Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 19, No.3, September., 1993.

선형계획을 이용한 동적 생산계획 모형의 분석†

Analysis of Dynamic Production Planning Model Using Linear Programming†

장 석 화*

Suk-Hwa Chang*

Abstract

Dynamic production planning problems are to determine the optimal production times and production quantities of product for discrete finite periods. In previous many researches, the solutions for these problems have been developed through the algorithms using dynamic programming.

The purpose of this research is to suggest the new algorithm using linear programming. This research is to determine optimal production quantities of product in each period to satisfy dynamic for discrete finite periods, minimizing the total of production cost and inventory holding cost. Cost functions are concave, and no backlogging for product is allowed. The new algorithm for capacity constrained problem is developed.

1. 서 론

기업에서 생산활동은 중요한 부분으로서 생산시스템의 상황에 따라 연구대상과 방법에 있어서 여러가지 내용으로 존재하고 있다. 그중 동적 생산계획 문제(dynamic production planning problems)는 이산적인 유한기간 동안에 매기간 수요가 동적으로 변하는 상태에서 이 수요를 충족시키기 위한 최적 생산정책을 구하는 것으로, 생산비용과 재고유지비용을 합한 총비용을 최소화하도록 매 기간의 생산량을 결정하는 문제이다. 이 문제들은 기업에서 자재소요계획, 생산일정계획등에서 중요하게 이용된다.

Wagner와 Whitin[13]은 유한기간 동안에 매 기간 동적인 수요가 이미 알려져 있을때, 이러한 수요를 최소비용으로 충족시킬 수 있도록 매기간 최적 생산량을 구하는 문제를 처음으로 연구하였다. 이 모형에서의 비용은 생산비용과 재고유지비용으로 이루어져 있으며, 이 비용함수들은 제품량에 대하여 증가하는 위로 볼록한형태(concave)로 가정하였다. 그 후 Zangwill[15]이 Wagner-Whitin의 모형을 예비주문(backlogging)을 허용하는 문제로 확장하였다. 이외에도 이러한 모형에 대하여 해를

† 본 논문은 1991년도 한국과학재단 기초연구비에 의해 연구되었음.

* 인천대학교 산업공학과

구하는 효과적인 방법으로 계획구간정리(planning horizon theorem)가 개발되었다[3, 8].

Florian과 Klein[6]은 Wagner-Whitin모형에 대하여 매 기간의 제품 생산량에 상한(upper bound)이 주어진 경우에 대하여 최적해의 구조를 밝혔다. 특히, 모든 기간의 생산능력이 똑같은 문제에 대하여 동적계획-최단경로 해법을 개발하였다. Love [10]는 매 기간 제품의 생산량과 재고량에 제한이 있는 문제에 대하여 네트워크흐름 개념을 사용하여 최적계획을 연구하였다. Jagannath와 Rao[7], Swoveland[12], Lambert와 Luss[9]등도 생산량 혹은 재고량에 제한이 주어진 문제에 대하여 유사하게 연구하였다. Baker[2]등은 매 기간의 생산량이 시간에 따라 다른 경우에 생산착수비용과 재고유지비용의 합을 최소로하는 생산량을 구하는 문제에 대하여 tree-search해법을 개발하였다. Bitran과 Yanasse[4]는 생산량이 제한된 문제에 대하여 계산상의 복잡성에 관하여 연구하였다. 이외에도 생산되는 제품의 수, 생산설비의 직렬등에 따라 다양하게 연구되어 왔다[3, 4, 8, 15]. 또한 Sung과 Chang[11]은 이 분야의 문제로서 단일설비가 여러가지 종료의 제품을 동시에 생산하는 문제를 연구하였다.

이들 연구들은 공통적으로 비용구조를 concave하게 가정하고 있고, 해의 접근방법으로 최적해의 구조를 밝힌후 주로 동적계획법(dynamic programming)을 이용하여 해를 구하고 있다.

본 연구에서는 이러한 문제의 생산계획 모형에 대하여 새로운 해법을 제시하려는 것으로 Florian-Klein 모형에 대하여 기존의 동적계획을 이용한 문제 해결방법을 바꾸어 다른 새로운 해법을 개발하려고 한다. 일반적으로, 생산착수비용이 존재하면 비용구조는 선형적이 아니다. 기존의 대부분의 연구에서는 concave한 비용구조로 인하여 동적계획법을 이용하여 최적해를 구하고 있다. 여기서는 분지-한계 기법(branch and bound method)과 선형계획을 이용한 해법을 개발하려고 한다.

본 문제에서의 비용구조는 생산비용은 착수비용 더하기 선형으로 비례하고, 재고유지비용은 선형으로 비례하는 것으로 모두 증가하는 위로볼록한 형태(concave)로 가정한다. 매 기간의 생산량은 상한이 주어지고, 제품의 예비주문(backlogging)은 허용되지 않는다.

다음의 각 부분에서, 최적해의 구조의 특징을 밝히고, 이를 바탕으로 해법을 개발한다. 또한 수치적 예제를 이용하여 해법을 설명하고자 한다.

2. 모형과 최적해의 구조

여기서는 내용과 관련된 가정과 부호를 설명하고, 이를 바탕으로 수리적모형을 나타내고, 이 모형에 대한 최적해의 성질에 대하여 설명한다.

(가) 가정

(a) 생산기간은 이산적이고 유한하다.

(b) 매 기간의 수요는 알려져 있다.

(c) 매 기간의 생산가능한 생산량은 상한이 주어져 있다.

(d) 비용은 생산비용과 재고유지비용으로 이루어지며, 비용함수는 제품량에 대하여 증가하는 위로볼록한 형태(concave)이다.

(e) 제품의 예비주문은 허용되지 않는다.

(나) 부호

$t=1, 2, \cdots\cdots, T$에 대하여 ;

(a) r_t = 기간 t에서의 수요량

(b) x_t = 기간 t에서의 생산량

(c) I_t = 기간 t말에서의 재고량

(d) K_t = 기간 t에서의 생산착수비용

(e) c_t = 기간 t에서의 단위당 생산비용

(f) h_t = 기간 t에서의 단위당 재고유지비용

(g) u_t = 기간 t에서의 생산량의 상한

(다) 모형 및 최적해의 구조

이산적인 유한기간 동안에 발생한 수요를 충족시킬 수 있도록 제품을 생산하는데 있어서 생산비용과 재고유지비용을 합한 총비용을 최소로 할 수 있는 매 기간의 최적 생산량 X=

$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_T)$을 결정하는 것으로, 다음과 같은 모형으로 나타내진다.

$$\text{Minimize } G(X)=\sum_{t=1}^{T}(K_t\delta(x_t)+c_tx_t)+\sum_{t=1}^{T}h_tI_t$$

$$\text{subject to } I_t=I_{t-1}+x_t-r_t,\ t=1, 2, \cdots, T, \qquad (P1)$$

$$x_t \le u_t,\ t=1, 2, \cdots\cdots, T$$

$$x_t \ge 0,\ I_t \ge 0,\ t=1, 2, \cdots\cdots, T$$

$$I_0=0,\ I_T=0,$$

여기서, $\delta(x_t)=1$, if $x_t>0$,

$=0$, if $x_t \le 0$

r_t와 u_t사이의 관계는 $\sum_{i=1}^{t} ri \le \sum_{i=1}^{t} ui$, $(t=1, 1, \cdots\cdots, T)$를 만족해야 문제가 성립한다.

문제(P1)의 계약조건은 closed bounded convex set이다. 그리고 G는 concave하므로, 최소값이 극점(extreme point)에서 존재한다는 것을 이미 알고 있다. D을 실현가능해(feasible solution)영역의 모든 극점의 집합이라 하자. 그리고 최적 생산계획을 구하는데 이용하기 위하여 사용될 수 있는 D의 특징에 관한 기술을 하고자 한다.

먼저 다음 정의들을 도입하자.

정의 : $x_t>0$이면 기간 t는 생산점(production point)이라 하자. 그리고 $I_t=0$ 이면 기간 t를 재생점(regeneration point)이라 하자. 더우기 S_{mn}은 두개의 연속된 재생점 m과 n사이의 모든 시점에 대하여 X의 성분들을 포함하는 실현가능한 생산계획(feasible production plan) X의 부분집합(subset)이라 하자.

$$S_{mn}=\{x_t,\ t=m+1, m+2, \cdots\cdots, n \mid I_m=0=I_n\ ;\ I_t>0 \text{ for } m<t<n\}$$

여기서 $0 \le m < n \le T$이다.

S_{mn}은 생산배열(production sequence)이라고 부르자. 분명히 어떠한 실현가능한 생산계획도 하나 혹은 그 이상의 생산배열들로 나누어질 수 있다. 그리고 $I_0=0=I_T$이기때문에 적어도 하나의 생산배열 S_{0T}가 존재한다. 더우기, 실현가능한 생산계획 X의 모든 재생점은 보조정리(Lemma)1에서 설명될 두개의 서로 다른 실현가능한 생산계획의 재생점과 함께 공유된다.

보조정리(Lemma) 1 : 만일 X'과 X''가 서로 다른 실현가능한 계획이고 실현가능한 계획 $X=(1/2)(X'+X'')$이면, X'와 X''는 X의 모든 재생점을 함께 공유한다.

증명 : 기간 s가 X의 재생점이라 생각하자. 그러면 가설에 의해

$$\sum_{t=1}^{s}x_t=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\sum_{t=1}^{s}x_t'+\sum_{t=1}^{s}x_t''\right]$$

만일 $\sum_{t=1}^{s}r_t$을 각 항에서 빼면,

$$\sum_{t=1}^{s}(x_t-r_t)=\left(\frac{1}{2}\right)\left[\sum_{t=1}^{s}(x_t'-r_t)+\sum_{t=1}^{s}(x_t''-r_t)\right]$$

그리고 $I_s=\frac{1}{2}(I_s'+I_s'')$이다. 그런데 $I_s=0$이므로, I_s'와 I_s''는 모두 0 이어야 한다. 따라서 두 계획은 재생점 s을 공유한다. 그렇지 않으면 I_s'와 I_s''중 하나는 음수가 된다. 이 경우 관련된 계획은 실현가능하지 않다. 이것으로 증명이 완료된다.

극점의 집합 D의 특징의 기본을 이루게 될 생산배열의 개념을 도입하자.

정의 : 생산배열 S_{mn}은 기껏-하나의 기간$(m+1 \le d \le n)$에서 생산수준이 부분(partial), 즉, $0<x_d<u_d$ 이고, 모든 다른 기간의 생산수준이 0 혹은 상한이라면 "기껏-하나의 부분 생산배열(at most on partial production sequence)"이라 한다.

정리(Theorem)1 : 실현가능한 생산계획 X가 D의 안에 있으면 이것은 기껏-하나의 부분 생산배열들로 이루어져 있고, 그리고 이것의 역도 성립한다.

증명 : $X \in D$이라 하자. S_{mn}은 X의 일부분이나, S_{mn}은 기껏-하나의 부분 생산배열이 아니

라고 하자. 그러면 적어도 두개의 $0<x_b<u_b$, $0<x_d<u_d$인 기간 b와 d가 존재한다고 한다. 이는 일반성을 잃지 않으면서, 우리는 그러한 기간이 있다고 생각할 수 있다.

$$\sigma=(\frac{1}{2})\min\{x_b,\ u_b-x_b,\ x_d,\ u_d-x_d,\ \min_{m+1\leq t<n}(I_t)\}$$

라 하자. 그리고 U_t는 t번째 위치는 1이고 나머지는 모두 0인 (m−n)구성벡터라 하자. 지금 서로 다른 생산배열들을 다음과 같이 정의한다.

$$S_{mn}'=S_{mn}-\sigma U_b+\sigma U_d,$$
$$\text{그리고 } S_{mn}''=S_{mn}+\sigma U_b-\sigma U_d$$

$\sigma>0$이므로 이 배열들도 쉽게 실현가능함으로 알 수 있다.

그러나 $S_{mn}=(\frac{1}{2})(S_{mn}'+S_{mn}'')$이므로 X가 극점이라는 가정에 모순이 된다.

이것으로 정리의 필요조건이 증명되었다.

반대를 증명하기 위하여 X∉D라 하자. 그러면 $X=(\frac{1}{2})(X'+X'')$인 실현가능한 두개의 서로 다른 생산계획 X′와 X″이 존재한다. 보조정리 1로부터 X′와 X″는 모든 재생점을 공유하게 된다. m과 n이 두개의 연속적인 재생점이라 하자. 그리고 S_{mn}, X_{mn}'과 X_{mn}''은 각각 X, X′과 X″ 계획내에 포함된 다른 부분계획(subplan)들이라 하자. 분명히, $S_{mn}=(\frac{1}{2})(X_{mn}'+X_{mn}'')$이고, 그리고 X_{mn}'와 X_{mn}''는 어느것도 기껏−하나의 부분 생산배열이 아니다. 이것은 충분히 적은 $\sigma>0$에 대하여, 다음과 같이 나타낼 수 있는 적어도 두개의 기간들 b와 d $(m+1\leq b<d\leq n)$가 존재한다는 것을 의미한다.

$$X_{mn}'=S_{mn}-\sigma U_b+\sigma U_d,$$
$$\text{그리고 } X_{mn}''=S_{mn}+\sigma U_b-\sigma U_d$$

배열 S_{mn}은 기껏−하나의 부분 생산배열이기 때문에 X′와 X″은 동시에 실현가능할 수 없다. 따라서 X′와 X″도 실현가능할 수 없다. 이것은 X∉D이라는 가정에 모순이 된다.

(a) $x_b=c_b$ 이고 $x_d=c_d$이면, 결과는 직접적이다.

(b) $x_b<c_b$, $x_d=e<c_d$, 그리고 X_{mn}'이 실현가능하면, $x_b''=c_b+\sigma>c_b$, 그리고 X_{mn}''은 실현가능하지 않다.

(c) $x_b<c_b$, $x_d=0$, 그리고 X_{mn}'이 실현가능하면, $x_d''=0-\sigma<0$, 그리고 다시 X_{mn}''은 실현가능하지 않다.

이것으로 본 정리의 증명이 완료되었다.

정리1은 극점의 집합 D는 기껏−하나의 부분 생산배열들로 이루어진 모든 실현가능한 해로 확인된다는 것을 의미한다. 즉, 연속된 두개의 재생점사이에서의 부분 생산점은 기껏−하나의 기간(시점)에서만 발생한다는 것을 의미한다. 그러므로 이러한 실현가능한 해들중에서 하나는 T기간동안 최소비용을 발생하는 최적해가 될 수 있다. 정리1은 해법에서 구한 최적해를 확인하기 위하여 이용된다.

분지−한계 기법과 선형계획을 이용한 해법을 개발하기 위하여 다음 부분에서 다룰 것이다.

3. 해 법

먼저, 다음 정의들을 도입한다.

$x_t>0$이면, 앞 부분에서의 정의와 똑같이 생산점이라 한다. $x_t=0$이면, 기간 t를 생산점이라 한다. $x_t>0$인 기간 t를 생산가능점이라 하는데, 이 기간은 생산점 혹은 비생산점의 여부가 아직 결정되지 않은 시점으로 앞으로 해를 개선함으로서 생산점 혹은 비생산점으로 바뀐다. 해의 개선단계에서 기간 t는 아래에 정의한 세가지 상황중 어느 한 곳에 존재하게 된다.

각 기간이 내포된 집합을 다음과 같이 정의한다.

생산가능점 집합 : $A=\{t\mid x_t\geq 0,\ t=1,2,\cdots\cdots,T\}$

생산점 집합 : $B=\{t\mid x_t>0,\ t=1,2,\cdots\cdots,T\}$

비생산점 집합 : $C=\{t\mid x_t=0,\ t=1,2,\cdots\cdots,T\}$

집합사이의 관계는 A U B U C={1, 2, ……, T}이 성립한다.

여기서는 해법으로 분지－한계 기법(branch and bound method)을 이용한다. 문제를 분지하였을때, 각 분지된 문제에 대한 해를 구하기 위하여 선형계획 모형을 개발한다. 먼저, 선형계획 모형을 만들기 위하여 다음의 의사결정변수를 정의하고, 비용계수를 구한다.

y_{tj} : 기간 t에서 생산하여 기간 j(j≥t)의 수요의 일부 혹은 전부를 충족시키는 양을 나타낸다.

c_{tj} : 기간t에서 생산하여 기간 j(j≥t)의 수요의 한단위를 만족시킬때 비용을 나타낸다.

비용계수 c_{tt}, (t=1, 2, ……, T)는 기간 t에서 생산착수비용 K_t을 min{r_t, u_t}로 나눈값을 단위당생산비용 c_t에 더하여 만든다. 비용계수 c_{tj}, (t=1, 2, ……, t,j=t+1, ……, T)는 기간 t의 단위당생산비용 c_t에 기간 j까지의 재고유지비용($h_t+h_{t+1}+$, ……, h_{j-1})을 더하여 만든다. 따라서 초기 선형계획 모형에서는 모든 기간이 생산가능점으로 비용계수는 다음과 같이 나타낸다.

$$c_{tt}=c_t+K_t/\min\{r_t,\ u_t\},\ t=1, 2, \cdots\cdots, T, \qquad (3.1)$$

$$c_{tj}=c_t+\sum_{i=t}^{j-1}h_i, \quad t=1, 2, \cdots\cdots T,\ j=t+1, \cdots\cdots, T. \qquad (3.2)$$

x_t와 y_{tj} (t=1, 2, ……, T)의 관계는 $x_t=\sum_{j=t}^{T-1} y_{tj}$ 가 된다.

최적해를 구하는 전개과정에서, 시작단계에서는 생산가능점 집합 A={1, 2, ……, T} 이고, 생산점 집합 B=ϕ이고, 비생산점 집합 C=ϕ이다. 중간단계에서는 생산가능점이 생산점 혹은 비생산점으로 바뀌어 간다.

그리고 해를 개선하는 과정에서의 비용계수는 기간 t에서의 생산상황에 따라 결정된다. 만일 기간 t가 생산가능점이라면, 비용계수는 계속하여 식(3.1), (3.2)와 같이 나타낸다. 기간 t가 생산점이라면, 비용함수는 비용계수를 식(3.1)을 이용하는 대신에 $K_t+c_{tt}y_{tt}$를 이용하고, 식(3.2)를 이용하는 것은 똑같다. 그리고 기간 t가 비생산점이라면, 식(3.1), (3.2)을 이용하는 대신에 단위당생산비용을 임의의 큰 상수 M의로 나타내어, 생산비용함수는 My_{tj}(t=1, 2, ……, T, j=t, t+1, …, T)가 된다.

따라서 해의 각 개선단계에서 기간 t가 생산가능점, 생산점 혹은 비생산점인지에 따라서 문제(P1)를 다음과 같은 새로운 선형계획 문제로 변형하여 나타낸다.

$$\text{Minimize } Z=\sum_{t\in A}\sum_{j=t}^{T}c_{tj}y_{tj} + \sum_{t\in B}\sum_{j=t}^{T}(K_t+c_{tj}y_{tj}) + \sum_{t\in C}\sum_{j=t}^{T}My_{tj}$$

$$\text{subject to } \sum_{t=1}^{j}y_{tj}=r_j,\ j=1, 2, \cdots\cdots, T, \qquad (P2)$$

$$\sum_{j=t}^{T}y_{tj}\le u_t,\ t=1, 2, \cdots\cdots, T,$$

$$y_{tj}\ge 0,$$
$$t=1, 2, \cdots, T,\ j=t, t+1, \cdots\ T$$

여기서, $C_{tt}=c_t+K_t/\min\{r_t, u_t\}$ $t\in A$,

$C_{tt}=c_t$ $t\in B$,

$C_{tj}=c_t+\sum_{i=t}^{j-1}h_i$, $t\in A\cup B$, j=t+1, t+2, …, T

선형계획 문제(P2)를 풀어 y_{tj}, (t=1, 2, …, T, j=t, t+1, …, T)와 Z의 값을 얻을 수 있다. 그러나 여기서 얻어진 해는 실현가능해이다. 이 실현가능해를 통하여 단계적으로 최적해를 구한다.

실현가능한 해에 대하여 얻어진 Z의 값은 정확한 비용을 나타내지 않을 경우가 있다. 이 경우 원문제의 정확한 G(X) 값을 구하기 위하여 Z에 추가로 비용값을 조정하여야 한다. 문제(P2)를 푼 해에서 생산가능점으로 가정한 기간 t의 해를 생각한다. 다음의 (a), (b)경우가 발생하면 각각 비용조정을 하고, 그렇지않으면 정확한 비용이 반영된 경우로 비용조정을 하지 않는다.

(a) $y_{tt}=0$, $y_{tj}>0$, $j\in\{t+1, \cdots, T\}$이면, Z에 K_t를 더한다.

(b) $0<y_{tt}<\min\{r_t, u_t\}$이면, Z에 $(K_t-y_{tt}K_t/\min\{r_t, u_t\}$를 더한다.

즉, 이러한 비용조정을 통하여 실현가능해의 정확한 G(X)의 값이 얻어진다. 선형계획 문제(P2)를 풀었을 경우에 모든 생산가능점인 기간 $t(t\in A)$에 대하여 생산상황에 따라 다음과 같은 것이 발생하는 기간이 있으면 각각 분류한다.

$$E=\{t \mid y_{tt}=0\ ;\ y_{tj}>0 \text{ for } t\in A, \text{ some } j\in\{t+1, \cdots, T\}\},$$

$$F=\{t \mid 0<y_{tt}<\min\{r_t, u_t\}, \text{ for } t\in A\}.$$

그리고, 다음과 같이 비용조정을 한다.

$$G(X)=Z+\Delta Z$$

여기서, $\Delta Z=\sum_{t\in E}K_t+\sum_{t\in F}(K_t-y_{tt}K_t/\min(r_t, u_t\})$

문제(P1)에 대한 최적해를 $G(X^*)$라 한다. 그러면 최적해와 분지된 문제에서 구한값 Z, G(X) 사이의 관계는 $Z\leq G(X^*)\leq G(X)$를 만족한다.

이제까지 분지－한계 기법으로 문제를 푸는데 있어서, 각 분지된 문제에 대해 해를 구하는 방법으로 선형계획을 이용하는 것을 나타내었다.

지금부터 분지－한계 기법을 이용한 해법을 설명하기 위하여 다음과 같은 부호를 설명한다.

j=0: 생산상황이 비생산점인 경우를 나타낸다.

j=1: 생산상황이 생산점인 경우를 나타낸다.

S_j : 기간 s의 생산상황이 j(j=0, 1)인 경우를 나타낸다.

σ : 생산가능점인 기간으로부터 생산점 혹은 비생산점으로 결정된 기간을 나타낸다.

$s_j\sigma$: σ에 속한 기간은 생산점 혹은 비생산점의 여부가 이미 결정되었고, 이어 생산가능점인 기간 s의 생산상황을 j로 가정한 경우를 나타낸다.

$P^K(s_j\sigma)$: 분지단계 k에서 σ계획은 결정되었고, 생산가능점인 기간 s의 생산상황을 j로 가정한 문제를 나타낸다.

$B^L(\sigma)$: σ계획까지 비용함수값의 하한을 나타낸다.

B^U : 비용함수값의 상한을 나타낸다.

L : 계속하여 분지의 대상으로 고려하여야 하는 집합을 나타낸다.

분지(branch)하는 방법은 생산가능점이 생산점일 경우와 비생산점일 경우로 한다. 그러면 어느 기간부터 분지를 할 것인가? 이는 분지하기 직전의 문제에서 구한 해에서 구한다. L에 있는 문제들에서 하한값이 가장 적은 문제의 해에서 생산가능점이 다음의 것을 만족하는 기간을 s라 하고, 이 기간을 분지한다.

$$\min\{K_t(\min(r_t, u_t)-y_{tt})/\min\{r_t, u_t\} \mid y_{tt}<\min\{r_t, u_t\} \text{ and } \sum_{j=t+1}^{T} y_{tj}>0, \text{ for } t\in A\} \quad \cdots\cdots (3.3)$$

한계(bound)는 각 분지된 문제에서의 해를 구하여 문제(P1)의 최적해가 포함될 수 있는 하한값과 상한값을 찾는다. 문제에 대한 선형계획을 풀어, 하한 $B^L(s\sigma)=Z$과 상한 $B^U=\min\{B^U, G(X)\}$를 구한다.

다음은 각 단계에서 분지된 문제를 풀었을 때, 이 문제가 다음 단계에서 분지될 수 있는 대상으로 고려될 것인가를 결정하는 성질을 나타낸다.

분지의 제거 성질 :

문제 $P^{k+1}(s_0\sigma)$와 $P^{k+1}(s_1\sigma)$로부터 각각 구한 하한값 $B^L(s_0\sigma)$와 $B^L(s_1\sigma)$이 $B^U(s_1\sigma)$이 B^U보다 큰 것은 다음 단계의 분지의 대상에서 제거된다.

다음은 각 분지단계에서 최적해를 발견하기 위한 성질을 나타낸다.

최적해의 성질 :

문제 (P1)에 대한 최적해 $G(X^*)$는 각 분지된 문제내에서 $B^L(\sigma) \le G(X^*) \le B^U$과 정리 1을 만족한다. L에 문제중에서 가장 적은 하한값을 갖는 문제에서의 생산가능점 기간중에서 식(3.3)을 만족하는 기간이 존재하지 않으면, $B^L(\sigma)=B^u$이고 $\min\{B^L(\sigma)\}$인 σ계획이 최적해가 된다.

이제까지 설명한 바와 같이, 문제를 기간에 대하여 분지하여, 각 분지된 문제에 대하여 선형계획으로 해를 구하여 비교하는 절차를 단계적으로 계속하여 최적해를 구할 수 있다. 따라서 해법단계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

해법 단계 :

단계1 : $k=0$, $A=\{1, 2, \cdots\cdots, T\}$, $B=\phi$, $C=\phi$, $\sigma=\phi$로 놓고, 이와 관련된 문제를 $P^k(\sigma)$로 하여 L에 넣는다. 이 문제에 대하여 (P2)를 이용하여 풀어 Z, G(X)를 구한다. 그리고, $B^L(\sigma)=Z$, $B^U=G(K)$로 한다.

단계2 : L로부터 가장 적은 $B^L(\sigma)$을 갖는 문제 $P^k(\sigma)$를 제거한다. 만일 이 문제에서 $k=T$ 혹은 식(3.3)을 만족하는 기간이 존재하지 않으면 멈추고, L에 있는 문제에서 σ계획으로 나타난 문제 $p^k(\sigma)$의 해가 최적해이다. 만일 문제에서 $k \neq T$이고 식(3.3)을 만족하는 기간이 존재하면, 문제 $P^k(\sigma)$에서 구한 해에서 생산가능점 기간중에서 식(3.3)을 만족하는 기간 s를 구한다.

단계3 : 두개의 문제 $p^{k+1}(s_0\sigma)$, $p^{k+1}(s_1\sigma)$을 만든다.

(3.a) $P^{k+1}(s_0\sigma)$는 $A=A-\{S\}$, $B=B$, $C=C\cup\{S\}$로 하여 문제를 (P2)를 이용하여 풀어 Z, G(X)를 구한다. 만일 $Z<B^U$이면, $P^{k+1}(s_0\sigma)$를 L에 넣는다. 그리고, $B^L(s_0\sigma)=Z$, $B^u=\min\{B^u, G(X)\}$

(3.b) $P^{k+1}(s_1\sigma)$는 $A=A-\{S\}$, $B=B\cup\{s\}$, $C=C$로 하여 문제를 (P2)를 이용하여 풀어 Z, G(X)를 구한다. 만일 $Z < B^U$이면, $P^{k+1}(s_1\sigma)$를 L에 넣는다. 그리고, $B^L(s_1\sigma)=Z$, $B^U=\min\{B^U, G(X)\}$

(3.c) 단계 2로 되돌아간다.

4. 수치적 예제

아래와 같이 5-기간 동안의 생산비용(생산착수비용, 단위 생산비용), 재고유지비용, 각 기간의 생산량의 상한 및 수요량이 주어졌다.

t	1	2	3	4	5
K_t	12	11	10	12	8
c_t	2	2	1.8	2.2	1.9
h_t	1.2	1.2	1.0	1.4	0.9
u_t	10	5	12	8	10
r_t	5	5	9	5	8

해의 풀이과정의 제약조건은 모두 동일하므로, 여기서는 초기의 목적함수의 비용계수, 각 계산과정에서 문제와 실현가능해, Z, G(X), 그리고 L, 상한값과 하한값 나타내고자 한다. 각 단계에서 목적함수의 비용계수 변화는 문제 (P2)에 따라서 정해진다.

(1) 초기 비용계수와 그의 해를 나타낸다.

비용계수 : $c_{11}=4.4$, $c_{12}=3.2$, $c_{13}=4.4$, $c_{14}=5.4$, $c_{15}=6.8$, $c_{22}=4.2$, $c_{23}=3.2$, $c_{24}=4.2$, $c_{25}=5.6$, $c_{33}=2.9111$, $c_{34}=2.8$, $c_{35}=4.2$, $c_{44}=4.6$, $c_{45}=3.6$, $c_{55}=2.9$

해 : $y_{11}=5$, $y_{12}=5$, $y_{23}=2$, $y_{33}=7$, $y_{34}=5$, $y_{55}=8$. 그러므로 $x_1=10$, $x_2=2$, $x_3=12$, $x_4=0$, $x_5=8$. $Z=101.98$, $G(X)=115.20$. $B^L(\phi)=101.98$, $B^U(\phi)=115.20$. $L=\{P^0(\phi)\}$

문제 $P^0(\phi)$의 해에서, 식(3.3)에 의해 s=3이다.

문제 $p^1(3_0)$:

해 : 실현가능해가 없다.

문제 $P^1(3_1)$:

해 : $y_{11}=5$, $y_{12}=5$, $y_{23}=2$, $y_{33}=7$, $y_{34}=5$, $y_{55}=8$. 그러므로 $x_1=10$, $x_2=2$, $x_3=12$, $x_4=0$, $x_5=8$. $z=104.20$, $G(X)=115.20$.

그러므로, $L=\{P^1(3_1)\}$, $B^L(3_1)=104.20$, $B^U=115.20$.

(2) 문제 $P^1(3_1)$의 해에서, 식(3.3)에 의해 s=2이다.

문제 $P^2(2_03_1)$:

해 : $y_{11}=5$, $y_{12}=5$, $y_{33}=9$, $y_{34}=3$, $y_{44}=2$, $y_{55}=8$. 그러므로, $x_1=10$, $x_2=0$, $x_3=12$, $x_4=2$, $x_5=8$. $Z=105$, $G(X)=112.2$

$Z: 105<115.20=B^U$ 이므로, $L=\{P^2(2_03_1)\}$, $B^L(2_03_1)\}=105$, $B^U=112.2$.

문제 $P^2(2_13_1)$:

해 : $y_{11}=5$, $y_{22}=5$, $y_{33}=9$, $y_{34}=3$, $y_{44}=2$, $y_{55}=8$. 그러므로, $x_1=5$, $x_2=5$, $x_3=12$, $x_4=2$, $x_5=8$. $Z=110$, $G(X)=117.2$

$Z=110<112.2=B^U$ 이므로, $L=\{P^2(2_03_1), P^2(2_13_1)\}$, $B^L(2_13_1)=110$, $B^U=112.2$

(3) (a)문제 $P^2(2_03_1)$와 $P^2(2_13_1)$의 하한값이 $B^L(2_03_1)<B^L(2_13_1)$이므로, 문제 $P^2(2_03_1)$에서, 식 (3.3)에 의해 s=4이다.

문제 $P^3(4_02_03_1)$:

해 : 실현가능해가 없다.

문제 $P^3(4_12_03_1)$:

해 : $y_{11}=5$, $y_{12}=5$, $y_{33}=9$, $y_{44}=5$, $y_{55}=8$. 그러므로, $x_1=10$, $x_2=0$, $x_3=9$, $x_4=5$, $x_5=8$. $Z=110.4$, $G(X)=110.4$

$Z=110.4<112.2=B^U$ 이므로, $L=\{P^2(2_03_1), P^3(4_12_03_1)\}$, $B^L(4_12_03_1)=110.4$, $B^U=110.4$

(b) 문제 $P^2(2_13_1)$해에서 식(3.3)에 의해 s=4이다.

문제 $P^3(4_02_13_1)$:

해 : $y_{11}=5$, $y_{12}=2$, $y_{22}=3$, $y_{24}=2$, $y_{33}=9$, $y_{34}=3$, $y_{55}=8$. 그러므로, $x_1=7$, $x_2=5$, $x_3=12$, $x_4=0$, $x_5=8$. $Z=111.6$, $G(X)=111.6$.

$Z=111.6<110.4=B^U$ 이므로, 이 문제는 제거된다.

문제 $P^3(4_12_13_1)$:

해 : $y_{11}=5$, $y_{12}=0$, $y_{22}=5$, $y_{33}=9$, $y_{44}=5$, $y_{55}=8$, 그러므로 $x_1=5$, $x_2=5$, $x_3=9$, $x_4=5$, $x_5=8$. $Z=115.4$, $G(X)=115.4$

$Z=115.4>110.4=B^U$이므로, 이 문제는 제거된다.

그러므로, $L=\{P^3(4_12_03_1)\}$, $B^L(4_12_03_1)=110.4$, $B^U=110.4$.

L에 있는 문제 $P^3(4_12_03_1)$의 해에서, 식(3.3)을 만족하는 기간 S가 존재하지 않으므로 문제 $P^3(4_12_03_1)$의 값 $B^U(4_12_03_1)$가 가장 적은 값을 갖는다. 그러므로 최적해는 $x_1=10$, $x_2=0$, $x_3=9$, $x_4=5$, $x_5=8$ 이고, 이때 비용은 110.4이다. 기간 1과 5는 해에 나타난 바와같이 생산점을 이루고 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 기존의 동적 생산계획 문제에 대하여 새로운 방법으로 분지-한계 기법과 선형계획을 이용한 해법을 개발하였다. 여기서는 해법으로 분지-한계기법을 이용하였으나, 분지된 문제에서 효율적으로 선형계획의 비용계수를 정하고 분지기간을 선택함으로 분지되는 문제수를 줄일 수 있었다. 매 기간 생산량에 제한이 주어진 문제에 대하여 해법을 개발하였다. 본연구에서의 방법은 실제 문제를 해결하는데 있어서 유용하게 이용될 수 있을 것이다. 더불어 본 문제외에 생산계획 문제의 여러 모형에 대하여도 비슷하게 적용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Baker, K. R., Introduction to sequencing and scheduling, Wiley(1974).
2. Baker, K. R., P. Dixon, M. J. Magazine and E. A. Silver, "An algorithm for the dynamic lot-size problem with time-varying production

capacity constraints," Management Sci., Vol24, 1710−1720(1978).

3. Bensoussan A., M. Crouhy and J. M. Proth, Mathematical theory of production planning, North-Holland(1984).
4. Bitran, G. B. and H. H. Yanasse, "Computational complexity of the capacitated lot size problem," Management Sci. Vol. 28, 1174−1186(1982).
5. Erenguc, S. C. and S. Tufekci, "A branch and bound algorithm for a single-item multi-source dynamic lot sizing problem with capacity constraints,"IIE Transactions, Vol.19, 73−80(1987).
6. Florian, M. and M. Klein, "Deterministic production planning with concave costs and capacity constraints," Management Sci., Vol.18, 12-20(1971).
7. Jagannath, R. and M. R. Rao, "A class of deterministic production planning problems," Management Sci., Vol.19, 1295−1300(1973).
8. Johnson, L. A. and D. C. Montgomery, Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control, John Wiley(1974).
9. Lambert, A. M. and H. Luss, "Production planning with time-dependent capacity bounds," European J. of Operational Res., Vol.9, 275-280(1982)
10. Love, S. F., "Bounded production and inventory models with piecewise concave costs," Management Sci., Vol.20, 313-318(1973)
11. Sung, C. S. and S. H. Chang, "Capacity-constrained multi-product production planning model," J. of the Operations Res. Soc. of Japan, Vol.29, 232-245 (1986).
12. Swoveland, C., "A deterministic multi-period production planning model with piecewise concave production and holding backorder costs," Management Sci., Vol.21, 1007−1013(1975)
13. Wagner, H. M. and T. M. Whitin, "Dynamic version of the economic lot size model," Management Sci., Vol.5, 89-96 (1958).
14. Zangwill, W.I., "A deterministic multi-product multi-facility production and inventory model," Operations Res., Vol. 14, 486−507(1966).
15. Zangwill, W. I., "A backlogging inventory model and a multi-echelon model of a dynamic lot-size production system-a network approch," Management Sci., Vol.15, 506-527(1969).