엔탈피방법을 적용한 이원용액의 응고과정 해석 방법

An Enthalpy Model for the Solidification of Binary Mixture

유 재 석*
J. S. Yoo

Key words : Enthalpy model(엔탈피방법), Solidification(응고), Binary Mixture(이원혼합물)

ABSTRACT

A numerical model for the solidification of binary mixture is proposed. Numerical model, which employs enthalpy method, is modified from Continuum model, that is, improved relation is proposed for the Enthalpy - Temperature - Concentration - Liquid Mass Fraction. One dimensional example was selected to verify the proposed model. The results show that the new relation can be applied successfully to the solidification or melting of binary mixture.

기 호 설 명

C : 농도
c_p : 열용량
D : 물질확산계수
f_l : 액상질량분율
H : 무차원 엔탈피
h : 엔탈피
K : 행렬식, Eq.(24)
k : 열전도계수
L : 길이
Le : Lewis수
M : 행렬식, Eq.(23)
Q_T : 행렬식, Eq.(25)
Q_C : 행렬식, Eq.(26)
Ste : Stefan수
T : 온도
T_C : 저온벽면온도
t : 시간
x_i : 좌표

희 랍 문 자

α : 열확산계수
ϕ : Interpolation함수
θ : 무차원온도
ρ : 밀도

하 첨 자

* 정회원, 아주대학교 공과대학 기계공학과

E : 공융점
i : 초기값
L : Liquidus
l : 액상
p : 순수물질
s : 고상
sl : 응고
sol : Solidus

상 첨 자

* : 차원을 갖는 양

1. 서 론

용해나 응고는 열에너지의 흡수나 방출을 동반하는 상변화과정이다. 고체-액체 상변화를 겪는 시스템의 기본적이고 공통된 현상은 서로 다른 열물성치를 갖는 두 상의 경계가 존재하며, 이 경계는 열에너지가 흡수 또는 방출됨에 따라 움직이는 이동경계가 된다. 따라서 요구되는 바에 따라 이 이동경계에 잠열을 어떻게 가하거나 추출하여야 하는가 하는 점이 매우 중요한 문제가 되며, 이는 열전단율에 따른 상변화면의 형태 및 이동속도를 해석함으로써 정보를 얻을 수 있다. 그러나 이동경계에서의 경계조건이 비선형이며 이동경계의 위치가 미리 알려져 있는 것이 아니라 해의 일부로서 구해야 하므로 수학적으로 해석이 대단히 어렵다. 따라서 엄밀해는 아주 단순한 영역 및 경계조건하에서만 존재하며, 그 외에는 대부분 근사해나, 수치적 방법에 의하여 해석되고 있다.[1,2] 합금이나 혼합물의 상변화현상은 순수물질의 상변화현상에 비하여 훨씬 복잡한 경향을 보이고 있다.[1,3] 이는 순수물질이나 공융물질과 같이 어떤 특정 온도에서 상변화가 일어나는 것이 아니라, 어떤 온도 범위에서 일어나기 때문이다. 즉 고상과 액상이 혼합물의 농도에 따라 다양한 온도에서 평형을 이루며 공존하게 되며, 더우기 대부분의 시스템에서 화학성분이 고상과 액상에서 서로 다른 용해도를 갖게 되므로 상변화면에서 화학성분이 흡수 또는 배출되게 된다. 이로 인하여 온도 구배뿐만 아니라 농도 구배도 존재하게 되며, 또한 순수물질의 상변화면과는 달리 혼합물의 상변화면은 평면이 아닌 수지상형상을 띄게된다.[1,3] 따라서 혼합물의 상변화면은 매우 불규칙하며 이 부분에는 액상과 고상이 혼합된 형태로 존재하게 되는데, 이 부분을 머시영역이라고 부른다. 혼합물의 상변화 시, 상변화면의 이동을 일으키는 구동력은 온도 구배와 농도구배가 되며, 이들이 열적 혹은 구조적 아냉현상을 일으키게 되는데, 이는 상변화면을 더욱 불안정하게 하여 상변화면을 더욱 더 불규칙하게 만든다. 또한 농도구배와 온도구배는 액상 내의 유동 현상과 매우 밀접한 관계가 있다고 알려져 있다. 상변화 시, 액상 내의 대류의 주요성은 인식되고 있으나 머시영역내에서의 여러가지 전달현상이 잘 알려져 있지 않으므로 체계적인 연구는 별로 이루어지지 않고 있다.[3]

국내에서는 대부분 순수물질의 상변화 현상에 관하여 연구하여 왔다. 즉 유호선과 노승탁[4]은 용해시 액상의 자연대류를 포함하여 수치적으로 해석하였으며, 유재석은 용해후 응고를 동반하는 상변화과정을 수치해석하였으며[5], 응고과정에 용기의 열저항이 미치는 영향에 관하여 고찰하였다.[6] 또한 이윤표[7]는 순수물질의 상변화 해석에 머시영역을 도입하여 수치적으로 해석하였다. 혼합물에 대한 연구는 국내보다는 외국에서 활발하게 연구되고 있다.[3] 즉 최근 Fisher[8]는 액상 내의 거시적 유동과 거시적 편석과의 관계를 고찰하였으며, Clyne[9,10]은 수치해석과 실험을 통하여 합금의 응고 특성을 조사하였다. 또한 Bennon과 Incropera[11-13]는 혼합물의 상변화에 대한 수치모델을 제시하였으며, 이 모델을 이용하여 직사각형공간내의 이원용액의 응고과정을 수치적으로 연구하였다. 또한 Chen[14]은 주조과정의 응고현상을 체적감소 및 자연대류를 포함하여 해석하였다.

본 연구에서는 혼합물의 상변화과정의 열 및 물질 전달 현상을 수치적으로 해석할 때 필요한 해석방법을 제안하였다. 즉 엔탈피방법과 유한요소법을 적용한 응고과정 해석방법을 제안하고,

이를 일차원문제에 적용하여 그 타당성을 조사하였다.

2. 모델링 및 수치해석

2.1 지배방정식

온도 및 농도차에 의한 자연대류를 고려한 이원용액의 응고현상을 해석하기 위하여 엔탈피방법을 도입하였다. 엔탈피방법을 적용하면 고상 및 액상과 이들이 혼합된 머시영역에서 에너지 방정식을 구별할 필요가 없으며, 또한 각각의 상경계면에서의 경계조건을 적용해야 하는 불편을 제거할 수 있으므로 이를 도입하였다. 또한 해석의 편의를 위하여, 국부적으로 열역학적 평형을 이루며, 각상의 열물성치는 일정하고, 고상에서의 물질전달은 무시할 수 있다고 가정하였다. 따라서 지배방정식은 다음과 같다.

$$\rho\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\rho\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho D\frac{\partial C_l}{\partial x_j}\right) \quad \cdots\cdots(2)$$

위 식에서 사용된 엔탈피 및 농도, 물성치들이 액상에서부터 머시영역, 고상까지 연속적으로 변화한다고 가정하면, 이 값들은 각 상의 엔탈피 및 농도, 물성치들의 질량평균값으로 나타낼 수 있게 된다. 즉 액상질량비, f_l을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$h=(1-f_l)h_s+f_lh_l \quad \cdots\cdots(3)$$

$$C=(1-f_l)C_s+f_lC_l \quad \cdots\cdots(4)$$

$$k=(1-f_l)k_s+f_lk_l \quad \cdots\cdots(5)$$

그러나, 고상에서의 물질전달은 무시할 수 있다고 가정하였으므로 물질확산계수는 다음과 같다.

$$D=f_lD_l \quad \cdots\cdots(6)$$

2.2 무차원화

다음과 같은 무차원변수 및 무차원수를 이용하여 지배방정식을 무차원화 하였다.

$$t=\frac{t^*\alpha_s}{L^2}\ Ste_s,\ x_i=x_i^*/L,$$

$$H=h^*/H_{st},\ k=k^*/k_s,\ \rho=\rho^*/\rho_s$$

$$C=\frac{C^*-C_f^*}{C_E^*-C_f^*},\ \theta=\frac{T-T_E}{T_i-T_E},\ Le=\alpha_l/D,$$

$$Ste_l=\frac{c_{pl}(T_i-T_E)}{H_{st}},\ Ste_s=\frac{c_{ps}(T_E-T_c)}{H_{st}} \quad \cdots\cdots(7)$$

무차원화된 재배방정식은 다음과 같다.

$$Ste_s\ \rho\frac{\partial H}{\partial t}=Ste_l\frac{c_{ps}}{c_{pl}}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_i} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_l}\ Ste_s\frac{\partial C}{\partial t}=Le^{-1}\frac{\partial^2 C_l}{\partial x_i\partial x_i} \quad \cdots\cdots(9)$$

2.3 엔탈피-온도-농도-액상질량분율 관계

상변화문제의 해석을 위하여 엔탈피 방법을 적용할 때에 가장 중요한 점은 온도와 엔탈피와의 관계를 어떻게 정확히 모델링할 수 있느냐는 점이다. 물질전달을 포함하는 상변화문제에 대한 기존의 결과들은[11-14] 모두 본 연구에서와 같이 엔타피방법을 적용한 Continuum Model을 이용하고 있다. Bennon and Incropera[12,13]의 결과를 살펴보면, 문헌에는 자세히 언급되어있지 않으나 수록된 그림과 내용(무차원농도의 정의)으로부터 고상선에서의 농도가 공융점의 농도와 일치함을 알 수 있다. 또한 Chen[14]의 결과에서도 고상선에서의 농도가 공융점의 농도와 일치하는데, 이는 공상선에서의 농도경계조건으로 공융농도 경계조건을 가하였기 때문이며 이는 실

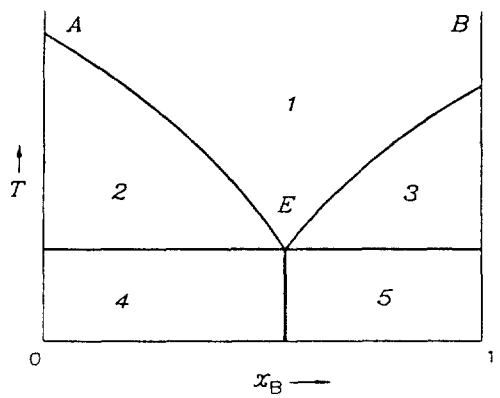
제 현상과는 거리가 있는 경계조건이라하겠다.

Fig.1에 나타낸 상평형도에서 보는 바와 같이 고상은 순수한 A 또는 B의 고상과 공융고상 및 이들의 혼합물의 형태일 것이므로 고상의 국소 평균 농도는, 특히 상변화 초기에는, 공융농도와는 큰 차이가 있으리라는 것을 짐작할 수 있으며, 또한 이는 참고문헌 1에서와 같이 매우 단순한 해석적 결과로부터도 알 수 있다. 따라서 고상의 농도 분포를 비교적 정확히 모사할 수 있는 모델링이 필요하게 된다. 즉 엔탈피방법을 적용하되, 머시영역에서의 응고현상 및 고상의 농도분포를 잘 모사할 수 있도록 엔탈피-온도-농도-액상질량분율간의 관계를 모델링하였다. 엔탈피-온도-농도-액상질량분율간의 관계는 다음과 같다.

$h > h_L$일때

$$T=[h-(c_{ps}-c_{pl})\ T_L-h_{sl}]/c_{pl} \cdots\cdots (10)$$

$$f_l=1.0 \cdots\cdots (11)$$



a. Simple eutectic system
1. homogenous liquid
2. liquid + A-crystals
3. liquid + B-crystals
4. A-crystals + eutectic mixture
5. eutectic mixture + B-crystals

Fig.1 Binary solid-liquid equilibrium diagram.

$h_E < h < h_L$일때

$$T\text{는 } a_1T^2+a_2T+a_3=0\text{의 근} \cdots\cdots (12)$$

여기서

$$a_1=c_{ps}$$

$$a_2=-h-c_{ps}T_p(1-f_l)-c_{ps}T_lf_l+c_{pl}f_l(T_L-T_p) \quad (13)$$

$$a_3=T_ph-(T_p-T_L)\,[(c_{ps}-c_{pl})\,T_L+H_{sl}]f_l$$

$$f_l=(f_l)_o\,[1-(T-T_L)/(T-T_p)] \cdots\cdots (14)$$

$h_{sol} < h < h_E$일때

$$T=T_E \cdots\cdots (15)$$

$$f_l=(f_l)_o-[\{(h)_o-h\}-\{1-(f_l)_o\}\,c_{ps}\{(T)_o-T_E\}$$
$$-(f_l)_o\{c_{pl}(T)_o+(c_{ps}-c_{pl})(T_L)_o-c_{ps}T_E\}]/h_{sl} \cdots (16)$$

$h < h_{sol}$일때

$$T=h/c_{ps} \cdots\cdots (17)$$

$$f_l=0 \cdots\cdots (18)$$

위에서 사용된 h_{sol} 및 h_E, h_L, T_L은 다음과 같다.

$$h_{sol}=c_{ps}\ T_E$$

$$h_E=c_{ps}\ T_E+h_{sl}$$

$$h_L=c_{ps}\ T_L+h_{sl} \cdots\cdots (19)$$

$$T_L=T_p-(T_p-T_E)\,C_l/C_E$$

위에 기술한 개선된 엔탈피-온도-농도-액상질량분율 관계식은, Fig.1에 나타낸 이원용액의 상평형도와 같은 형태의 상평형도를 갖는 물질

에만 적용할 수 있다. 즉 NH_4Cl-H_2O용액의 경우 공융농도보다 낮은 농도의 액체(Fig.2에 나타낸 NH_4Cl-H_2O 상평형도에서 공융점의 왼쪽 부분)에 적용할 수 있다. 그러나 공융농도보다 NH_4Cl의 농도가 높은 경우에도 고상선과 액상선의 비를 도입하면 손쉽게 엔탈피-온도-농도-액상질량분율 관계를 이 경우에 맞도록 변형할 수 있다.

2.4 유한요소법의 적용

수치해석을 위하여 본 연구에서는 유한요소법을 사용하였다. 유한요소법의 장점으로는, 첫째, 복잡한 형상의 경계를 갖는 경우 요소면이 그 경계면과 일치하도록 요소를 분할하기만 하면 되는 점이다. 둘째로는 물성치가 다른 물질로 구성되어 있을 때 역시 이 경계면에 요소면이 위치하도록 분할하면 된다. 즉, 에너지 방정식을 적용할 때, 물성치가 다른 물질의 경계면에서는 온도와 열유속이 연속인 조건을 만족시켜야하는데, 유한요소법에서는 요소면이 이 경계면과 일치한다면 이 조건이 자동으로 만족되므로 따로 이 조건을 적용하여야 하는 수고를 덜 수 있다. 상변화문제 해석에 엔탈피방법을 적용할 경우, 상변화면을 직접 추적하지 않으므로 단순한 형상의 영역을 갖는 문제에서는 위에서 언급한 유한요소법의 장점을 찾기 어려우나, 복잡한 형상의 영역을 포함하거나, 상변화물질과 함께 이를 둘러쌓고 있는 용기나 몰드를 고려하여야 하는 경우 유한차분법보다 유리하다고 할 수 있다.

온도 및 농도를 다음과 같은 형상함수를 이용하여 근사화한다.

$$\theta=\sum_{k=1}^{n}\theta_k\phi_k,\quad C=\sum_{k=1}^{n}C_k\phi_k \cdots\cdots(20)$$

에너지 및 농도방정식에 각각 잔류가중치법(Weight Residual Method)을 써서 유한요소식을 구하여 행렬식의 형태로 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Ste_s M_{ij}\dot{\theta}_j+Ste_l\frac{c_{ps}}{c_{pl}}K_{Tij}\theta_j=Q_T \cdots\cdots(21)$$

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_l}Ste_s M_{ij}\dot{C}_j+Le^{-1}K_{Tij}C_j=Q_C \cdots\cdots(22)$$

Eq.(21)과 (22)에서 사용된 계수는 다음과 같이 표현된다.

$$M_{ij}=\int_\Omega \phi_i\phi_j d\Omega \cdots\cdots(23)$$

$$K_{Tij}=\int_\Omega(\phi_{i,x}\phi_{j,x}+\phi_{i,y}\phi_{j,y})\,d\Omega \cdots\cdots(24)$$

$$Q_T=\int_\Gamma(-q_s)\,\phi_i d\Gamma \cdots\cdots(25)$$

$$Q_C=\int_\Gamma(-j_C)\phi_i d\Gamma \cdots\cdots(26)$$

2.5 수치해석방법

시간에 대하여서는 암시법을 사용하였으며 기본적인 계산과정은 다음과 같다.

(1) 전시간단계 또는 반복단계에서의 정보를 이용하여 상변화물질의 엔탈피를 계산한다. 이때 농도의 정보는 전시간단계의 값을 이용한다.
(2) 엔탈피-온도-농도-액상질량분율 관계를 이용하여 온도 및 각 상의 질량분율을 구한다.
(3) 상평형도를 이용하여 새로이 응고된 고상의 농도와 국소평균농도를 구한다.
(4) 고상의 응고로 배제된 물질을 고려하여 액상의 농도를 구한다.
(5) (1)-(4)과정을 수렴조건을 만족할 때까지 반복 수행한다.

3. 수치해석 결과

물질전달이 수반된 응고과정을 일차원적으로 해석하기 위하여 대상물질 및 영역, 조건을 다음과 같이 정하였다. 즉 상변화물질로는 이원용액인 NH_4Cl-H_2O를 택하였으며, 이원용액의 성분중 NH_4Cl 성분을 농도의 기준으로 삼았다. NH_4Cl-H_2O의 상평형도는 Fig.2에 표시하였으며, NH_4Cl-H_2O의 물성치는 Table 1에 수록하였다. 일차원해석을 위하여 해석영역으로는 Fig.3에 나타낸 바와 같이 무한평판 형태의 영역을 취하였으며, 몰드는 고려하지 않았다. 이 영역을 채우고 있는

이원용액의 초기농도는 공융농도(C_{NH_4Cl}=0.197)보다 낮은 0.15로 택하였다. 초기에 이원용액은 액상선온도, T_L보다 높은 초기온도 T_i로 유지되다가, t=0이후 이원용액의 한면을 T_c로 유지시키며, 나머지 한면은 단열시켰다. 수치해석시 T_i는 300K로 취하였으며, T_c는 공융온도(257.75K) 또는 공융온도보다 낮은 255.75K의 두가지 경우에 대하여 해석하였다. 영역은 10개의 일차원요소로 등분하였으며, 2차등방성 요소를 사용하였다.

Fig.4에는 시간에 따른 상변화물질 내의 온도분포를 표시하였다. 여기에서 시간의 단위는 분이다. 온도분포만을 보면 마치 순수물질이나 공융물질과 같이 일정한 상변화온도에서 응고되는 것으로 생각할 수 있으나, Fig.5에 나타낸 시간에 따른 액상질량분율의 분포를 동시에 살펴보면 일정 온도 범위에서 응고가 일어나는 것을 알 수 있다. 넓은 범위의 온도가 공융온도와 일치하는

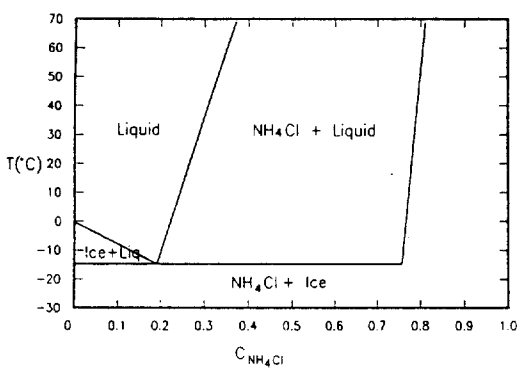


Fig.2 Equilibrium phase diagram of the NH_4Cl-H_2O system.

Table 1. Thermophysical properties of NH_4Cl-H_2O.

	Solid	Liquid	Unit
Specific heat	1.870	3.249	kJ/kg K
Thermal conductivity	0.393	0.468	W/m K
Density	1078	1078	kg/m^3
Latent heat	313.8		kJ/kg
Eutectic temperature	257.75		K
Eutectic concentration	0.197		
H_2O freezing temperature	273.15		K

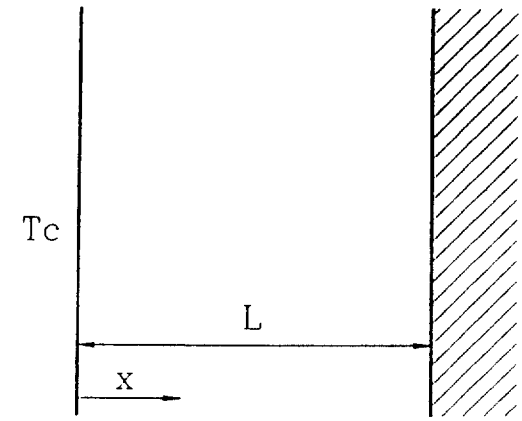
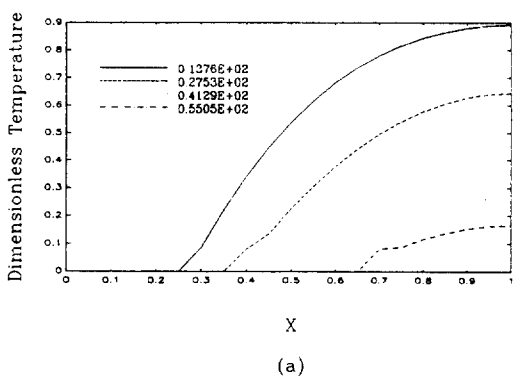


Fig.3 Schematic diagram of one dimensional domain.



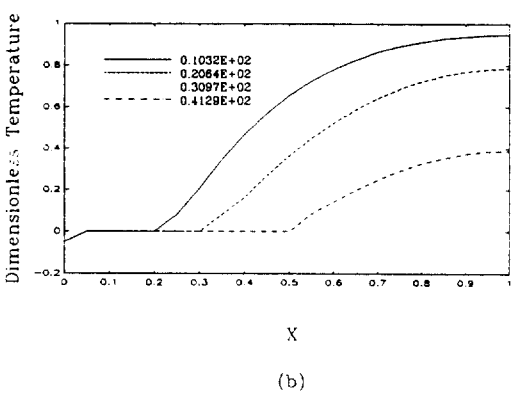
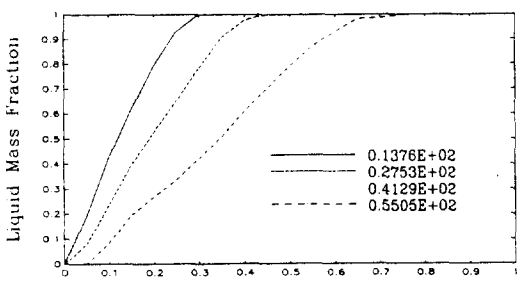


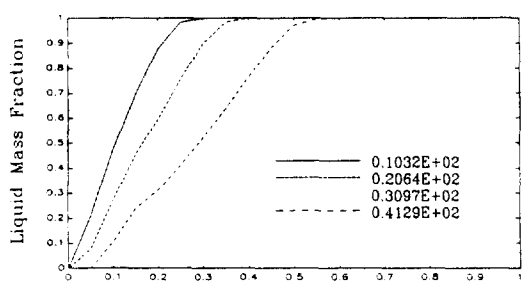
Fig.4 Temperature distribution for various times in the NH_4Cl-H_2O system : a) T_c=257.75K, b) T_c=255.75K.

것은 초기농도가 공융농도에 가까운 0.15로 취하였기 때문으로 생각된다. 즉 응고가 진행됨에 따라 머시영역내의 고상으로부터 NH_4Cl이 배제되어 액상으로 확산되어 나가게 된다. 일차원의 경우 대류는 존재하지 않고 오로지 확산에만 의존하므로 물질전달 속도가 느리게 된다. 따라서 머시영역내의 액상질량분포가 낮은 구역의 농도가 상대적으로 높게 되며, 이러한 이유로 상당히 넓은 구역의 온도가 공융온도와 일치하게 된다. 그러나 Fig.5에서 액상의 질량분율 분포를 살펴보면, 고상 및 머시영역, 액상의 존재를 확실히 알 수 있으며, Fig.4와 Fig.5를 동시에 살펴보면 머시영역내에서 모든 구역의 온도가 공융온도와 일치하지는 않는다는 것을 알 수 있다.

Fig.6에는 고상의 국소평균농도를 시간별로 표시하였다. 이 결과에서도 역시 시간은 분단위로 나타내었다. x=0에서의 농도가 0인 것은, x=0에 온도경계조건을 가하였으므로 초기에 순간적으로 응고가 이루어 졌다고 가정하여야 하며, 이 때에는 상평형도로부터 알 수 있듯이 고상은 농도가 0인 즉 순수한 얼음만으로 형성되기 때문이다. 좀더 현실적인 경계조건, 즉 몰드를 고려하여 그 외벽에 온도경계조건을 가한다면 이 점은 해결되리라 생각된다. 그러나, $x>0$인 지점에서는 점진적으로 응고가 이루어 진다고 하여 해석하였다. 그림에서 보면 응고가 진행됨에 따라 고상의 농도가 높아지는 경향을 보이고 있다. 만일 액상의 농도가 항상 공융농도보다 낮은 농도를 유지한다면, 고상의 농도는 상평형도로부터 알 수 있듯이 항상 순수한 얼음만이 형성되어야 할 것이다. 즉 고상의 농도는 항상 0을 유지할 것이다. 그러나 고상이 증가하며 배출된 용질로 인하여,

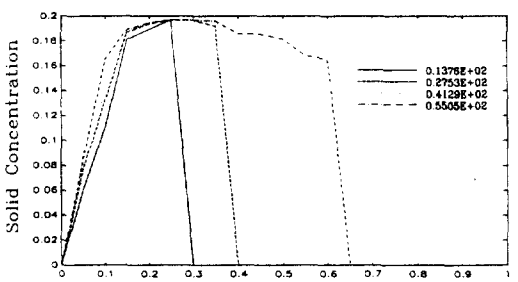


(a)

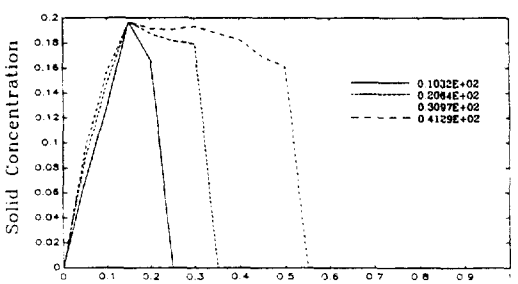


(b)

Fig.5 Profiles of liquid mass fraction for various times in the NH_4Cl-H_2O system : a) T_c =257.75K, b) T_c=255.75K.



(a)



(b)

Fig.6 Distribution of the NH_4Cl concentration in solid phase for various times : a) T_c= 257.75K, b) T_c=255.75K.

고상이 형성된 주위에서는 액상 농도의 증가를 가져와 결국 국소적으로 공융농도에 이르게 된다.

일단 액상의 농도가 공융농도에 이르면 그 액상은 순수물질처럼 응고되며, 고상의 평균농도는 증가하게 된다. 그림에서 x가 증가함에 따라 고상내의 국소평균농도가 최고농도치를 보인 후 다시 감소하여 0의 농도를 나타낸다. 앞에서 설명하였듯이 최고농도치는 공융농도와 일치하며, 이는 확산이 잘 일어나지 않는 부분에서는 공융농도에 도달할 수 있으며, 그 외의 부분에서는 순수한 얼음이 형성되는 것을 말해주는 것이다. 또한 고상의 평균농도가 다시 0이 되는 것은 이 부분 이후의 영역에는 고상이 존재하지 않기 때문이다.

이상의 결과를 종합하여 볼 때, 물질전달을 포함하는 상변화문제의 해석을 위하여 제안된 수치모델이 상변화과정의 물리적 현상을 성공적으로 기술할 수 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 혼합물의 상변화과정의 열 및 물질 전달 현상을 수치적으로 해석할 때 필요한 해석방법을 제안하였다. 즉 엔탈피방법을 적용할 때의 엔탈피-온도-농도-액상질량분율 관계를 개선하여 제안하였으며, 이를 일차원문제에 적용하여 그 타당성을 조사하였다. 상변화물질로는 이원용액인 NH_4Cl-H_2O를 택하였으며, 무한평판 형태의 영역을 계산영역으로 하였다. 수치해석결과, 물질전달을 포함하는 상변화문제의 해석을 위하여 제안된 엔탈피-온도-농도-액상질량분율 모델이 상변화과정의 물리적 현상을 성공적으로 기술할 수 있음을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 한국과학재단의 연구비 지원에 의하여 연구되었음을 밝히며 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Flemings, M.C., 1974. "Solidification Processing", McGraw-Hill, New York.
2. Lunardini, V.J., 1981, "Heat Transfer in Cold Climates", Van Nostrand Reinhold, New York.
3. Viskanta, R., 1988, "Heat Transfer During Melting and Solidification of Metals", J.Heat Transfer, Vol.110, No.4(B), pp.1205~1219.
4. 유효선, 노승탁, 1986, "좌표변환에 의한 상변화과정의 수치해석", 대한기계학회논문집, 제10권, 제4호, pp.585~592.
5. Yoo, J., 1988, "Numerical Analysis of Phase Change Heat Transfer : Melting Followed By Solidification", Heat Transfer : Korea-US Seminar on Thermal Engineering and High Technology, Eds.Kim, J.H.et.al., Hemisphere, Washington, pp.189~196.
6. 유재석, 1988, "용기를 고려한 응고과정의 열전달 해석(Ⅰ)-포화액의 일차원 해석-", 공기조화·냉동공학, 제17권, 제4호, pp.377~381.
7. 이윤표, 1989, "벽면효과와 머시존을 고려한 이차원 응고과정의 해석", 박사학위논문, 서울대학교, 서울.
8. Fisher, K.M., 1981, "The Effects of Fluid Flow on the Solidification of Industrial Castings and Ingots", Physico Chemical Hydrodynamics, Vol. 2, pp.311~326.
9. Clyne, T.W., 1982, "The Use of Heat Flow Modeling to Explore Solidification Phenomena", Metallurgical Transactions B, Vol.13, pp.471~478.
10. Clyne, T.W., 1982, "Numerical Modelling of Directional Solidification of Metallic Alloys", Metal Science, Vol.16, pp.441~450.
11. Bennon, W.D. and Incropera, F.P., 1988, "Numerical Analysis of Binary Solid-Liquid Phase Change Using a Continuum Model", Numerical heat Transfer, Vol.13, pp.277~296.

12. Bennon, W.D. and Incropera, F.P., 1987, "A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change Systems-I. Model Formulation", Int.J. Heat Mass Transfer, Vol.30, No.10, pp.2161~2170.
13. Bennon, W.D. and Incropera, F.P., 1987, "A Continuum Model for Momentum, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change Systems-II. Application to Solidification in a Rectangular Cavity", Int.J.Heat Mass Transfer, Vol.30, No.10, pp.2171~2187.
14. Chen, Ying-Heng, 1990, "Study of Solidification, Shrinkage and Natural Convection in Casting Processes", Ph.D.Thesis, Ohio State University, OH, USA.