

초소형 밀폐형 이상 써모사이폰 기포의 거동에 관한
해석적인 연구

Analytical Study on the Behavior of the Bubble in the
Micro Two-Phase Closed Thermosyphon

이윤표* · 이영수** · 이 영***
Y. P. Lee, Y. S. Lee, Y. Lee

Key words : Micro Two-Phase Closed Thermosyphon (초소형 밀폐형 써모사이폰),
Bubble(기포), Analysis(해석), Surface Tension(표면장력)

Abstract

The rise of a large gas bubble or slug in a Micro Two-Phase Closed Thermosyphon with a thin wire insert has been analiged by the potential flow theory. The effect of the interfacial surface tension is explicitly accounted by application of the Kelvin-Laplace equation and solved for the bubble shape. The solution is expressed in terms of the Stokes stream function which consists of an infinite series of Bessel functions.

The conditions of the bubble movement in a Micro Two-Phase Closed Thermosyphon were theoretically ascertained.

기호 설명

g : 중력가속도
 J_1 : 1차 Bessel 함수
 H : 액체-기체의 경계면
 $MTPCT$: 초소형 밀폐형 써모사이폰
 P : 압력
 u : z 방향 속도
 U : 기포의 상승 속도
 v : r 방향 속도
 V : 속도의 스칼라량
 Y_1 : 2차 Bessel함수
 Z : 기포의 표면을 나타내는 함수

δ : 고유값(eigen value)
 Ψ : 유동함수
 ρ : 밀도
 σ : 표면장력
하첨자
 b : 기포 표면의 임의 점
 s : 기포의 정점
 o : 써모사이폰의 벽면
 i : 삼입되는 와이어의 벽면

1. 서 론

히트파이프는 히트파이프내 작동유체의 잠열로 열을 전달하는 열전달 기기로서 폐열회수, 기기의 냉각 등 공조분야에 널리 사용되어 왔다. 히트파이프는 그 특성상 별도의 동력이 필요없이 열을 전달하므로 크기의 제약을 받는 소형 기기, 특히 전자

그리스 문자

α : 계수 ($\alpha = \frac{R_i}{R_o}$)

*정회원, 한국과학기술연구원 열유체공학연구소

**정회원, 한국에너지기술연구소 폐열이용 연구팀

***Univ. of Ottawa, Dept. of Mechanical Eng., Canada

기기의 냉각에 주로 적용되고 있다. 그러나 최근 냉각대상이 되는 전자기기가 소형화됨에 따라 소형 히트파이프의 개발이 요구되었다. 소형 히트파이프에 대하여서는 T.P. Cotter⁽¹⁾가 1984년에 처음으로 소형 전자기기의 냉각에 응용될 수 있는 초소형 히트 파이프(Micro Heat Pipe)의 개념을 제시하였다. T.P. Cotter는 초소형 히트파이프란 Fig. 1과 같이 크기가 매우 작아 히트파이프내 액체와 기체의 평균 곡률반경의 크기가 히트파이프 자체 수력 반경의 역수와 거의 같은 크기의 히트파이프라고 정의하였다.

이후 B.R. Babin⁽²⁾등 히트파이프의 작동에 관계된 이론을 제시하였으며 이론적으로 유도된 식과 실험을 비교하였다. 이 실험에서 초소형 히트파이프는 지름이 매우 작으므로 별도의 워크없이 초소형 히트파이프 자체의 모서리가 일종의 워크의 역할을 하도록 제작되었다. 그러나 이와 같은 초소형 히트파이프를 제작하기란 간단하지 않다.

지구와 같은 중력장에서는 작동유체의 복원력으로 중력이 이용될 수 있으므로 워크는 복원력의 보조적인 역할을 수행하거나 작동유체를 증발부에 끌고루 펼치는 역할 등을 하는 경우가 많다. 따라서 응축된 작동유체의 복원력에 워크에 의한 모세관 현상을 이용하지 않는 Fig. 2(a)와 같은 형태를 일

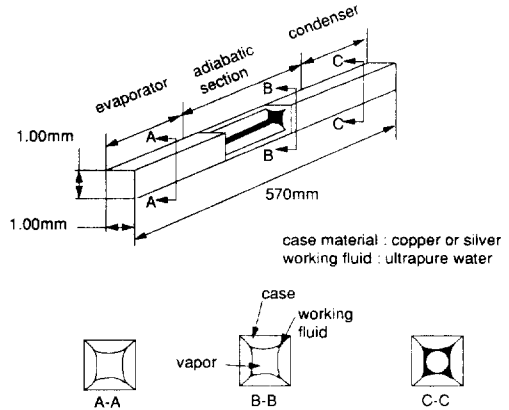


Fig. 1 Trapezoidal Micro Heat Pipe

반 히트파이프와 구분하여 워크가 없는 히트파이프(Wickless Heat Pipe) 또는 밀폐형 이상 써모사이폰(Two-Phase Closed Thermosyphon)이라고도 한다. 그러나 소형 밀폐형 이상 써모사이폰을 유리로 제작하여 관찰하여 보면 써모사이폰 자체의 지름이 점차 줄어들며 따라 상승하고 있는 기포가 전체 지름을 차지하게 되며 기포의 주위로 기포가 액체를 밀어내면서 상승하는 현상을 관찰할 수 있다.⁽³⁾ 이와 같이 기포에 의하여 밀려져 내린 액체

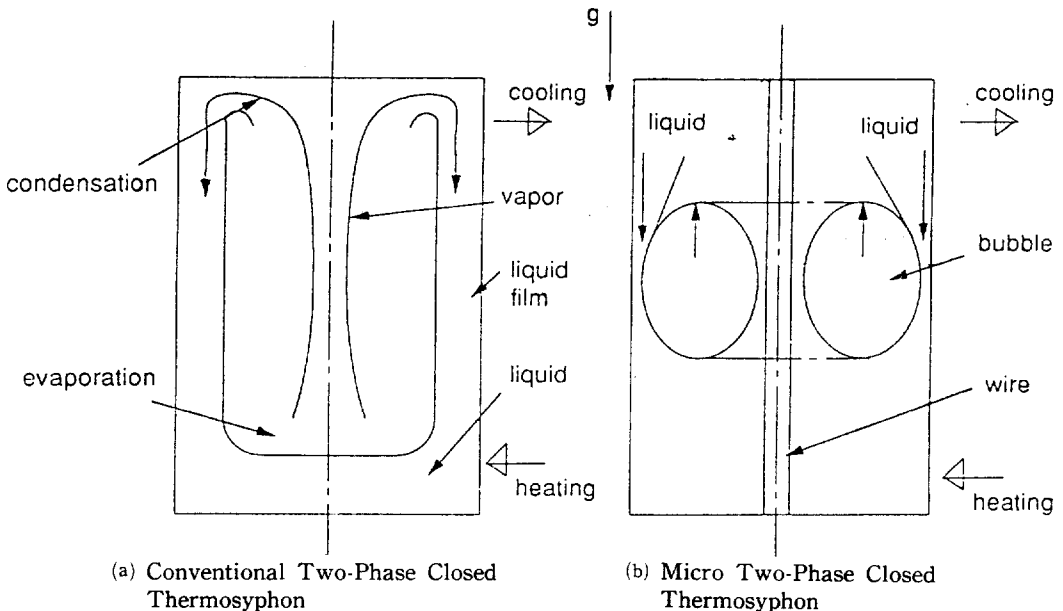


Fig. 2 Working mechanism of the different Two-Phase Closed Thermosyphons.

가 증발부로 복원하여 열전달이 지속적으로 일어나게 된다. 그러나 써모사이폰자체의 지름이 더욱 작아지면 기포가 더 이상 움직이지 않게됨을 관찰할 수 있는데 이와같이 액막이 증발부로 다시 복원하지 않을 때 면이 말라버리는 (dry out) 현상이 일어나게 된다. 이때 써모사이폰내에 가는 와이어를 삽입하면 기포가 다시 움직이게 됨을 관찰할 수 있으며 열의 수송도 가능하게 된다. 이와 같이 일반 밀폐형 이상써모사이폰과 달리, 가는 와이어를 삽입하여야 비로서 작동이 가능한 Fig. 2(b)의 밀폐형 이상 써모사이폰을 초소형 히트 파이프와 구분하여 초소형 밀폐형 이상 써모사이폰(Micro Two-Phase Closed Thermosyphon)이라 부르기로 하며 여기서는 MTPCT로 약해서 쓰기로 한다.

본 논문에서는 이와 같이 가는 와이어가 삽입된 MTPCT 내에서 작동유체의 종류와 삽입되는 와이어의 지름이 기포의 거동에 미치는 영향을 해석적으로 규명하였다.

2. 해 석

가는 와이어가 삽입된 MTPCT를 유리로 제작하여 한쪽 부위를 약간 가열하면 MTPCT내부에 생성된 기포가 상승하는 것을 관찰할 수 있다. 일단 형성된 기포는 가열이 아니라도 MTPCT의 상하 위치를 바꾸면 상승한다. 이와 같이 상승하고 있는 기포를 확대하면 Fig. 2(b)와 같이 두 개의 동심원관 사이에 도너츠 형태의 기포가 상승하는 형태이다. 이와 같은 형태의 기포의 상승에 관한 해석은 문헌에서 발견하기 어렵다. 다만 H.V. Nickens⁽⁴⁾ 등이 액체가 가득찬 수직 튜브에서 상승하고 있는 기포의 거동을 해석적으로 규명한 예가 있을 뿐이다. H.V. Nickens는 포텐셜 방정식으로부터 기포의 상승속도를 유도하였는데 이 결과를 약간 보정하여 점성효과를 반영하였다. 본 논문에서는 이와 같이 가는 와이어가 삽입된 MTPCT내의 기포의 거동을 해석함에 있어 액체가 가득차 있는 수직 튜브에 가는 와이어가 삽입되어 있는 경우, 상승하고 있는 기포의 거동으로 간략화하여 모사하였다. H.V. Nickens의 논문에서 튜브의 직경이 거의 0에 가까운 구조외에는 점성의 영향은 무시할 수 있다고 보고하였다. 본 연구의 해석 대상이 매우 작은 구조이므로 점성의 효과가 중요하리라 간주된다. 그러나 점성을 본 해석에 포함시켜서는 해석적인

풀이가 사실상 어려우므로 수직 튜브와 삽입되는 와이어와의 간격이 매우 작은 경우를 해석에서 제외함으로써 해석에서 점성의 효과가 미치는 영향을 최소화 하였다. 또한 MTPCT에 열을 가했을 때 기포가 상승하기 시작하는 이유는 온도의 상승으로 인한 물성치의 변화 때문이라는 가정하에 본 연구에서는 해석적인 풀이가 가능하도록 하기 위하여 결과식에 물성치를 변화시키므로써 온도의 영향을 반영하였다.

Fig. 3은 와이어가 삽입된 MTPCT의 수직단면도이다. 기포의 형상을 축대칭이라 가정하여 한쪽 단면만을 고려하였다. 좌표계는 원통좌표계를 채택하였고 원주방향에 대하여 내부 와이어의 중심을 $r=0$ 인 기준으로 하였으며 z 축의 양의 방향을 상승하고 있는 기포의 진행방향과 일치시켰다.

기포의 상승속도와 관계된 지배방정식은 기포의 거동과 관계된 Bernoulli 방정식 및 기포의 형상과 관계된 Kelvin-Laplace 방정식이다. 좌표계는 U_s 로 상승하고 있는 기포를 기준으로한 이동좌표계를 채택하였으며 기포의 정점을 정체점(stagnation point)으로 취급하였다. 여기서 R_i 는 삽입되는 와이어의 반경이며 R_o 는 MTPCT 자체의 반경이다. 해석의 편의를 위하여 다음과 같은 가정을 도입하였다.

(i) 튜브의 상부는 막혀져 있다고 가정하면 상승하고 있는 기포를 기준으로 한 이동 좌표계에서

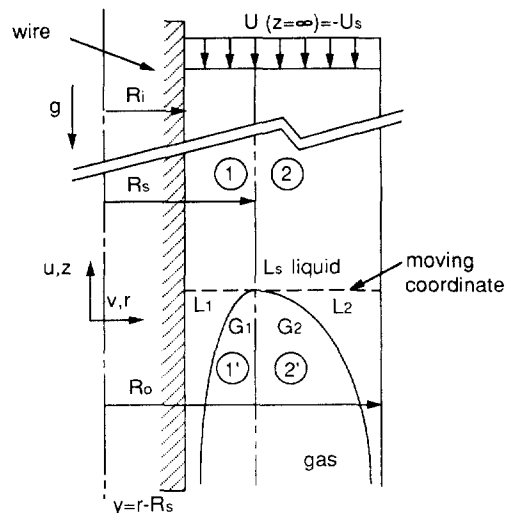


Fig. 3 Coordinate system chosen for a gas slug rising in a Micro Two-Phase Closed Thermosyphon

U_s 로 상승하고 있는 기포에 대한 속도의 경계조건은 다음과 같다.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u(r, z) = -U_s$$

(ii) $v(R_i, z) = v(R_o, z) = 0$: 고체벽면에서

(iii) $u(R_s, 0) = v(R_s, 0) = 0$, 기포의 정점이 정체점이므로

(iv) 기체와 액체의 경계면은 유동함수표면(Stream surface)이다. 따라서 경계면에서의 액체의 수직성분은 0가 된다. 또한 접선방향의 액체의 속도는 기포내부의 기체의 속도와 일치한다.

(v) 액체와 기체의 경계면에서 압력관계식은 Kelvin-Laplace 표면장력관계식으로 표현될 수 있다.

기체 및 액체의 경계면(1-1', 2-2')은 유동함수표면이므로 액체측에서의 Bernoulli 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_{L1} + \frac{1}{2} \rho_{L1} V_{L1}^2 + \rho_{L1} g z = P_{Ls} \quad (1a)$$

$$P_{L2} + \frac{1}{2} \rho_{L2} V_{L2}^2 + \rho_{L2} g z = P_{Ls} \quad (1b)$$

기체측에서는 다음과 같다.

$$P_{G1} + \frac{1}{2} \rho_{G1} V_{G1}^2 + \rho_{G1} g z = P_{Gs} \quad (2a)$$

$$P_{G2} + \frac{1}{2} \rho_{G2} V_{G2}^2 + \rho_{G2} g z = P_{Gs} \quad (2b)$$

경계면에서 압력관계식은 Kelvin-Laplace 방정식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_G = P_L + \frac{\sigma}{r_p} \quad (3)$$

여기서 r_p 는 기포의 경계면위에 있는 임의의 점 P에서의 곡률반경이다. 식 (1)~(3)에서 기체와 액체의 속도를 같다고 놓으면 다음과 같은 식을 유도할 수 있게 된다.

$$T_1(r, z) = u_p^2 + v_p^2 + 2gz + 2\lambda(K - K_s) = 0 \quad (4)$$

위에서

$$\lambda = \frac{\sigma}{\rho_L - \rho_G}, \quad K = -\frac{1}{r_p}$$

기체-액체 경계면에서 속도의 수직성분이 0라는 조건으로부터 다음과 같은 식을 쓸 수 있다.

$$\bar{V}_1 \cdot \nabla H = 0 \quad (5)$$

여기서 $H(r, z) = Z(r) - z = 0$ 은 액체-기체 경계면을 정의 하며 \bar{V}_1 은 경계면에서 액체의 속도벡터이다.

또한 $z = Z(r)$ 경계면에서 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$T_2(r, z) = v \frac{dZ(r)}{dr} - u = 0 \quad (6)$$

식(4) 및 (6)은 경계조건 (iv) 및 (v)를 나타낸다. 또한 식(4)에서의 K 와 액체-기체 경계면을 나타내는 함수 $Z(r)$ 과의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K(r) = \frac{rZ'' + [1 + Z'^2]Z'}{r[1 + Z'^2]^{3/2}} \quad (7)$$

반경 R인 밀폐된 수직 파이프 내부에서 상승하고 있는 기포 주위의 정상 상태 층류유동에 대한 Stokes 유동함수는 Collins⁽⁵⁾(1978)에 의해 유도되었다. 본 논문에서는 Collins의 식을 응용하여 내부에 가는 와이어를 삽입한 MTPCT에서 상승하고 있는 기포 주위의 정상상태 층류유동을 다음과 같이 변형하여 나타내었다.

$$\Psi(r, z) = \left[\frac{1}{2}(r^2 - R^2) - r \sum_{n=1}^{\infty} \{d_n J_1(\delta_n r) + g_n Y_1(\delta_n r)\} \exp(-\delta_n z) \right] U_s \quad (8)$$

반경방향과 축방향 속도 성분은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$v(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -U_s \left(\frac{\partial B_{10}}{\partial z} + \frac{\partial C_{10}}{\partial z} \right) \quad (9a)$$

$$u(r, z) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = U_s \left(\frac{B_{10} + C_{10}}{r} + \frac{\partial(B_{10} + C_{10})}{\partial r} - 1 \right) \quad (9b)$$

속도에 대한 경계조건 (ii) 및 (iii)으로부터 고유값 δ_n 을 구할 수 있다.

식(4), (6)에 의해 정의된 T_1, T_2 함수는 기체-액체의 경계면에서 항상 0가 되므로 경계면에서의 전미분(Total Derivative)의 모든 차수도 항상 0가 된다.

경계면을 나타내는 함수 $T(r, z)$ 의 경계면을 따른 2차 미분 값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{D^2 T}{D r^2} \right)_s = (T_{20} + T_{01} Z_2)_s = 0 \quad (10)$$

위의 Z_2 를 식(6)의 T_2 를 이용하여 다음과 같이 나

타낼 수 있다.

$$(Z_2)_s = \left(\frac{u_{20}}{2v_{10} - u_{01}} \right) s \quad (11)$$

식(7)을 이용하여 다음과 같이 되며

$$K_2(r)_s = Z_4 - 3Z_2^3 - 2\frac{Z_2}{R_s^3} + \frac{Z_3}{R_s} \quad (12)$$

최종적으로 식(10)에 식(4)를 대입하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$(T_{20} + T_{01}Z_2)_s = 2(v_{10}^2 + gZ_2 + \lambda K_2)_s = 0 \quad (13)$$

식(13)에 v_{10} , Z_2 , K_2 등을 대입하면 다음과 같이 U_s 의 식으로 나타내지는데 이에 대한 자세한 유도 과정은 부록에 실기로 한다.

$$U_s = \sqrt{\frac{3Z_2^3 + 2\frac{Z_2}{r^2} - \frac{Z_3}{r}Z_4}{\{B_{02} + C_{02} - (B_{11} + C_{11})/r\}^2}} \quad r = R_s \quad (14)$$

MTPCT의 지름이 작아지거나 와이어의 크기에 따라 식(14)의 root 내부가 음의 부호가 되어 계산이 안되는 영역이 나타나는 데 이 구조에서는 더이상 기포가 상승하지 않음을 의미한다.

3. 계산결과 및 검토

Fig. 4는 작동유체가 물인 경우에 대하여 MTPCT의 튜브 반경을 2, 3, 4, 5 mm로 변화시켰을 경우에 대한 MTPCT 내의 기포(20°C)의 상승속도 U_s 를 계산한 것이다.

α 는 MTPCT에 삽입된 와이어 반경과 튜브반경

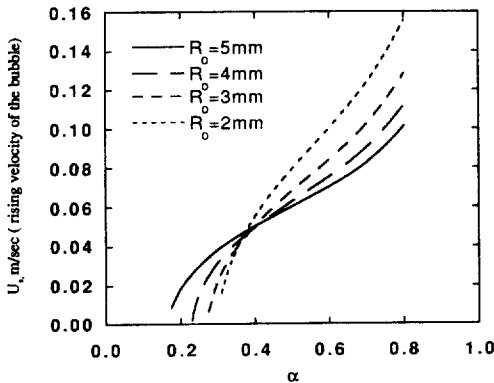


Fig. 4 Calculated rising velocity of the bubble in the MTPCT(working fluid: Water, $\alpha = \frac{R_i}{R_o}$)

과의 비이다. α 가 0.5라 함은 튜브 반경이 2 mm 일 경우 삽입되는 와이어의 반경이 1 mm에 상당한다.

α 가 0에 가까와 감은 삽입되는 와이어의 반경이 작아짐을 의미하며 0이 될 때는 와이어가 삽입되지 않는 것에 상당한다. 튜브의 반경이 2 mm인 경우는 튜브의 반경 5 mm인 경우보다 α 에 대하여 민감하게 변화한다. α 가 0.4에서는 기포의 상승속도가 5 cm/sec로 거의 일치한다. 그러나 튜브의 반경이 2 mm인 경우, 삽입되는 와이어의 반경이 0.7 mm 이하에서는 기포의 상승속도가 0가 되는, 즉 기포가 상승하지 않는 영역이 나타난다. 그러나 튜브의 반경이 3 mm, 4 mm, 5 mm로 커지면 삽입되는 와이어의 크기가 더 작아져도 기포는 상승하게 된다.

Fig. 5는 작동유체가 메탄올인 경우에 대하여 MTPCT의 튜브 반경을 1, 2, 3, 4, 5 mm로 변화시켰을 경우에 대한 MTPCT 내의 기포 (20°C)의 상승속도 U_s 를 계산한 것이다. 작동유체가 물인 경우와 마찬가지로 튜브의 반경이 1 및 2 mm인 경우는 튜브의 반경 5 mm인 경우보다 α 에 대하여 민감하게 변화한다. α 가 0.4 근처에서 기포의 상승속도가 약 4 cm/sec로 거의 일치하는 현상은 비슷하나 튜브의 반경 4 mm 및 5 mm인 경우에는 와이어의 반경을 0으로 줄여도 기포가 정지하는 점이 나타나지 않았다. 이 뜻은 MTPCT에서 메탄올이 작동유체인 경우에는 튜브의 반경이 4 mm 이상에서는 와이어를 삽입하지 않아도 기포가 움직이므로 와이어를 삽입하지 않고 MTPCT를 제작할 수 있

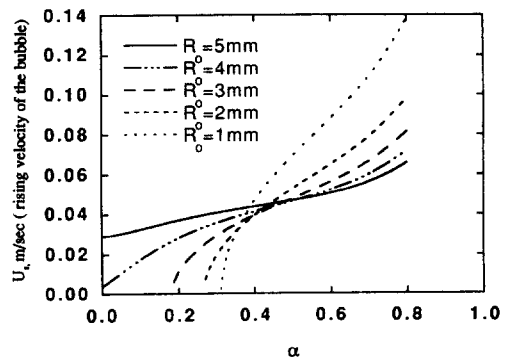


Fig. 5 Calculated rising velocity of the bubble in the MTPCT(working fluid: Methanol, $\alpha = \frac{R_i}{R_o}$)

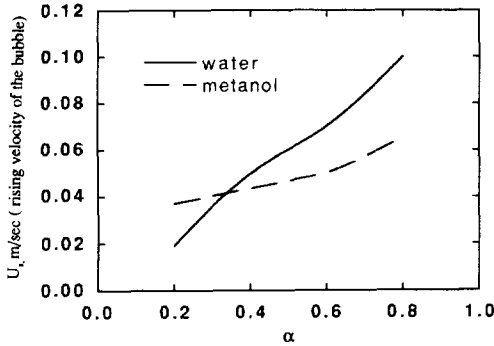


Fig. 6 Effect of Fluid on U_s: Water vs Methanol

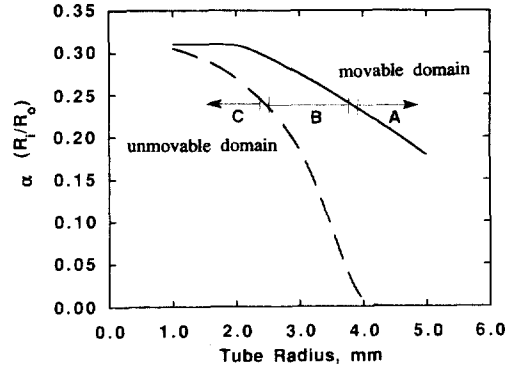


Fig. 7 Movable domain of the bubble in the MTPCT depending on the working fluids.

다는 뜻이 된다.

Fig. 6은 MTPCT의 튜브 반경이 5 mm인 동일한 MTPCT에서 삽입되는 와이어의 크기 변화에 따른 기포의 상승속도를 메탄올과 물에 대하여 비교한 것이다. 삽입되는 와이어의 크기가 변화하면 물인 경우에는 기포의 상승속도가 민감하게 변화하나 메탄올인 경우에는 그다지 변화하지 않았다.

Fig. 4 및 Fig. 5의 결과에서 물 및 메탄올의 경우에 대하여 기포가 상승하는 영역을 규정할 수 있는데 이 경계를 연결하면 Fig. 7과 같게 된다. Fig. 7에서 A 지역은 작동 유체가 물이나 메탄올에 관계없이 MTPCT가 작동하는 영역이며 B 지역은 메탄올은 작동하나 물이 작동유체인 경우에는 작동하지 않는 경우이다. 또한 C 지역은 물, 메탄올 모두 작동하지 않는 영역이다. 예를 들어 MTPCT의 반경 4 mm이고 삽입되는 와이어 반경 0.8 mm 경우 즉 와이어와 튜브의 반경의 비인 α가 0.2인 경우에는 Fig. 7에서 B의 영역에 해당하게 된다. 이 경우 작동유체가 물에서는 와이어를 삽입하여도 기포가 상승하지 않으나 작동유체가 메탄올인 경우에는 와이어를 삽입하면 기포가 상승하게 되므로 MTPCT가 작동가능하게 된다고 할 수 있다. Fig. 7의 결과는 이미 보고된 실험결과³⁾와 비교할 만하다. 이영수³⁾ 등은 밀폐형 이상 써모싸이폰을 제작하여 다음과 같은 실험 결과를 얻었다고 보고하였다. 즉 작동유체를 물로 하는 반경 1.7 mm의 써모싸이폰을 제작하였으나 정상적인 작동이 되지 않았는데 가는 와이어를 삽입하여 제작하니 정상적인 작동이 되었다고 보고하였다. 작동유체를 메탄올로 바꾸니 작동이 가능하였다고 보고하였다. 이와 같이 지름이 1.2 mm, 0.9 mm, 0.5 mm의 초소형 밀

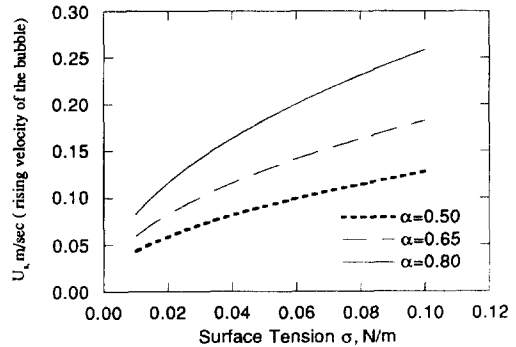


Fig. 8 Effect of the surface tension on the rising velocity of the bubble in the MTPCT (R_o=1 mm)

폐형 써모싸이폰도 내부에 가는 와이어를 삽입하고 작동유체가 메탄올인 경우 구동이 가능하였다고 보고하였다. 따라서 이영수³⁾ 등의 실험결과는 Fig. 7의 결과와 정성적으로 일치하고 있다.

Fig. 8은 표면장력이 기포의 상승속도에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 반경을 1 mm로 고정하였을 때 삽입되는 기포의 상승속도는 표면장력이 커짐에 따라 증가하는데 삽입되는 와이어의 반경이 0.8 mm가 0.5 mm보다 급격하게 변화함을 보여준다. 그러나 와이어의 지름이 0.3 mm 이하일 때는 계산된 범위의 표면 장력의 작동유체에서는 기포는 상승하지 않는다.

4. 결 론

내부에 와이어가 삽입된 초소형 밀폐형 이상 써

모싸이폰 내부의 기포의 거동에 관한 해석적인 해로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 작동유체가 물인 경우, 튜브의 반경이 2 mm 인 경우에는 삽입되는 와이어의 반경이 0.7 mm 이하에서는 기포가 상승하지 않으며 튜브의 반경이 3 mm, 4 mm, 5 mm로 커지면 삽입되는 와이어의 크기가 더 작아져도 기포는 상승하게 된다.

(2) 튜브의 반경이 2 mm인 경우는 튜브의 반경이 5 mm인 경우보다 α 에 대하여 민감하게 변화한다. α 가 0.4에서는 기포의 상승속도가 5 cm/sec로 거의 일치한다.

(3) 작동유체가 메탄올인 경우에 대하여 MTPCT의 튜브 반경을 1, 2, 3, 4, 5 mm로 변화시켰을 경우 튜브의 반경이 1 및 2 mm의 경우는 튜브의 반경 5 mm인 경우 보다 α 에 대하여 민감하게 변화한다. α 가 0.4근처에서 기포의 상승속도가 약 4 cm/sec로 거의 일치하는 현상은 비슷하나 튜브의 반경 4 mm 및 5 mm인 경우에는 와이어를 삽입하지 않아도 기포가 움직인다.

(4) 삽입되는 와이어의 크기가 변화하면 물인 경우에는 기포의 상승속도가 민감하게 변화하나 메탄올인 경우에는 그다지 변화하지 않았다.

(5) 물 및 메탄올의 경우에 대하여 기포가 움직이지 않게 되는 조건을 찾아낼 수 있다.

Harrison, D., 1978, "The motion of a large gas bubble rising through liquid flowing in a tube," J. Fluid Mech., 89, pp. 497~514.

부 록

기포의 상승속도에 관한 식의 상세한 유도과정은 다음과 같다.

$$\Psi(r, z) = \left[\frac{1}{2}(r^2 - R^2) - r \sum_{n=1}^{\infty} \{d_n J_1(\delta_n r) + g_n Y_1\} \exp(-\delta_n z) \right] U_s \quad (A-1)$$

위의 식에서 U_s 는 기포의 상승속도이며, d_n 과 g_n 은 상수이다. 또한 J_1 과 Y_1 은 1차 및 2차 Bessel 함수를 나타낸다. R 는 삽입된 와이어의 반경이다. 편의상 다음과 같은 정의를 이용하면

$$B_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \delta_n^i J_i(\delta_n r) \exp(-\delta_n z)$$

$$C_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \delta_n^i Y_i(\delta_n r) \exp(-\delta_n z)$$

식(A-1)는 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\Psi(r, z) = \left[\frac{1}{2}(r^2 - R^2) - r B_{10} - r C_{10} \right] U_s \quad (A-2)$$

반경방향과 축방향 속도 성분은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$v(r, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -U_s \left(\frac{\partial B_{10}}{\partial z} + \frac{\partial C_{10}}{\partial z} \right)$$

$$u(r, z) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = U_s \left(\frac{B_{10} + C_{10}}{r} + \frac{\partial(B_{10} + C_{10})}{\partial r} - 1 \right) \quad (A-3)$$

Bessel 함수의 물성치로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial r} = B_{i-1,j+1} - \left(\frac{i}{r} \right) B_{ij}$$

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial z} = -B_{i,j+1}$$

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial r} = C_{i-1,j+1} - \left(\frac{i}{r} \right) C_{ij}$$

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial z} = -C_{i,j+1}$$

따라서 식(A-3)는 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

참고문헌

- (1) Cotter, T. P., 1984, "Principles and Prospects of Micro Heat Pipes," Proceedings of the 5th International Heat Pipe Conference, JaTech, Tokyo, pp. 328~335.
- (2) Babin, B. R., 1990, "Steady-State Modeling and Testing of a Micro Heat Pipe," J. Heat Transfer, Vol. 112, pp. 595~601.
- (3) Lee, Y. S., Lee, Y. P., Lee, Y., 1992, "An experimental study on micro two phase closed thermosyphons with inserts," to be presented at 8th International Heat Pipe Conference.
- (4) Nickens, H. V. and Yannitell, D. W., 1987, "The Effects of Surface Tension and Viscosity on the Rise Velocity of a Large Gas Bubble in a Closed, Vertical Liquid-Filled Tube," Int. J. Multiphase Flow, Vol. 13, No. 1, pp. 57~69.
- (5) Collins, R. DeMoraes, F.F., Davidson, J.F. &

$$\begin{aligned} v(r, z) &= (B_{11} + C_{11}) U_s \\ u(r, z) &= (B_{01} + C_{01} - 1) U_s \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

경계조건 (ii)로 부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} v(R_{o,z}) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} d_n \delta_n J_1(\delta_n R_o) \exp(-\delta_n z) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \delta_n Y_1(\delta_n R_o) \exp(-\delta_n z) \right] U_s = 0 \\ v(R_{i,z}) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} d_n \delta_n J_1(\delta_n R_i) \exp(-\delta_n z) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \delta_n Y_1(\delta_n R_i) \exp(-\delta_n z) \right] U_s = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

경계조건 (iii)으로부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} u(R_s, 0) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} d_n \delta_n J_0(\delta_n R_s) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \delta_n Y_0(\delta_n R_s) - 1 \right] U_s = 0 \\ v(R_s, 0) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} d_n \delta_n J_1(\delta_n R_s) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \delta_n Y_1(\delta_n R_s) \right] U_s = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

1차 근사해

해석적인 해는 $N=1$ 인 1차 근사해에 대해서만 가능하다. 식(A-5)가 늘 성립하려면 각 항이 0가 되어야 한다.

편의상

$$d_n \delta_n = A_n, \quad g_n \delta_n = B_n$$

라 놓으면 식(A-5)가 항상 성립하기 위해서 계수가 항상 0이 되어야 하므로

$$\begin{aligned} A_n J_1(\delta_n R_i) + B_n Y_1(\delta_n R_i) &= 0 \\ A_n J_1(\delta_n R_o) + B_n Y_1(\delta_n R_o) &= 0 \end{aligned}$$

가 항상 성립하여야 한다.

만일 $n=1$ 에 대해서만 위 식이 A_1, B_1 에 관계없이 성립하려면 다음 식이 성립하여야 한다.

$$J_1(\delta_1 R_i) Y_1(\delta_1 R_o) - Y_1(\delta_1 R_i) J_1(\delta_1 R_o) = 0 \quad (\text{A-7})$$

식(A-7)를 만족하는 값 δ_1 이 고유값이 된다.

식(A-4)의 계수를

$$\begin{aligned} R_n(r) &= A_n J_1(\delta_n r) + B_n Y_1(\delta_n r) \\ &= A_n \left[J_1(\delta_n r) + \frac{B_n}{A_n} Y_1(\delta_n r) \right] \\ J_1(\delta_n r) + \frac{B_n}{A_n} Y_1(\delta_n r) &= C_1(\delta_n r) \end{aligned}$$

로 나타내면

$$\frac{B_n}{A_n} = -\frac{J_1(\delta_n R_o)}{Y_1(\delta_n R_o)}$$

가 된다.

기포의 정점(nose)에서

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_s} = 0$$

으로부터 식(A-7)는 다음과 같이 된다.

$$J_1(\delta_1 R_s) + \frac{B_1}{A_1} Y_1(\delta_1 R_s) = 0 \quad (\text{A-8})$$

R_s 는 식(A-8)로 부터 구해진다. 식(A-7)에서 구한 고유값 δ_n 과 식(A-8)에서 구한 R_s 로부터 다음과 같이 $C_o(\delta_n R_s)$ 를 도입하여

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n [J_0(\delta_n R_s) + \frac{B_n}{A_n} Y_0(\delta_n R_s)] \\ = \sum_{s=1}^{\infty} A_n C_o(\delta_n R_s) = 1 \end{aligned}$$

$n=1$ 만 고려한다면

$$A_1 = \frac{1}{C_o(\delta_1 R_s)}$$

가 된다.

따라서 다음과 같이 계수들을 다시 정리할 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{J_1(\delta_1 R_o)}{Y_1(\delta_1 R_o)} A_1 \\ B_{02} &= A_1 \delta_1 J_0(\delta_1 R_s) \\ B_{03} &= B_{02} \delta_1 \\ B_{04} &= B_{03} \delta_1 \\ B_{05} &= B_{04} \delta_1 \\ B_{11} &= A_1 J_1(\delta_1 R_s) \\ B_{13} &= B_{12} \delta_1 \\ C_{02} &= B_1 \delta_1 Y_0(\delta_1 R_s) \\ C_{03} &= C_{02} \delta_1 \\ C_{04} &= C_{03} \delta_1 \\ C_{05} &= C_{04} \delta_1 \\ C_{11} &= B_1 Y_1(\delta_1 R_s) \\ C_{12} &= C_{11} \delta_1 \\ C_{13} &= C_{12} \delta_1 \end{aligned}$$

$$u_{01} = -(B_{02} + C_{02}) U_s$$

$$u_{20} = \left(\frac{B_{12}}{r} + \frac{C_{12}}{r} - B_{03} - C_{03} \right) U_s$$

$$u_{02} = (B_{03} + C_{03}) U_s$$

$$\begin{aligned}
 u_{21} &= (B_{04} + C_{04} - \frac{B_{13}}{r} - \frac{C_{13}}{r}) U_s \\
 u_{11} &= (B_{13} + C_{13}) U_s \\
 u_{30} &= (-\frac{2}{r^2} B_{12} + \frac{B_{03}}{r} + B_{14} - \frac{2}{r^2} C_{12} + \frac{C_{03}}{r} \\
 &\quad + C_{14}) U_s \\
 u_{40} &= (\frac{6}{r^3} B_{12} - \frac{3}{r^2} B_{03} - \frac{2}{r} B_{14} + B_{05} + \frac{6}{r^3} C_{12} \\
 &\quad - \frac{3}{r^2} C_{03} - \frac{2}{r} C_{14} + C_{05}) U_s \\
 v_{20} &= (-B_{13} + \frac{2}{r^2} B_{11} - C_{13} + \frac{2}{r^2} C_{11} - \frac{1}{r} C_{02} \\
 &\quad - \frac{1}{r} B_{02}) U_s \\
 v_{10} &= (B_{02} - \frac{1}{r} B_{11} + C_{02} - \frac{1}{r} C_{11}) U_s \\
 v_{01} &= (-B_{12} - C_{12}) U_s \\
 v_{11} &= (-B_{03} + \frac{1}{r} B_{12} - C_{03} + \frac{1}{r} C_{12}) U_s \\
 v_{30} &= (-B_{04} + \frac{2}{r} B_{13} + \frac{3}{r^2} B_{02} - \frac{6}{r^3} B_{11} - C_{04} \\
 &\quad + \frac{2}{r} C_{13} + \frac{3}{r^2} C_{02} - \frac{6}{r^3} C_{11}) U_s
 \end{aligned}$$

식(13)에 v_{10} , Z_2 , K_2 등을 대입하여 기포의 속도 U_s 에 대하여 전개하면 다음과 같은 식이 된다.

$$U_s = \sqrt{\frac{(3Z_2^3 + 2\frac{Z_2}{r^2} - \frac{Z_3}{r} - Z_4)\lambda - gZ_2}{(B_{02} + C_{02} - (B_{11} + C_{11})/r)^2}} \Big|_{r=R_s} \quad (A-9)$$

여기서

$$\lambda = \frac{\sigma}{\rho_L - \rho_G}$$

$$Z_2 = \frac{u_{20}}{2v_{10} - u_{01}}$$

$$Z_3 = \frac{u_{30} - 3v_{20}Z_2 - 3Z_2(v_{01}Z_2 - u_{11})}{3v_{10} - u_{01}}$$

$$Z_4 = \frac{3Z_2^2 u_{02} + u_{40} - 4v_{30}Z_2 - 6v_{20}Z_3 - 4Z_3(v_{01}Z_2 - u_{11}) - 6Z_2(2v_{11}Z_2 + v_{01}Z_3 - u_{21})}{4v_{10} - u_{01}}$$

기포의 상승속도를 계산하는 과정을 정리하면 Fig. A1과 같다. 즉 작동유체의 액체 및 공기의 물성치 (20°C)를 대입하고 식(A-7)를 만족하는 고유값을 구한다. 이때 식(A-7)는 Bressel 함수의 특성상 여러개의 고유값이 있을 수 있다. 식(A-7)의

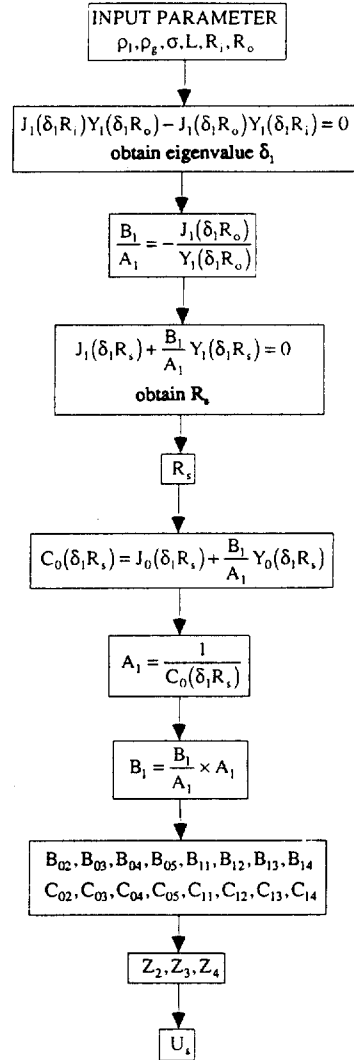


Fig. A1 Flow chart of the calculating procedure

근은 R_i 또는 R_o 외에 R_i 와 R_o 사이의 기포의 정점까지의 거리인 R_s 에서도 성립하게 된다. 따라서 고유값은 0보다는 크나 두번째로 작은 값을 근으로 취해야 한다. 이렇게 구하여 진 고유값을 식(A-9)에 대입하여 R_s 를 구할 수 있다.