 나타나는 부분이다. 결국 곡면의 페어니스에 대한 양적인 측정은 곡면의 특성모양은 보존, 유지되면서 혼란 모양만을 제거하게끔 그 값이 결정되어야 한다. 그러나 위에서 요구되는 사항을 만족시켜줄 수 있는 페어니스에 대한 수학적 정의 내지 방정식을 유도하기란 거의 불가능하다.

결국, 본 연구에서는 먼저 서술적으로 곡면의 페어니스에 대해 정의를 내릴 것이고 적어도 이와같은 관점의 페어니스 정의를 만족하는 페어링과정을 유도해 보겠다. 곡면의 페어니스에 관한 서술적 정의는 다음과 같다. 곡선의 경우를 잠깐 언급하면, 곡선을 따라가며 곡률값이 연속적이어야 하고 곡률변화율이 특성모양이 아닌 부분에 대해서 흔들림(진동)이 없어야 하며 곡선의 특성모양은 반드시 보존되어야 한다. 이와 비슷하게 곡면의 경우도 곡면 위의 임의의 한 점에서 이웃한 임의의 점으로 움직였을 때 곡면의 가우시안 곡률 혹은 평균곡률이 연속적이어야 하고 특성모양이 아닌 부분에 대해서 곡률 변화율이 점차적이어야 한다.

위의 정의를 물리적으로 분석해 보면 다음과 같다. 곡선의 곡률이란 곡선 위의 접선벡터가 곡선을 따라 가면서 변화해 나아갈 때, 그 접선벡터가 변화하는 각속도이다. 즉 곡선을 따라 접선벡터의 변화율이 불연속인 점이 있다면 그 점에서는 곡률변화가 급하게 일어난 상태이고 또한 심한 모멘트(moment)의 변화가 일어난 상태이기 때문에 곡선의 질(quality)이 이 점에서 나쁘다고 말할 수가 있다. 또한 특성부분이 아닌 부분에 대해서 곡률변화율이 점차적이지 못하다면 그 부분의 모양은 그 주위의 점차적 곡률변화율을 보이는 부분의 모양형태를 갑작스럽게 벗어나서 다른 형태의 다른 모양을 가지기 시작하기 때문에 곡선의 질을 떨어 뜨리게 된다. 그리고 곡면의 경우도 가우시안 곡률 분포가 점차적이지 못하

다면 곡면의 모양형태에 갑작스런 변화가 일어나서, 마치 이 부분에 집중 하중이 걸려 있는 상태라고 볼 수 있기 때문에 에너지 차원에서 불안정한 상태가 되고 이 부분이 곡면의 질을 떨어뜨리게 된다.

이와 같은 페어니스에 관한 서술적 정의를 고려할 때, 특성모양이 아닌 부분에서의 곡률변화의 불연속 혹은 곡률변화율의 진동현상을 최소화하는 과정은 곧 페어링과정이라 말할 수가 있다. 물론 이상의 서술적 정의로도 페어링을 수행하기에는 한계가 있다. 이는 실제로 곡선이나 곡면의 특이한 모양변화가 특성모양인지 혼란모양인지를 임의적 기준으로 판단하기가 곤란하며 설계자의 의도를 수식으로 표현하는 데에는 한계가 있기 때문이다.

본 연구에서는 이상에서 언급한 기준을 근거로 곡률변화의 불연속 혹은 곡률변화율의 진동현상을 측정할 수 있는 목적함수를 유도하고 최적화 기법을 이용하여 페어링과정을 수행하였다. 즉, 다음에 열거한 사항을 고려하면서 페어링을 자동으로 수행하는 페어링모듈을 개발하였다.

첫째, 페어링과정을 거친 곡면은 반드시 페어링 전의 곡면에 가까와야 한다. 즉, 페어링 후의 곡면(faired surface)과 초기 곡면(initial surface)과의 차이는 사용자가 지정해 주는 허용치(tolerance) 안에 있어야 한다.

둘째, 페어링된 후의 곡선이나 곡면이 사용자의 요구를 만족시켜 주지 않을 때는 원래의 곡선이나 곡면으로 되돌아 갈 수 있어야 한다.

셋째, 페어링된 후의 곡선이나 곡면이 원래의 곡선, 곡면보다 나아졌음을 입증할 수 있는 도구가 있어야 한다. 이 도구는 그래픽 처리를 통하여 사용자의 요구가 만족되었음을 보여주어야 한다.

넷째, 사용자의 요구가 곡선이나 곡면의 어느 특정 부분만을 페어링하기를 원할 수도 있으므로 페어링과정은 국부적(locally)으로도 그리고 전체적(globally)으로도 가능해야 한다.

다섯째, 가능하면 페어링에 소요되는 CPU 사용시간은 짧아야 한다. 그리고 사용자와 대화식으로 그 과정을 수행할 수 있어야 한다. 물론

사용자와의 대화수는 될 수 있는 한 적어야 한다.

4. 곡면의 페어링

본 연구에서 사용하는 곡면의 표현식은 NU-RBS(Non Uniform Rational B-spline Surface)이고 페어링방법은 최적화기법을 이용하여 주어진 곡면의 조정점을 최적의 위치로 재조정한다. 그리고 곡면경계에서의 경계곡선의 고정 혹은 곡면의 접선리본(boundary tangent ribbon)의 유지등을 구속조건으로 사용하였다. 최적화시의 설계변수로는 조정점을 선택하였고 이 조정점이 움직일수 있는 영역, 즉 조정점의 움직임을 사용자가 부여할 수 있어 원래의 곡면에 가까운 결과를 보장할 수 있게 하였다.

본 연구에서 제시할 목적함수를 소개하기 전에 곡면모양에 관한 분석 및 모양흡잡에 관해 서술 하겠다. 곡면 위의 임의의 한 점에서의 요철은 가우시안곡률등을 계산하여 그 점이 주위의 영역에 대해 위로 볼록한지 아닌지 등을 판단할 수 있다. 즉 곡면의 최소주곡률(minimum principal normal curvature)과 최대주곡률(maximum principal normal curvature)의 곱인 가우시안 곡률값으로 곡면의 모양변화(shape change)를 예측할 수 있다. 모양흡잡은 관련연구⁹⁾에서도 언급된 것처럼 대개 가우시안곡률이 0이거나 부호가 변하는 곡면 위의 지점을 일컫는다. 가우시안곡률이 0인 지점은 곡면 위에 평점(flat spot)이 있음을 나타내 주고 가우시안곡률의 부호가 변하는 지점은 곡면모양의 성질이 급격히 변하고 있음을 나타내 준다. 이상의 모양흡잡은 곡면 위의 한 점에 대한 것인데 이 한점이 곡면 위의 임의의 영역에서 계속적으로 나타난다면 그 영역은 모양흡잡을 갖고 있다고 말할 수가 있다. 본 연구에서는 곡면의 모양변화에 대한 척도로 가우시안곡률이 아닌 곡면 위의 단위법선벡터(unit normal vector)의 변화 즉, 곡면을 정의하는 각 매개변수 방향에 대한 단위법선벡터의 미분값을 척도로 하여 모양변화의 정도를 구체적으로 측정하였다. 그 근거는 가우시안곡률이 단위법선벡터의 각 매개변수 방향으로의 미분값에 의해

표현되기 때문이다. 가우시안곡률과 단위법선벡터의 각 매개변수 방향으로의 미분값과의 관계는 다음과 같다.

$$K = \frac{n \cdot (n_u \times n_v)}{\|N\|} \quad (1)$$

여기서 K =가우시안 곡률

N =곡면의 법선벡터

n =곡면의 단위법선벡터

$n_u = \frac{\partial n}{\partial u}$ = 매개변수 u 에 관한 단위법선벡터의 편미분

$n_v = \frac{\partial n}{\partial v}$ = 매개변수 v 에 관한 단위법선벡터의 편미분

한편, 곡면은 점차적으로 모양이 변화할 수도 있고 급격히 혹은 진동하면서 모양이 변화할 수 있다. 이와 같은 두가지의 모양변화에 대해 n_u 와 n_v 가 이를 표시해 주는데, 어느 한점에서 n_u 와 n_v 의 값이 작을 때는 곡면모양이 그 점 근처에서 점차적으로 변화함을 나타내 주고, n_u 와 n_v 의 값이 진동을 한다면 이는 곡면모양 역시 진동한다는 것을 나타내 준다. 결국, 점차적 모양변화는 단위법선벡터의 점차적 변화라고 할 수 있고 그렇지 못한 모양변화는 단위법선벡터의 불규칙적인 변화라고 할 수가 있다.

곡면 위의 단위법선벡터의 변화량, dn 은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dn = n_u du + n_v dv \quad (2)$$

위의 식 (2)로부터 dn 을 최소화하기 위해서는 $\|n_u\|$ 와 $\|n_v\|$ 를 최소화해야 한다. 즉 곡면 위의 임의의 영역 혹은 전 영역에 대해서 각 방향으로의 단위법선벡터의 변화량을 최소화하여 곡면모양의 흔들림을 제거하고 급격한 모양변화를 방지하기 위해서는, 결국 다음의 목적함수를 정의해서 최소화하면 될 것이다. 본 연구에서 개발한 곡면의 목적함수와 목적함수의 조정점에 관한 구배식은 부록에 구체적으로 설명되어 있다. 그리고 본 연구에서 현재 구현된 구속조건은 주로

곡면의 경계부분에 관한 것들이다. 즉 곡면의 사각 경계곡선의 고정 혹은 경계곡선의 접선리본(tangent ribbon)의 유지 등이다. 이것은 경계곡선에 해당하는 조정점 및 접선리본에 영향을 주는 조정점을 고정시켜 구속조건으로서 구현한다. 아래의 목적함수에서 $\|N\|dudv$ 은 곡면 위의 미소면적을 나타낸다.

$$\iint (n_u \cdot n_u + n_v \cdot n_v) \|N\| dudv \quad (3)$$

식 (3)에서 제시된 목적함수의 특징 중의 하나는 곡면의 두 방향인 u 또는 v 중 한 방향만을 따라가면서 페어링할 수 있다는 것이다. 이는 기존의 에너지방법에 의한 페어링에서 제공되지 못하는 특징이다. 주로 한 방향으로의 페어링요구는 배의 곡면(ship hulls) 혹은 항공기의 날개 곡면(airplane wings)을 설계할 때 유체의 흐름 방향을 따라가면서 요구되는 사항이다. 이를 위해서 본 목적함수는 식 (4)에서와 같이 두개의 항으로 나누어지고 필요에 따라 오직 하나의 항만을 최소화하면 된다.

$$\begin{aligned} & \iint (n_u \cdot n_u + n_v \cdot n_v) \|N\| dudv \\ & = \iint (n_u \cdot n_u) \|N\| dudv + \iint (n_v \cdot n_v) \|N\| dudv \quad (4) \end{aligned}$$

본 연구의 목적함수는 NURBS 곡면의 매개변수 방향인 u 와 v 방향에 대해서만 표현되어 있다. 그래서 u 방향과 v 방향에 대해서만 페어링효과를 기대할 수 밖에 없다고 여겨질 수 있다. 그러나 이와 같은 의문은 다음과 같이 설명된다. 본 연구의 목적함수는 곡면 위의 임의의 한 점에 대해서 u 방향과 v 방향의 단위법선벡터의 변화를 최소화하려는 것으로 이는 궁극적으로 오직 u 방향과 v 방향만으로 곡면을 평평하게 만드려는 것과 같다. 실제로 곡면 위에서 무수히 많은 방향이 존재하고 이 수많은 방향에 대해서 오직 u 와 v 방향만으로는 원하는 결과 즉 페어링의 결과를 기대할 수 없다. 그러나 이와 같은 문제는 곡면 위의 임의의 한 점에 대해서 모든 방향을 고려하기 때문에 생기는 문제이고 곡면 위의 임

의 영역에 대한 적분의 최소화라면 방향에 대한 문제는 극복될 수 있다. 여기서 적분의 최소화라는 행위는 주어진 영역에 대해서 가해지는 페어링인데 어떠한 구속조건도 주어지지 않은 상태라면 궁극적으로 곡면을 평평하게 만들려는 행위이다. 이와같은 페어링행위는 곡면 위의 주어진 영역의 모든 점에 대해서 적용되는데 각각의 점들을 두방향 즉 곡면의 매개변수 방향인 u 와 v 방향으로 평평하게 하려고 할 것이고 이것은 결과적으로 모든 방향에 대해 주어진 영역을 평평하게 하려는 결과를 낳을 것이다. 즉 각각의 점들은 십자모양(+)으로 평평해지고 이 점들을 전체적으로 보면 그 영역이 평평해지는 것과 같다. 결국 곡면의 모든 방향에 대해서 어떤 행위(여기서는 목적함수의 최소화)를 가할 때는 두 방향에 대한 적분의 최소화를 통하여 구현한다면 적어도 방향에 대한 큰 문제는 극복될 수 있을 것이다. 이때 적분은 두 방향에 대한 적분이면 충분하다. 왜냐하면 NURBS 곡면은 두 방향만으로 충분히 표현되기 때문이다.

5. 곡면 페어링의 평가

곡면 평가는 곡면의 기하학적 성질(geometric properties)를 그래픽 화면 위에 가시화(visualization)해서 그 성질을 알아보는 데 그 목적이 있다. 이는 여러가지 곡률값들 혹은 그들의 조합들을 곡면 위에 분포시켜 곡률의 변화정도 및 곡면의 불안정한 영역 등을 찾아내어 곡면의 질을 평가하는 것이다. 주로 곡면의 2차 미분값을 곡면 위에 나타내 준다.

5.1 색칠방법에 의한 평가

곡률 분포에 대한 색칠방법은 곡면의 1차, 2차 미분한 값들을 반영하기 때문에 곡면 성질을 분석하기에 적합하다. 일반적으로 곡면의 곡률분포도는 곡면의 미세한 변화에 매우 민감하다. 그것은 일정한 높이에 대한 컨투어라인(contour lines), 반사선(reflection lines) 등의 다른 방법에 의해서는 확인할 수 없는 곡면의 불순점(surface imperfections)을 표시해 줄 수 있다. 특히 반사

선은 전체적인 곡면의 모양을 나타내 주는데 좋은 도구(tool)로서 의미가 있지만 상세한 국부적인 곡면의 정보를 나타내 주지는 못한다. 반면에 곡률분포도는 곡면의 상세한 국부모양을 나타내 주는데 알맞은 도구로서 역시 의미가 있다. 하지만 이 곡률분포도는 전체적인 곡면의 모양에 대한 정보를 나타내기에는 다소 무리가 있다. 왜냐하면, 어떤 응용분야에서는 곡률분포도는 필요이상으로 곡면의 곡률변화정도를 표시해 주기 때문에 그 응용분야에서는 곡률분포도는 필요이상으로 곡면의 곡률변화정도를 표시해 주기 때문에 그 응용분야에서는 생성된 곡면이 만족스럽다 할지라도 불순한 점이 있는 것처럼 표시해주는 경우가 있기 때문이다.

곡면의 곡률분포정도는 크게 가우시안 곡률, 평균곡률, 그리고 절대곡률의 서로 다른 곡률분포도의 조합에 의해 그 해석이 가능하다. 각각의 곡률분포도는 같은 곡면에 대해서 서로 다른 상세한 정보를 알려주므로 한개만의 곡률분포만으로는 곡면을 유일하게 나타내 주지는 못한다. 그 예로 실린더(cylinder)의 경우와 평면(plane)의 경우는 모두 가우시안 곡률이 0이기 때문에 같은 가우시안곡률 분포를 그린다. 그러므로 적어도 두개 이상의 곡률분포도를 이용해야만 곡면의 모양에 대한 정보를 얻을 수가 있다.

실제로 곡면의 곡률분포를 그래픽으로 표시하는 방법은 반복적인 색깔 매핑(cyclically color mapping)을 사용하며 다음과 같이 세가지 종류¹⁰⁾로 구별할 수 있다.

- 반복적인 흑백밴드(cyclically black and white bands)
- 반복적인 회색밴드(cyclically grey bands)
- 반복적인 RGB밴드(cyclically RGB bands)

흑백밴드 방법은 그 반복정도를 크게 하면 곡률값이 일정한 컨투어를 그려낼 수가 있다. 그리고 회색밴드는 반복정도를 작게 하여 전체적인 모양에 대한 정보를 얻어낼 수가 있다. 한편 RGB밴드로 하면 화려하게 곡면의 곡률값의 변화정도를 감지할 수가 있다. 그러나 흑백밴드나 회색밴드로 했을때 보다는 다소 혼동될 수도 있다.

실제적으로 이와같은 반복적인 색깔매핑방법을 구현하기 위해서는 우선 곡면을 세밀하게 삼각형모양의 메시(mesh)로 만든 다음 각 삼각형 꼭지점에 해당하는 점에 대해서 곡률을 계산한다. 이 계산된 곡률로부터 적당한 매핑방법에 의해 RGB값이 결정되고 이 RGB값을 가지고 고라우드 음영도(Gouraud shading)에 의해 삼각형 메쉬를 채색한다. 여기서 적당한 매핑방법이란 명도, 채도를 1로 설정하고 색상만을 곡률값에 일대일로 매핑하는 것이다.

이상의 방법들은 곡면전체에 대한 평가용으로 쓰기 보다는 국부적으로 이웃한 점들에 대한 상대적인 평가용으로 쓰기에 적합하다. 즉, 곡면의 어느 부분이 다른 어느 부분에 비하여 곡률분포의 변화정도가 심하다 그렇지 않다 등의 한 곡면 위에서의 상대적 평가와 또한 미세하게 곡면이 변형되었을 때, 변화된 곡면과 원래의 곡면사이의 변화정도를 확인할 수 있는 역할을 한다.

5.2 곡률망방법에 의한 평가

곡면 위의 곡률변화량(variations of curvatures)을 조사할 때, 대개 주곡률을 다루는데 이때 주곡률값(principal curvature) 뿐만 아니라 주곡률방향도 조사해 보아야 한다. 주곡률방향은 한 점에 대해 최대 주곡률방향(maximal principal direction)과 최소 주곡률방향(minimal principal direction)이 존재하는데 이 두 방향은 항상 서로 직교(orthogonal)한다. 이를 곡면 위에 나타낼 때, 두가지 방법으로 표시해 주는데 그 하나는 곡면 위에 규칙적인 격자점(grid)을 만들고 각 격자점에 대해서, 최대 주곡률방향과 최소 주곡률방향을 표시하는 것이다. 이때 곡면 위에 십자모양(+)이 나타나는데 그 십자모양의 한쪽은 최대 주곡률방향이 되고 다른 한쪽은 최소 주곡률방향이 된다. 이때 십자모양의 크기를 주곡률값에 비례해서 그린다면 방향과 그 크기를 동시에 가시화할 수 있다. 다른 하나는 주곡률방향만을 따라 표시하는 것인데 여기서는 그 시작점을 곡면의 외곽선상의 일정한 점들로 해서 그려나간다. 이때 한점에 대해서 두개의 곡선이 생기는데 하나는 최대 주곡률방향을 따라 그린것이고 다른

하나는 최소 주곡률방향을 따라가면서 그린것이다. 이와같이 곡면위에서 주곡률방향만을 따라가며 그린 곡선망을 곡률망(line of curvatures)이라고 한다. 이 곡률망은 곡면의 변화정도에 매우 민감하기 때문에, 미세한 곡면의 변화정도를 표시해 주는데 아주 유용하다. 위의 두가지 방법은 모두 곡면의 1차, 2차 미분값 그리고 이들의 조합 등의 변화를 표시해 주는데 그러지는 형상으로 곡면의 모양을 자세히 판단할 수가 있다. 즉 곡면의 모양이 일정하다면 그 곡면의 곡률망은 일정한, 규칙적인 모양을 가질 것이다. 하지만 곡면의 모양이 일정치 않고 미세하게 요동한다면 이 미세한 불규칙적인 곡면의 모양을 곧바로 반영하여 곡률망의 곡률선은 크게 꺾이거나 심한 흔들림현상을 가지게 된다.

5.3 촛점곡면(focal surface)방법에 의한 평가

곡면의 곡률분포는 에너지 분포와 관계가 깊다. 곡면의 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$E = \iint (k_1^2 + k_2^2) ||R_u \times R_v|| du dv$$

여기서, k_1, k_2 는 주곡률(principal curvatures)이고, R_u, R_v 는 각각 곡면을 u, v 방향으로 1차 편미분한 값이다.

일반적으로 곡면의 에너지 분포로 곡면의 질을 평가할 수 있다. 이때 에너지 분포는 촛점곡면(focal surface)을 이용하여 나타낼 수 있다. 촛점곡면¹¹⁾이란 주어진 곡면 위의 임의의 한 점에서 에너지를 계산하고 곡면의 법선벡터를 계산하여 그 점을 법선방향으로 에너지 양만큼 움직였을 때 생기는 점이 원래 초기곡면에 해당하는 촛점곡면 위의 한 점이 된다. 이와같이 초기곡면의 모든 점들에 대해서 법선방향으로 에너지 양만큼 움직였을 때 초기곡면의 에너지 상태를 나타내 주는 촛점 곡면을 얻을 수가 있다.

이러한 촛점 곡면은 곡면의 에너지 분포상태를 나타내 주기 때문에 곡면의 질을 평가하는 방법으로 사용될 수 있다.

6. 적용예

본 연구에서 사용한 최적화기법은 “Modified Method of Feasible Directions for Constrained Minimization”¹²⁾이다. 최적화시에 사용된 구속조건은 경계곡선의 고정 또는 경계곡선에서의 접선리본의 유지 등이다. 또한 사용자는 초기곡면과 가까운 최적의 곡면을 보장받기 위해 설계변수로서 사용한 조정점이 놓일 수 있는 가상의 영역을 부여할 수 있다. 여기서 사용한 곡면은 일반적으로 상용 곡면모델러에서도 많이 사용되는 NURBS이다.

본 연구에서는 적용예로서 서울대학교에서 개발한 곡면모델링 시스템을 가지고 모델링한 자동차 곡면들 중에서 일부곡면에 대해 페어링을 수행하고 그 결과를 앞에서 설명한 평가방법에 따라 분류하여 보겠다.

Fig.1은 자동차의 곡면들을 생성하기 위해 사용되었던 곡선들을 네가지 보는 각도에 따라 보인 것으로서 이 곡선들을 가지고 3차원 곡면을 생성한 후 적당한 곡면생성방법에 의해 자동차 곡면들을 생성하게 된다. 곡면이 생성된 결과는 Fig. 2에 나타내었다.

이와같이 생성된 자동차 곡면들 중 일부곡면 즉 자동차의 후드(hood)곡면, 헨더(fender)곡면, 라디에이터 그릴(radiator grill)곡면에 대해서 본 연구에서 개발한 페어링과정을 수행해 보았다. 그 결과는 Fig.3, 4, 5에 나타나 있다. Fig.3은 곡률망분포에 의한 평가방법에 의해 페어링 하기 전의 초기곡면과 페어링 후의 곡면을 평가하고 있다. 즉 Fig.3(a)는 페어링전의 초기곡면에 대해 최대주곡률방향을 따라 곡률선을 그린 것이고 Fig.3(b)는 페어링 후의 곡면에 대한 것이다. Fig.3의 (a)와 (b)를 비교해 볼때 (a)보다는 (b)의 경우가 자동차의 후드곡면, 헨더곡면, 라디에이터 그릴곡면의 기하학적 질이 개선되었음을 알 수 있다. 이는 곡률선의 분포가 (a)보다는 (b)의 경우가 가지런하고 규칙적이라는 사실로부터 쉽게 알 수 있다.

Fig.4는 자동차의 후드곡면을 가우시안 곡률분포의 색칠방법에 의해 평가한 것인데 왼쪽의 두

곡면보다는 오른쪽의 두 곡면이 색깔변화의 정도으로써 페어링의 효과를 확인해 볼 수 있다.

Fig.5은 Fig.4의 자동차 후드곡면에 대해서 촛점곡면에 의해 페어링결과를 평가한 것이다. Fig.5(a)의 왼쪽 곡면들은 페어링전의 초기 두 곡면과 이 곡면들의 촛점곡면을 보여주고 있다. 아래쪽의 곡면이 초기곡면이고 그 위에 나타나 있는 곡면들이 촛점곡면 즉 초기곡면의 에너지 분포상태를 나타내는 곡면이다. Fig.5(a)의 오른쪽 곡면들은 페어링 후의 곡면들과 이 곡면들에 대한 촛점곡면들을 나타내 준다. Fig.5(a)의 왼쪽 촛점곡면들과 오른쪽 촛점곡면들을 비교해 볼때, 오른쪽의 페어링된 곡면들의 에너지 분포상태가 왼쪽의 초기곡면들에 비해 안정된 상태임을 확인할 수 있다. 즉 왼쪽의 초기곡면들에 대한 촛점곡면들에서 경계부근에서의 변형에너지가 불규칙적으로 집중되어 있음을 알 수 있다. Fig.5(b)는 Fig.5(a)의 왼쪽의 두 초기곡면들과 오른쪽의 페어링된 두개의 곡면들을 빼고 따로 각각의 곡면들에 대한 촛점곡면들만을 보여주고 있다. 이로부터 페어링에 의해 변형에너지의 분포가 상당히 규칙적으로 변화됨을 알 수 있다.

이와같이 여러가지 평가방법에 의해서 초기곡면과 페어링 후의 곡면에 대해서 곡면의 기하학적 질을 평가해 보았을 때 본 연구에서 개발한 페어링 목적함수가 효과적임을 입증해 보일 수 있다.

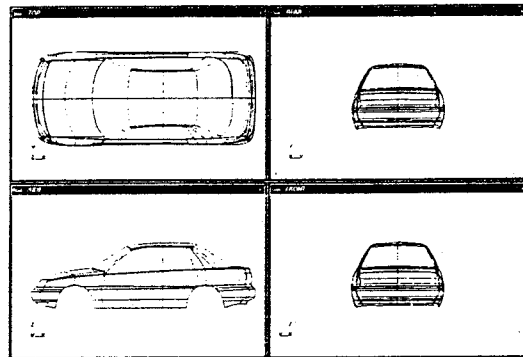


Fig.1 Curve net for generating the carbody surfaces

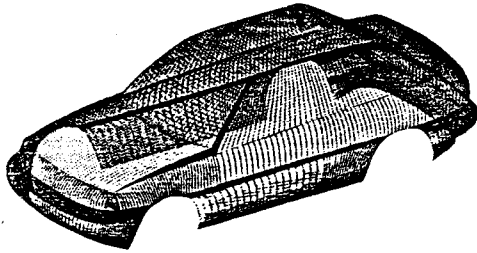


Fig.2 Surface model of the carbody

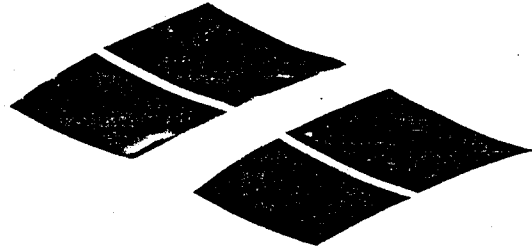
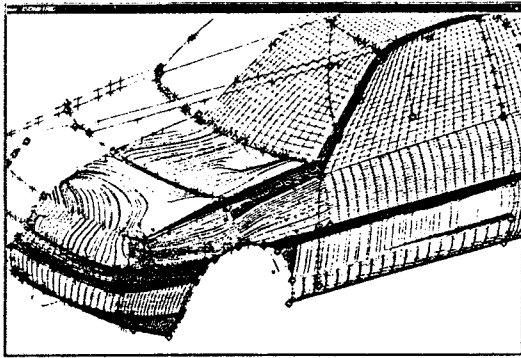
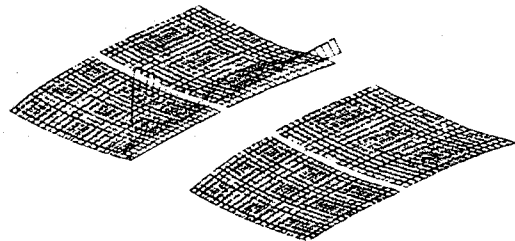


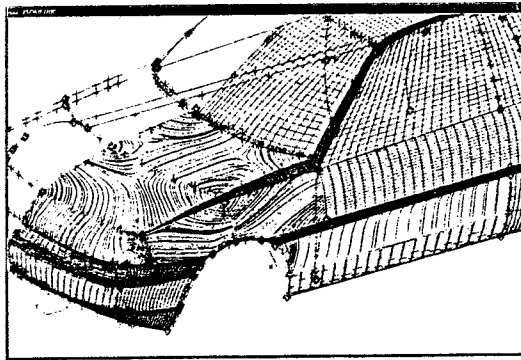
Fig.4 Colorful plots of Gaussian curvature for initial surfaces(left) and faired surfaces (right)



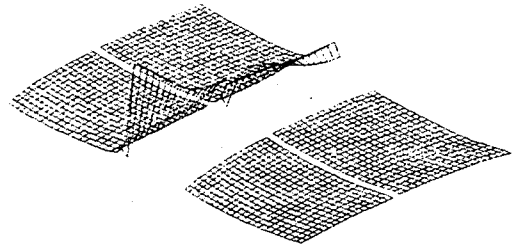
(a) initial surfaces



(a) initial(left) and faired(right) surfaces and their focal surfaces



(b) faired surfaces



(b) only focal surfaces

Fig.3 Maximal principal line of curvatures

Fig.5 Focal surfaces

7. 결 론

본 연구에서는 자동차, 배, 항공기 등의 외형을 위한 자유곡면 설계시에, 나타날 수 있는 곡면의 불순점 등을 찾아내고 이를 수정하여 곡면의 질(quality)을 향상시키는 기능을 개발하였다. 측정 데이터의 오류나 또는 곡면의 생성방법 등의 불안정성으로 생길 수 있는 곡면의 흠집 등은 대개 곡률의 불연속이나 곡률의 진동을 초래하므로, 이를 평가할 수 있는 함수를 세워 최소화한다면 곡면의 불순점은 제거될 것이다. 이를 위해 본 연구에서는 곡면의 법선벡터의 변화를 최소화하도록 하였다. 특히 본 연구에서는 자동적 페어링과 국부적 페어링이 가능하게 하고, 조정점의 3차원 공간상의 움직일 수 있는 해의 가상영역을 주어 페어링후의 곡면이 초기곡면에 가깝도록 페어링정도를 조절할 수 있게 하였다. 그리고 본 연구에서 제시한 목적함수는 곡면의 각 파라미터 방향으로 분리할 수가 있어 한 방향으로의 페어링 효과를 볼 수 있게 하였다. 또한 설계자에 의한 임의의 구속조건이 조정점에 대한 함수로 표현이 가능하다면 페어링시에 최적화 과정 중에 구속조건으로 작용하여 설계자의 요구를 만족시키는 최적의 결과를 기대할 수도 있을 것이다.

부 록

1. 곡면(Non Uniform Rational B-spline Surface)의 방정식

$$R(u,v) = \frac{R^h(u,v)}{h(u,v)}$$

여기서 $R^h(u, v)$ 는 호모지니어스(homogeneous)좌표계에서의 4차원 곡면이다. 그리고 $h(u, v)$ 는 다음과 같다.

$$h = \sum_i \sum_j h_{ij} N_i^u N_j^v$$

단, h_{ij} 는 조정점의 호모지니어스값이고

N_i^ku 는 Normalized B-spline function of order ku 이고

N_j^kv 는 Normalized B-spline function of order kv 이다.

2. 곡면의 미분 방정식

$$D_i^p = \frac{\partial^p}{\partial u^p}, D_j^q = \frac{\partial^q}{\partial v^q} \text{ 이고, } C_i = \frac{j!}{i!(j-i)!} \text{ 일 때}$$

순환적 미분식은 다음과 같다.

$$D_i^p D_j^q R = \frac{1}{h} \left[\begin{array}{l} D_i^p D_j^q R^h - \sum_{i'=1}^p C_i \sum_{j'=1}^q C_j (D_i^{i'} D_j^{j'} R) (D_i^{p-i'} D_j^{q-j'} h) \\ - \sum_{i'=1}^p C_i (D_i^{i'} D_j^q R) D_i^{p-i'} h \end{array} \right]$$

3. 곡면의 미분 방정식의 조정점에 대한 구배 (gradient) 단, 여기서 $h=1$ 을 가정한다. 즉 호모지니어스값은 항상 변하지 않는다.

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_0}} D_i^p D_j^q R = \frac{1}{h} \left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_{i_0}} D_i^p D_j^q R^h \\ - \sum_{i'=1}^p C_i \sum_{j'=1}^q C_j \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_0}} D_i^{i'} D_j^{j'} R \right) (D_i^{p-i'} D_j^{q-j'} h) \\ - \sum_{i'=1}^p C_i \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_0}} D_i^{i'} D_j^q R \right) D_i^{p-i'} h \end{array} \right]$$

4. 곡면의 미분 방정식의 호모지니어스값에 대한 구배 단, 여기서는 3차원 공간상의 좌표값은 고정시키고 호모지니어스값(h)에 대한 구배값 (gradient)을 구한다.

$$\frac{\partial}{\partial h_{i_0}} D_i^p D_j^q R = \frac{1}{h} \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} D_i^p D_j^q R^h \\ - \sum_{i'=1}^p C_i \sum_{j'=1}^q C_j (D_i^{i'} D_j^{j'} R) (D_i^{p-i'} D_j^{q-j'} h) \\ - \sum_{i'=1}^p C_i (D_i^{i'} D_j^q R) D_i^{p-i'} h \end{array} \right) \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} D_u^i D_v^j R^h - \\ \frac{1}{h} \left(\sum_{j=1}^q C_j \sum_{i=0}^p C_i (D_u^i D_v^{j-1} R) (D_u^{p-i} D_v^j h) \right) \frac{\partial h}{\partial h_{ij}} \\ - \sum_{i=1}^p C_i (D_u^{i-1} D_v^j R) D_u^i h \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial h_{ij}} D_u^i D_v^j R^h \\ - \sum_{j=1}^q C_j \sum_{i=0}^p C_i \left(\begin{array}{c} \left(\frac{\partial}{\partial h_{ij}} D_u^i D_v^{j-1} R \right) (D_u^{p-i} D_v^j h) \\ + (D_u^i D_v^{j-1} R) \left(\frac{\partial}{\partial h_{ij}} D_u^{p-i} D_v^j h \right) \end{array} \right) \\ = \frac{1}{h} \left(- \sum_{i=1}^p C_i \left(\begin{array}{c} \left(\frac{\partial}{\partial h_{ij}} D_u^{i-1} D_v^j R \right) (D_u^i h) \\ + (D_u^{i-1} D_v^j R) \left(\frac{\partial}{\partial h_{ij}} D_u^i h \right) \end{array} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial h_{ij}} \left(- \sum_{j=1}^q C_j \sum_{i=0}^p C_i (D_u^i D_v^{j-1} R) (D_u^{p-i} D_v^j h) \right) \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^p C_i (D_u^{i-1} D_v^j R) D_u^i h \right) \end{array} \right] \end{aligned}$$

5. 본 연구의 곡면페어링 목적함수와 조정점에 관한 구배식
 R을 부록 1절에서 정의한 곡면이라 할때 위의 부록 2절로부터 곡면의 파라미터에 관한 미분식을 구한다.

$$R_u = \frac{\partial R}{\partial u}, R_v = \frac{\partial R}{\partial v}, R_{uu} = \frac{\partial^2 R}{\partial u^2}, R_{uv} = \frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v}, R_{vv} = \frac{\partial^2 R}{\partial v^2}$$

이로부터 곡면의 법선벡터와 법선벡터의 파라미터에 관한 미분식을 구한다.

$$\begin{aligned} N &= R_u \times R_v \\ N_u &= \frac{\partial N}{\partial u}, N_v = \frac{\partial N}{\partial v} \\ N_u &= R_{uu} \times R_v + R_u \times R_{uv}, N_v = R_{uv} \times R_u + R_u \times R_{vv} \end{aligned}$$

또한, 곡면의 단위법선벡터의 각 방향으로의 미분식도 구한다.

$$\begin{aligned} n &= \frac{N}{\|N\|}, n_u = \frac{\partial n}{\partial u}, n_v = \frac{\partial n}{\partial v} \\ n_u &= \frac{N_u}{\|N\|} - \frac{N \cdot N_u}{\|N\|^3} N, n_v = \frac{N_v}{\|N\|} - \frac{N \cdot N_v}{\|N\|^3} N \end{aligned}$$

본 연구의 페어링 목적함수는 다음과 같다.

$$\iint (n_u \cdot n_u + n_v \cdot n_v) \|N\| dudv$$

위의 목적함수의 조정점에 관한 구배식은 다음과 같다. 단, 여기서는 조정점의 u방향으로 i번째, v방향으로 j번째에 해당하는 조정점의 좌표값인 x_{ij}에 관한 구배식만을 전개하겠다. y_j와 z_j에 관한 구배식도 마찬가지로이다.

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\iint (n_u \cdot n_u + n_v \cdot n_v) \|N\| dudv \right)$$

$$= \iint \left(\begin{array}{c} \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}} (n_u \cdot n_u + n_v \cdot n_v) \right) \|N\| \\ + (n_u \cdot n_u + n_v \cdot n_v) \frac{\partial \|N\|}{\partial x_{ij}} \end{array} \right) dudv$$

위의 페어링 목적함수와 목적함수의 구배식은 곡면의 면적분(area integral) 형태이다. 즉, $\|N\| dudv$ 이 미소면적(differential area)을 의미한다. 여기서

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} (n_u \cdot n_u) = 2n_u \cdot \frac{\partial n_u}{\partial x_{ij}} \text{을 구할 때}$$

$\frac{\partial n_u}{\partial x_{ij}}$ 만을 전개하겠다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_u}{\partial x_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(\frac{N_u}{\|N\|} - \frac{(N \cdot N_u)N}{\|N\|^3} \right) \\ &= \frac{\left(\frac{\partial N_u}{\partial x_{ij}} \right) \|N\| - N_u \left(\frac{\partial \|N\|}{\partial x_{ij}} \right)}{\|N\|^2} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial((N \cdot N_u)N)}{\partial x_{ij}} \right) \|N\|^3 - (N \cdot N_u)N \frac{\partial \|N\|^3}{\partial x_{ij}}}{\|N\|^5} \end{aligned}$$

여기서 다음의 4개의 식 (1), (2), (3), (4)을 이용하여 전개한다.

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial N_u}{\partial x_{ij}} &= \frac{\partial R_{uv}}{\partial x_{ij}} \times R_v + R_{uv} \times \frac{\partial R_v}{\partial x_{ij}} \\ &\quad + \frac{\partial R_{uw}}{\partial x_{ij}} \times R_w + R_{uw} \times \frac{\partial R_w}{\partial x_{ij}} \\ (2) \quad \frac{\partial \|N\|}{\partial x_{ij}} &= \frac{N}{\|N\|} \cdot \frac{\partial N}{\partial x_{ij}} \\ (3) \quad \frac{\partial((N \cdot N_u)N)}{\partial x_{ij}} &= \frac{\partial(N \cdot N_u)}{\partial x_{ij}} N + (N \cdot N_u) \frac{\partial N}{\partial x_{ij}} \\ (4) \quad \frac{\partial \|N\|^3}{\partial x_{ij}} &= 3\|N\| \left(N \cdot \frac{\partial N}{\partial x_{ij}} \right) \\ &= \frac{1}{\|N\|} \frac{\partial N_u}{\partial x_{ij}} - \frac{N_u}{\|N\|^2} \left(\frac{N}{\|N\|} \cdot \frac{\partial N}{\partial x_{ij}} \right) \\ &= \frac{1}{\|N\|^3} \left(\frac{\partial((N \cdot N_u)N)}{\partial x_{ij}} \right) + \left(\frac{(N \cdot N_u)N}{\|N\|^5} \right) \left(3\|N\| \left(N \cdot \frac{\partial N}{\partial x_{ij}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\|N\|} \frac{\partial N_u}{\partial x_{ij}} - \frac{1}{\|N\|^2} \left(\frac{\partial((N \cdot N_u)N)}{\partial x_{ij}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{N_u}{\|N\|^2} + \frac{3(N \cdot N_u)N}{\|N\|^3} \right) \left(N \cdot \frac{\partial N}{\partial x_{ij}} \right) \end{aligned}$$

위와같은 식에 의해 목적함수와 x_{ij} 에 관한 목적함수의 구배식은 구해진다. 여기서 i 의 범위는 페어링하고 싶은 곡면의 영역에 관련된 모든 조정점에 대해 u 방향 첨자의 시작과 끝이고 j 는 v 방향 첨자의 시작과 끝이다.

참 고 문 헌

1. E. Andersson and R. Andersson, "Automatic construction of surface with prescribed shape", Computer Aided Design, Vol 20, No 6, pp.317-324, 1988
2. T. Poeschl, "Detecting surface irregularities using isophotes", Computer Aided Geometric Design, Vol 11, pp.163-168, 1984
3. J. Hoschek, "Detecting regions with undesirable curvature", Computer Aided Geometric Design, Vol 1, pp.183-192, 1984
4. J. Hoschek, "Smoothing of curves and surfaces", Computer Aided Geometric Design, Vol 2, pp.97-105, 1985
5. P. Brunet, "Increasing the smoothness of bicubic spline surfaces", Computer Aided Geometric Design, Vol 2, pp.157-164, 1985
6. H. Hagen and G. Schulze, "Automatic smoothing with geometric surface patches", Computer Aided Geometric Design, Vol 4, pp.231-235, 1987
7. M. Kallay and B. Ravani, "Optimal twist vectors as a tool for interpolating a network of curves with a minimum energy surface", Computer Aided Geometric Design, Vol 7, pp.465-473, 1990
8. D. R. Ferguson, P. D. Frank and A. K. Jones, "Surface shape control using constrained optimization on the B-spline representation", Computer Aided Geometric Design, Vol 5, pp.87-103, 1988
9. N. J. Lott and D. I. Pullin, "Method for fairing B-spline surface", Computer Aided Design, Vol 20, No 10, pp.594-604, 1988
10. R. E. Barnhill, G. Farin, L. Fayard and H. Hagen, "Twists, curvatures and surface interrogation", Computer Aided Design, Vol 20, No 6, pp.341-346, 1988

11. H. Hagen, S. Hahnmann, T. Schreiber, Y. Nakajima, B. Wordenweber and P. Hollemann-Grundstedt, "Surface interrogation algorithms", IEEE Computer Graphics & Applications, Vol 12, No 5, pp.53-60, 1992
12. D. M. Himmelblau, Applied Nonlinear Programming, McGraw Hill, 1972
13. 민승재, "3차원 측정 데이터를 이용한 자동차 차체의 모델링 시스템개발", 석사 학위 논문, 서울대학교 기계설계학과, 1991
14. 이상찬, "자동차 외형설계를 위한 CAD시스템의 개발", 박사 학위 논문, 서울대학교 기계설계학과, 1992