Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 19, No.2, June., 1993.

0-1 배낭 제약식을 갖는 오목 함수 최소화 문제의 해법

An Algorithm for the Concave Minimization Problem under 0-1 Knapsack Constraint

오세호* · 정성진**

S.H.OH* and S.J.Chung**

Abstract

In this study, we develop a B&B type algorithm for the concave minimization problem with 0-1 knapsack constraint. Our algorithm reformulates the original problem into the singly linearly constrained concave minimization problem by relaxing 0-1 integer constraint in order to get a lower bound. But this relaxed problem is the concave minimization problem known as NP-hard. Thus the linear function that underestimates the concave objective function over the given domain set is introduced.

The introduction of this function bears the following important meanings.

Firstly, we can efficiently calculate the lower bound of the optimal object value using the conventional convex optimization methods.

Secondly, the above linear function like the concave objective function generates the vertices of the relaxed solution set of the subproblem, which is used to update the upper bound.

The fact that the linear underestimating function is uniquely determined over a given simplex enables us to fix underestimating function by considering the simplex containing the relaxed solution set.

The initial containing simplex that is the intersection of the linear constraint and the nonnegative orthant is sequentially partitioned into the subsimplices which are related to subproblems.

1. 서 론

본 논문에서 다루고자 하는 문제는 아래와 같이 목적함수는 오목 함수이고 한개의 1차식을 제약조건식으로 갖는 오목 함수 0-1 정수계획문제이다.

* 청주대학교 산업공학과

** 서울대학교 산업공학과

$$\min f(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(1-1)}$$

(CKP)

$$\text{s.t} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \ \ (a_i : \text{positive}) \cdots \text{(1-2)}$$

$$x_i = 1 \text{ or } 0 \ \ i = 1, \cdots, n \ \ \cdots\cdots \text{(1-3)}$$

$f(x)$: 오목 함수

0-1 배낭문제는 최초로 NP-complete임이 증명된 조합 최적화 문제(combinatorial optimization problem)중의 하나인데 문제(CKP)도 목적함수가 오목함수인 배낭문제이기 때문에 이 범주에 속한다고 볼 수 있다.

고정비용문제, bilinear programming, nonlinear network flow problem, 물류 시스템[20] 등에서 다루어지는 모형으로 목적 함수의 형태에 맞추어 접근 방법들이 시도되었다. More, J. & Vavasis, S.A[15]는 f가 완전 오목(strictly concave) 이면서 분해가능 2차함수(separable quadratic)인 문제에서 부분 최적해를 O(nlogn)안에 판별할 수 있는 해법을 제시하였다. Pardalos, P.M & Kovoor, N[17]는 목적 함수를 부분 선형 함수로 근사시켜 근사해법을 개발하였다. Kalantari & Bagchi[11]는 2차 오목함수 0-1 최소화 문제를 2차 오목함수 최소화문제로 변환하여 변수의 값을 0 혹은 1로 고정시킴으로써 만들어지는 부문제들을 Kalantari & Rosen[12]의 해법에 적용시키는 방법을 제시하였다. Benson & Erenguc[2]은 일반적인 오목함수 정수계획모형에 대한 최적해법을 제시하였다.

(CKP)는 목적 함수가 비선형(nonlinear)인 점에서 목적함수가 1차식으로 나타나는 0-1 배낭문제와 구별되며 더구나 오목함수인 점에서 목적함수가 볼록함수 형태로 나타나는 최적화 문제와 성격을 달리한다.

배낭문제의 해법들은 0-1 정수조건을 완화시킨 선형계획 문제를 부문제(subproblem)로 풀어서 한계계산을 하지만 목적 함수가 오목함수인 경우에는 0-1 조건을 완화시킨다 하더라도 전통적인 비선형 최소화 기법(nonlinear optimization methods)으로는 한계계산을 할 수 없다. 부분 최적해(local optimal solution)가 전체 최적해(global optimal solution)라는 보장을 할 수 없기 때문이다. 그러나 선형 제약식을 갖는 오목 함수 최소화 문제는 최적해가 해집합의 정점에서 구해진다. 이러한 사실을 바탕으로 완화된 선형제약식하에서 오목목적함수를 하한 추정(underestimate)하면서 볼록 함수 최소화 기법을 적용시킬 수 있는 함수를 목적함수로 하여 한계연산을 수행하는 분지한계해법을 개발하고자 한다. 본 연구에서는 1차식을 하한추정 함수(underestimating function)로 채택하여, 부문제의 해집합을 포함하는 단체상에서 유일하게 고정시키고 단체(simplex)를 세분시켜 나가는 방법을 모색하였다.

2장에서는 한계연산을 구축하기 위해 오목함수 최소화 문제의 해법에 사용되는 일반적인 접근 방법에 대하여 살펴보았다. 3장에서는 (CKP)의 최적해를 구하는 해법을, 4장에서는 해법을 보완하기 위해 절단 제약식을 도입하는 방안에 대하여 논의하였다. 마지막으로 5장에서는 해법의 기대효과와 추후연구방향을 제시하였다.

2. 하한 추정 함수

선형제약식을 갖는 일반적인 오목 최소화 문제의 해법들은 목적함수값을 단조 감소시키는 해의 수열(sequence)을 찾아내는 볼록함수 최소화기법들과는 달리, 분지한계기법을 골격으로 하여 한계전략을 구체화하는 과정에서 정점해를 낳는 부 문제를 설정하여 하한값을 개선시키는 과정으로 짜여져 있다. 부 문제의 목적함수는 원 목적함수인 오목함수를 해집합 상에서 하한추정하는 선형식이나 부분 선형식을 도입하여 선형계획문제의 해법인 단체법의 적용이 가능하도록 하고 있다. 이때 목적함수식이 1차식이므로 최적해는 가능해 집합의 정점 중의 하나이고 최적 목적함수값의 하한값이 구해진다. 또한 이 과정에서 얻어진 정점들을 오목목적함수에 대입하여 최적 목적함수값의 상한값을 계산할 수 있다. 따라서 정점이 발견될

때마다 상·하한값을 수정하는 분지한계 해법을 생각해 볼 수 있다. 하지만 최대한 정점 갯수만큼의 부분 최적해(local optimum solution)들이 존재한다는 사실이 이론적으로 효율적인 해법의 개발을 어렵게 하고 있다. 하한추정 함수는 다음과 같은 성질을 만족하기 때문에 최적함수 값에 대한 하한값을 제공한다.

정의 2.1 : 함수 g가 다음 식을 만족시키면 Ω상에서의 f의 하한 추정 함수(underestimating function)라고 한다.

$$g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

하한 추정 함수는 효율적인 한계전략을 세우는데 유용하게 사용된다. g를 구하는데 필요한 계산량은 해법의 효율에 커다란 영향을 주기 때문에 원 목적 함수 f에 근접하고 다루기 쉬운 함수를 찾아야 할 것이다.

Taha[20] 등은 선형하한추정함수(linear underestimating function)를 사용하였는데 이 함수가 부분 최적해에서 해집합과 접하기 때문에 해집합의 일부를 잘라내는 절단평면을 쉽게 만들 수 있는 점을 이용하였다. 좀 더 강력한 하한추정 함수로 볼록덮개함수(convex envelope)를 생각해 볼 수 있다. 이것은 볼록 유계 다면체(convex polytope) 상에서 목적함수 f에 가장 가깝게 접근된 볼록 함수이다.

정의 2.2 : 다음을 만족시키는 함수 $\Gamma(x)$를 볼록 유계 다면체 P상에서 함수 f의 볼록 덮개 함수(convex envelope)라고 한다.

(i) $\Gamma(x)$는 볼록 유계 다면체 P 상에서 볼록이다.
(ii) $\Gamma(x) \leq f(x)$, $\forall x \in P$
(iii) $g(x) \leq \Gamma(x)$, $\forall x \in P$
이 성립한다.

Falk & Hoffman [4]은 오목 함수 최소화 문제에 Falk & Solant[5]는 분해가능 비볼록(separable nonconvex) 함수 최소화에 부분 선형 함수(piecewise linear function)로 나타나는 볼록 덮개함수를 하한추정 함수로 사용하였다. Benson[1]은 n-차원 단체(n-dimensional simplex)위에서는 부분 선형 함수가 선형 하수가 되는 사실을 이용하여 볼록 덮개 함수를 구했다. 실제로 n차원 공간에서 (n+1)개의 점독립(affinely independent)인 점들, υ_0, υ_1, …, υ_n로 주어진 n차원 단체상에서는 선형방정식(PL)을 풀어 1차식인 볼록덮개함수를 얻을 수 있다.

$$\text{(PL)} \quad \begin{aligned} &\omega\upsilon_i + \gamma = f(\upsilon_i),\ i=0, 1, \cdots, n \\ &\omega, \upsilon_i \in R^n,\ \gamma \in R \end{aligned}$$

벡터 ω와 γ를 구하게 되면 볼록덮개함수는 아래와 같다.

$$\Gamma(x) = \omega x + \gamma$$

1차식인 볼록 덮개함수를 하한추정함수로 채택하였을 때 부문제를 생성시키는데 필요한 단체를 세분시키는 방법을 고려해야 할 것이다.

Benson[1]은 부문제의 최적해와 이점을 포함하고 있는 n-차원 단체의 점독립 점들 즉, 정점들과 하나씩 교환함으로써 새로운 단체를 생성시켰다. 볼록덮개함수는 n-차원 단체의 정점을 알면 구할 수 있지만 작은 단체로(subsimplices) 분할해 나갈수록 많은 기억용량이 필요하고 분할의 중심이 되는 점의 위치를 찾기위해 1차 연립방정식을 풀어야 하는 단점이 있다.

3. 오목함수 배낭 문제

3.1 정수 조건을 완화시킨 문제

식 (1-3)을 식(3-3)로 완화시킨 문제를 (RCKP)라고 하자.

$$\min f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(3-1)}$$

$$\text{(RCKP)} \quad \text{s.t} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \ (a_i : \text{positive}) \quad \cdots\cdots\cdots (3\text{-}2)$$

$$0 \le x_i \le 1, \ i=1, \cdots, n \quad \cdots\cdots\cdots (3\text{-}3)$$

$f(x)$: 오목 함수

(RCKP)의 해집합은 볼록 다면체이기 때문에 해집합의 정점들 중의 하나가 (RCKP)의 최적해이다. 그리고 문제(CKP)의 최적해는 (3-3)의 입방체의 정점중에서 발견된다. 따라서 다음의 정리가 성립한다.

정리 3.1 x^C : 문제(CKP)의 최적해
x^R : 문제 (RCKP)이 최적해라면
$f(x^R) \le f(x^C)$이다.

[증명] V_I : (RCKP)의 해집합의 정수해 정점 집합
V_N : (CKP)의 해집합이라면

$$f(x^R) = \min\{f(x), \quad x \in V_I \cup V_N\}$$
$$\le \min\{f(x), \ x \in V_I\} = f(x^C)$$

그러므로 $f(x^R) \le f(x^C)$이다.

Q.E.D.

정리 3.1에 의해 (RCKP)의 최적해가 정수해이면 (CKP)의 해가 되지만 그렇지 않으면 이 점을 배제시킬 수 있는 방안이 모색되어야 할 것이다.

3.2 부문제 생성

하한추정함수를 결정할 때는 어떠한 다면체 상에서 구할 것인지, 그리고 다면체를 정점 혹은 선형 제약식의 집합으로 표현할 것인지를 함께 고려한다. 본 해법에서는 하한추정함수로 볼록덮개함수를 채택하고 단체상에서 고정시키는 방법을 취했다. 만약 (RCKP)의 해집합 상에서 볼록덮개함수 Γ를 구할 수 있다면 즉 (RCKP)의 해집합의 정점을 모두 알면 한개의 선형계획문제를 풀어 (RCKP)의 최적해를 구할 수 있다.

그러나 이러한 작업은 무의미하기 때문에 해집합을 포함하는 다면체를 잡아 이 다면체 상에서 비교적 적은 계산량으로 하한추정함수를 구한다. 볼록덮개함수 $\Gamma(x)$가 다면체 P상에서 고정되고 해집합 Ω가 다면체 P의 부분집합이라면 다음 정리가 성립한다.

정리 3.2 함수 Γ를 다면체 $P(\supseteq\Omega)$상에서 구한 f의 볼록덮개함수라면

$$\Gamma^* = \min_{x\in\Omega} \Gamma(x) \le \min_{x\in\Omega} f(x) = f^*$$

(최적 목적함수 값)

[증명] $\Gamma(x) \le f(x), \ \forall \ x \in P$ 이므로

$$\min_{x\in\Omega}(x) \le \min_{x\in\Omega} f(x) \quad \text{Q.E.D.}$$

해집합 Ω를 포함하고 쉽게 볼록덮개함수를 구할 수 있도록 다면체 P를 잡으면 정리 3.2에 의해 한계계산을 효율적으로 수행할 수 있다.

n-차원 단체로 주어진 다면체 위에서는 $\Gamma(x)$가 유일하게 1차식으로 구해진다. 이것은 문제(PL)을 풀어서 얻을 수 있다. 문제 (RCKP)의 1차식이 각 좌표축과 만나는 점들이 해집합을 포함하는 단체의 장점들이 되기 때문에 해집합을 포함하는 초기 다면체로 잡는다.

1차식 볼록덮개함수를 목적함수로 하여 문제 (RCKP)의 해집합 위에서 풀면 하한값과 정점해를 얻는다. 이 해의 성분이 모두 정수가 아니면 문제(CKP)의 해가 될 수 없으므로 이것을 배제시켜 가면서 다른 정점을 찾는 방안을 강구해야한다. 본 해법에서는 한개의 변수를 고정시킴으로써 부문제를 세분시키는데 문제 (RCKP)의 해집합이 골격을 이루는 입방체의 구조상 한개의 변수를 0과 1로 고정시켜 만들어지는 초평면 위에 문제(CKP)의 해들이 모두 놓이게 되어 한 차원 낮은 단체를 쉽게 구할 수 있다. 따라서 각 부문제의 목적함수를 구하기 위한 (PL)의 크기가 점차 줄어든다.

k차원 공간에서 k차원 단체가 주어지면 (PL)을 풀어 1차식인 볼록덮개함수를 구할 수

있고 이 함수를 목적함수로 하는 부문제를 만든다. 이 단체는 변수 중의 하나를 분지변수로 선택하여 0 혹은 1로 고정시킴으로써 k-1 차원 단체로 세분된다. 분지 변수를 고정시키는 것은 초평면을 만드는 것을 의미한다.

정리 3.3

$v_0, v_1, \cdots, v_n$: 점 독립(affinely independent)

n-차원 단체

$S=\text{conv}\{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n\}\subset R^n$

정점 v_0를 다른 정점들과 분리시키면서 정점들을 포함하지 않는 초 평면을 H라고 하자.

$$S_H=H\cap S$$

S_H는 (n-1)−차원 단체이다.

[증명] v_0와 v_i를 지나는 ray가 H와 만나는 점을

$v'_i=k_i(v_i-v_0)$라면

$S_H=\text{conv}\{v'_1, v'_2, \cdots, v'_n\}\subset R^{n-1}$이다.

$p_1(v'_i-v'_2)+p_2(v'_i-v'_3)+\cdots+p_{n-1}(v'_i-v'_n)=0$

위 식에 $v'_i=k(v_i-v_0)$를 대입하여 정리하면

$p_1+p_2+\cdots p_{n-1}=0$

$pk_2=p_2k_3=\cdots p_{n-1}k_n=0$

$k_i\fallingdotseq 0,\ i=1, 2, \cdots, n$ (H가 정점을 포함하지 않으므로)

그러므로 $p_i=0,\ i=1, 2, \cdots, n-1$이다.

따라서 $v'_1, v'_2\cdots v'_n$는 점 독립이고 S_H는 (n-1)−차원 단체이다. Q.E.D

초평면 H를 임의 변수를 1로 고정시켜 만들면 S_H는 (n-1)-차원 단체이거나 한개의 정점이거나 공집합이 된다. 0으로 고정시켜 만든 초평면은 S와 (n-1)-차원 단체를 공유한다.

정리 3.4 n-차원 단체 : $S\subset R^n$ $(\Omega\subset S)$

$x_i=0$, $x_i=1$을 만족시키는 초평면을 각각 H_0, H_1이라면 S_0은 (n-1)-차원 단체이고, S_1는 (n-1)-차원 단체이거나 한개의 정점이거나 공집합이다.

$$S_0=H_0\cap S,\ S_1=H_1\cap S$$

[증명] 초평면 H_1이 a_ie_i를 다른 정점들과 분리시키면 정리 3.3에 의해 S_1은 (n-1)-차원 단체이다. H_1이 a_ie_i를 포함하면 한개의 정점이고 만나지 못하면 공집합이다. S_0는 S를 초평면 H_0 위에 직교투영 시킨집합이므로 (n-1)-차원 단체이다. Q.E.D

초평면 H_1, H_0와 단체 S와의 공통집합이 부문제의 단체가 된다. S_0와 S_1은 (RCKP)의 비정수해 정점들의 일부를 포함하고 있지 않기 때문에 부문제가 생성되면서 이러한 점들이 배제된다.

충정리 3.5 $\Omega(\subset R^n)$의 정수해 정점은 집합 $S_0\cup S_1$에 포함된다.

[증명] 임의의 i에 대해서

$\{x \mid 0\leq x_i\leq 1,\ x\in R^n\}=H_0\cup H_1\cup\{x \mid 0<x_i<1,\ x\in R^n\}$

집합 $\{x \mid 0<x_i<1,\ x\in R^n\}$은 x_i가 분수이므로 모든 변수값이 정수인 정점을 포함하지 않는다.

$S_0\cup S_1=\Omega\cap(H_0\cup H_1)$이므로 $S_0\cup S_1$에 포함된다. Q.E.D

정리 3.6 $S_2\subset R^p$, $S^1\subset R^q$, $p\leq q$

S^1, S^2를 $S^1\supseteq S^2$를 만족시키는 단체라고 하자.

Γ_1, Γ_2를 각각 S^1, S^2상에서 구한 오목함수 f의 볼록덮개함수라면

$$\Gamma_1(x)\leq\Gamma_2(x),\ \forall\ x\in S^2$$

가 성립한다.

[증명] $v^0, v^1, \cdots, v^p$를 S^2의 정점이라면 S^2의 임의의 점은

$$x=\sum_{i=1}^{p} a_iv^i,\ \sum_{j=1}^{p} a_j=1,\ a_j\geq 0,\ \forall\ j$$

으로 표현된다.

$\Gamma_1(v^i)\leq\Gamma_2(v^i),\ \forall\ i=1, \cdots, p$

$\Gamma_1(v^i)\leq\Gamma_2(v^i)=f(v^i),\ \forall\ i=1, \cdots, p$

Γ는 1차식이므로

$$\Gamma_1(x)=\sum_{i=1}^{P} a_i\,\Gamma_1(\boldsymbol{v}^i)\leq\sum_{i=1}^{P} a_i\,\Gamma_2(\boldsymbol{v}^i)$$

$$=\Gamma_2(x),\ \forall\ x\in S^2 \qquad \text{Q.E.D.}$$

종정리 3.7 $S_0=H_0\cap S$

$S_1=H_1\cap S$ 이고

Γ, Γ_0, Γ_1을 각각 단체 S, S_0, S_1상에서 구한 f의 볼록 덮개 함수라면 다음 식이 성립한다.

$\Gamma(x)\leq\Gamma_0(x)$, $\forall x\in S_0\cap\Omega$

$\Gamma(x)\leq\Gamma_1(x)$, $\forall x\in S_1\cap\Omega$

[증명] 정리 3.6에 의해

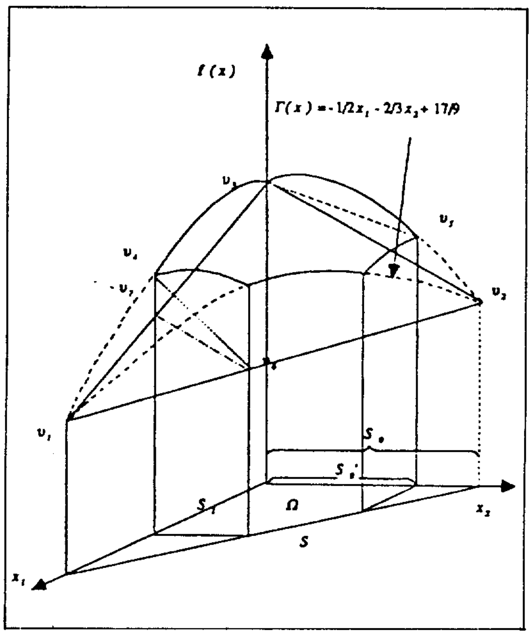

그림 1. x_1을 0과 1로 고정시켰을 때 생성된 단체상에서의 볼록덮개함수

$\Gamma(x)\leq\Gamma_0(x)$, $\forall x\in S_0$

$\Gamma(x)\leq\Gamma_1(x)$, $\forall x\in S_1$

$S_0\cap\Omega$와 $S_1\cap\Omega$는 각각 S_0와 S_1의 부분집합이므로 성립 Q.E.D

종정리 3.7은 부 문제가 생성될수록 하한값이 개선됨을 보여준다.

간단한 예제를 그림으로 살펴 보자.

예제 3.1

min $f(x)=1/4x_1^2-(x-1/3)^2+2$

s.t $2x_1+3x_2\leq 4$

$x_i=0$ or 1

S는 1차 제약식과 비음 상한의 공통집합으로 만든 2차원 단체이다. x_1을 분지변수로 하여 1로 고정시키면 S_1을 0으로 고정시키면 S_0을 얻는다. 이때 S_0, S_1은 모두 1차원 단체들이다. S상에서의 볼록덮개함수는 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$를 포함하는 초평면이다. S_0, S_1상에서의 볼록덮개함수는 각각 $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$와 $\boldsymbol{v}_6$, $\boldsymbol{v}_4$를 통과하는 직선이다. S_1상에서 보면 $\boldsymbol{v}_6$, $\boldsymbol{v}_4$를 통과하는 직선은 $\boldsymbol{v}_7$, $\boldsymbol{v}_6$를 통과하는 직선보다 크거나 같은 값을 갖는다. 그러므로 단체가 세분될수록 하한값이 개선됨을 알 수 있다.

3.3 해 법

3.3.1 단체 결정과 볼록덮개함수 결정

분지변수가 x_j이고 q-차원 단체로부터 q-1 차원 단체를 생성시키는 경우를 살펴보자. $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_q$를 단체의 점독립인 점점들이라 하고 $\boldsymbol{v}_0$가 초평면 H_1에 의해 분리된다면 $\boldsymbol{v}_0$와 다른 점들간의 선분식은 (3-4)와 같다.

$$t\boldsymbol{v}_0+(1-t)\boldsymbol{v}_i,\ \mathrm{i}=1\cdots\mathrm{n} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}4)$$

j번째 성분이 1이 되도록 t를 고정시키면 q개의 점독립인 정들을 얻는다.

3.3.2 분지 전략과 부문제 선택 기준

1차 제약식의 계수가 다른 계수보다 상대적으로 크거나 작은 계수를 선택하면 가능성(feasibility) 여부만 조사하여 부문제의 정의역 공간의 차원을 줄일 수 있다. 그리고 제약식 평면의 기울기가 크거나 작은 방향의 변수가 고정됨으로써 보다 많은 비정수해 정점들이 배제될 가능성이 높아진다.

따라서 다음과 같은 분지전략을 세울 수 있다.

분지전략

I. x^k(k번째 연산에서 얻은 부문제의 해)의 각 변수들이 정수이면 Γ의 계수 중에서 가장 큰 값, 또는 작은 값에 해당하는 변수를 분지 변수로 선택

II. x^k의 각 변수들이 정수이면 성형 제약식의 계수 중에서 가장 작은 값과 두번째로 작은 값의 차와 가장 큰 값과 두번째로 큰 값의 차를 비교하여 전자가 크면 계수가 가장 작은 변수를, 후자가 크면 계수가 가장 큰 변수를 분지 변수로 선택

선택기준

I. 단체의 차원이 큰 순서로 선택

II. 생성된지 오래된 순서로 선택

3.3.3 해법의 수렴

정리 3.8 f_k, Γ_k를 각각 k번째 연산까지 개선된 최적 목적함수값 f^*의 상·하한값이라고 할 때 위의 분지 전략과 선택기준을 채택하면

$$\Gamma_1 \leq \Gamma_2 \leq \cdots \leq f^* \leq f_2 \leq f_1$$

이고 해법은 유한번 안에 종결된다.

[증명] 정리 3.1에 의해 $\Gamma_j \leq f^*$
정리 3.6에 의해 $\Gamma_j \leq \Gamma_{j+1}$
f_k는 단조 감소
최악 상황으로 n번째로 모든 변수가 고정된다면 단체는 1개의 점이므로 $\Gamma_n = f^* = f_n$이 성립한다. Q.E.D

3.3.4 해법의 절차와 수치 예제

해법

용어정의 :

F_0^N : 부문제 N에서 0으로 고정되어 있는 변수들의 집합

F_1^N : 부문제 N에서 1로 고정되어 있는 변수들의 집합

L.B^N: 부문제 N에서의 하한값

U.B^N: 부문제 N에서의 상한값

x^{LP} : 부문제의 최적해

f^N : N번째 부문제 연산까지 개선된 상한값 (incumbent value)

Ψ : 단체목록집합

단계 0) 초기화, N=0

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

위의 선형식이 각 좌표축과 만나는 점과 원점을 정점으로 하는 단체를 초기 단체 S^0로 잡아 단체 목록에 등록한다.

$f^0 = f(0)$, $F_1^N = F_0^N = \phi$

단계 1) 단체 선택

$\Psi = \phi$이면 최적해 발견, f^{N-1}의 값을 주는 해가 최적해 아니면 선택 기준에 의해 Ψ에서 단체 S^N을 선택한다.

단계 2) 부문제의 목적함수 고정

S^N의 정점을 문제(PL)에 대입하여 볼록덮개함수를 구한다.

$\Gamma(x) = \omega x + \gamma$

단계 3) 분지 변수 선택 및 단체 생성

$x^{LP} = \arg\min \Gamma(\Omega^N)$, $\Omega^N = S^N \cap B$

F_1^N와 F_0^N에 속하지 않은 변수중에서 선택 기준에 의해 분지 변수 선택

f^N, L.B^N, U.B^{N}을 계산

$f^N \leq$L.B^{N}이면 N=N+1로 놓고 단계 1)로 간다.

아니면 $S_0^N = S^N \cap \{x \mid x_j = 0\}$

$S_1^N = S^N \cap \{x \mid x_j = 1\}$

S_0^N, S_1^N을 단체목록집합 Ψ에 등록하고 N=N+1로 놓고 단계 1)로 간다.

예제 3.2

min $f(x) = f(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 1/2$
$(x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3)$
s.t $4x_1 + 3x_2 + 9x_3 \leq 12$
$x_i = 0$ or 1

1회

S^0 : (0,0,0),(3,0,0,)(0,4,0),(0,0,4/3)
$\Gamma(x) = -1/2x_1 - 5x_2 - 1/3x_3$

$x^{LP}=(1,1,5/9)$
분지변수 : x_3
$L.B^1=-307/54$, $U.B^1=f^1=1$
S_0^1 : (0,0,0),(3,0,0),(0,4,0)
S_1^1 : (0,0,1),(3/4,0,1),(0,1,1)

2회

S_0^1를 선택
$\Gamma(x)=-1/2x_1-5x_2$
$x^{LP}=(1,\ 1,\ 0)$
분지 변수 : x_1
$L.B^2=-11/2$. $U.B^2=f^2=-1/2$
S_1^2 : (1,0,0),(1,8/3.0),
S_1^2 : (0,0,0),(0,4,0)

3회

S_1^1를 선택
$\Gamma(x)=5/8x_1+5/2x_2$
$x^{LP}=(0,\ 0,\ 1)$
$L.B^2=0$, 분지끝

4회

S_1^2를 선택
$\Gamma(x)=-4x_2+1/2$
$x^{LP}=(1,\ 1,\ 0)$
$L.B^4=-4$, $U.B^4=1/2$, $f^4=-1/2$

5회

S_1^2를 선택
$\Gamma(x)=-5x_2$
$x^{LP}=(0,\ 1,\ 0)$
$L.B^5=-5$, $U.B^5=f^5=-1/2$
최적해 : (0, 1, 0)

4. 유효 절단 부등식의 도입

그림 1에서 보면 v_3, v_2와 v_3, v_5를 통과하는 직선은 S_0와 S'_0상에서 구한 볼록덮개함수인데 전자가 후자보다 목적함수에 근접한 볼록덮개함수이다. S'_0는 S_0에서 정수를 포함하지 않는 일부를 잘라 축소시킨 단체이다. 그러므로 볼록덮개함수를 구하기 전에 먼저 단체를 축소시킬 수 있다면 하한값은 보다 개선될 수 있음을 보여준다.

해법의 효율성 척도는 볼록덮개함수와 오목목함수값의 차, 그리고 한계 연산이 수행되는 부 문제 갯수로 나타내 볼 수 있다. 따라서 해법의 효율을 높이기 위해서는 볼록덮개함수를 구하기 위해 고려되는 단체를 축소시키는 방법과 부 문제의 해집합의 정점이 정수점이 되도록 비정수해 정점을 잘라내는 방법을 강구해야 할 것이다.

이러한 방법들 중의 하나가 (CKP)의 가능해가 누락되지 않는 범위에서 절단 제약식을 도입하는 방법이다.

정의 5.1 정수해 관점에서의 유효부등식 (valid inequality w.r.t integer solution)
주어진 다면체 P에 대하여 아래의 식이 성립하면 이 부등식을 유효 부등식이라고 한다.

$$\pi x\leq\pi_0,\ x\in P\cap Z^n_+$$

식 (4-1)과 같은 제약식을 고려해 보자.

$$e^Tx\leq k\ \ (\text{상수})\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (4-1)$$

$$B=\{x\mid 0\leq x_i,\ i=1,\cdots,n\},$$

$P=\{x\mid \sum_{i=1}^{n} a_ix_i\leq b\}\cap B$라면 P의 정점은 정수해 정점이거나 한 개의 성분만 분수인 비 정수해 정점이 된다.

정리 4.1

$$\Omega=\{x\mid \sum_{i=1}^{n} a_ix_i\leq b,\ \ 0\leq x_i\leq 1,\ \ i=1,\ \cdots,\ n\}\subset R^n$$
$$B=\{x\mid 0\leq x_i\leq 1,\ i=1,\cdots,n\}$$
$$x^c=\arg\max h(\Omega)$$
$$h(x)=e^Tx$$

x^c의 분수 성분을 0으로 고정시켜 만든 점을 x^*라 할 때 식 $e^Tx\leq e^Tx^*$은 정수해 관점에서의 유효 부등식이다.

[증명] $e^Tx>e^Tx^*$을 만족시키는 비 정수해 정점은 e^Tx^*개의 성분만 1이고 분수 성분이 1

개이므로

$\{x \mid e^T x^* < e^T x^* < e^T x^* + 1\}$은 정수해를 포함하지 않는다.

그러므로 정수해가 아닌 점들을 잘라낸다.

Q.E.D.

정리 4.2

$$\Omega = \{x \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b,\ 0 \le x_i \le 1,\ \mathrm{i}=1, \cdots, \mathrm{n}\} \subset R^n$$

$$B = \{x \mid 0 \le x_i \le 1,\ \mathrm{i}=1, \cdots, \mathrm{n}\}$$

$$x^c = \arg\max h(\Omega)$$

$$h(x) = e^T x$$

x^c의 분수 성분을 0으로 고정시켜 만든 점을 x^*라 할 때 다음의 초평면을 생각하자.

$$e^T x = e^T x^* = r$$

$H = R^n_+ \cap \{x \mid e^T x = e^T x^*\}$은 B의 $_nC_r$ 개의 정점을 포함하는 (n-1)차원 단체이다.

[증명] $h(x)=k$는 k가 정수일 때만 B의 정점과 만난다.

B의 정점은 0과 1의 성분을 갖기 때문에 $e^T x$값은 1의 성분 갯수가 된다. H위에 존재하는 B의 정점은 1의 성분이 $e^T x^*$개가 되는 점들이므로 $_nC_r$ 개의 정점을 포함한다. Q.E.D

위의 정리에서 $e^T x^* = \mathrm{n}-1$이면 H는 n개의 정점을 포함한다.

한편 1차 제약식의 초평면이 입방체 B를 자르면서 만드는 단면의 비정수해 정점들은 한개의 성분만 분수이다. 단면의 장점들은 입방체 B의 ray상에 있는데 ray상의 점들은 한개의 성분만 분수이기 때문이다.

1차식이 입방체 B를 잘라내는 정도에 따라 몇 개의 변수를 0으로 고정시킴으로써 부문제의 크기를 쉽게 줄일 수 있다.

정리 4.3 $e^T x^* \le \mathrm{n}-1$의 경우 $(n - e^T x^* - 1)$개의 변수를 0으로 고정시킴으로써 B의 $e^T x^*$개의 정점을 포함하는 $(e^T x^* + 1)$−차원 단체를 얻는다.

[증명] 변수를 0으로 고정시키는 것은 단체를 한 면에 직교사영시키는 것을 의미하므로 고정시킬 때마다 1차원씩 줄어든다. Q.E.D.

전술한 바와 같이 절단제약식을 도입하면 정수해가 아닌 부문제의 해집합 일부를 잘라내는 효과를 얻게 된다. 그러므로 각각의 부 문제에서 좀더 개선된 상·하한값을 구할 수 있다.

5. 결론 및 추후 연구방향

목적함수가 오목이고 한 개의 선형 제약식을 갖는 0-1정수계획문제는 배낭문제의 제약식에 다 오목함수를 목적함수로 갖고 있기 때문에 복잡도 관점에서 효율적인 해법의 개발이 어렵다. 목적함수와 제약식이 특별한 경우에만 몇몇의 접근 방법이 제시되고 있는 바 일반적인 오목함수에 적용 가능한 해법을 개발하여 복잡도 분석보다는 계산상의 효율 제고 측면에 의미를 두고자 하였다.

본 논문에서 제시된 해법이 다음과 같은 오목함수정수계획문제의 최적해를 구하는데 유용하게 사용될 것이다.

첫째, 0-1 배낭계약식을 갖는 일반적인 오목함수 최소화문제에 적용시킬 수 있다.

둘째, 오목함수 0-1의 정수계획문제의 최적해를 구할 수 있다.

세째, 한개의 선형 제약식과 변수가 상·하한값을 갖는 오목함수 정수계획 문제의 최적해를 구하기 위한 병렬해법을 개발하는데 쓰일 수 있을 것이다.

추후 연구 방향으로 본 해법의 효율 제고와 모형확장의 측면에서 다음과 같은 점을 제시하고자 한다.

첫째, 유효 절단 부등식이 첨가될 때 하한추정하는 함수로 1차식 볼록덮개 함수대신 부분선형볼록 덮개함수를 고려함으로써 한계값을 개선시킬 수 있을 것이다.

둘째, 강력한 유효절단부등식에 대한 연구가 진행되어야 하겠다. 즉, 정수해관점에서 좀더 강력한 유효 부등식을 찾을 수 있는 경우를 일

반화시키고 쉽게 계산할 수 있는 방안이 모색되어야 하겠다.

참 고 문 헌

1. Benson, H. P., "A finite Algorithm for Concave Minimization over a Polyhedron,"*Naval Research Logistics Quarterly* 32. 165-177(1985).
2. Benson, H. P. and Erenguc, S.S., "A finite Algorithm for Concave Minimization over a Polyhedron," *Naval Research Logistics Quarterly* 37, 515-525 (1990).
3. Falk, J. E. and Hoffman, K L., "A Successive Underestimation Methods for Concave Minimization Problems," *Math. Oper.Res.* 1, 251-259(1976).
4. Falk, J. E. and Hoffman, K. L., "Concave Minimization via Collapsing Polytopes," *Oper. Res. 34*, 919-929 (1986).
5. Falk, J. E. and Soland, R. M., "An Algorithm for Solving Separable Nonconvex Programming," *Management Sci.* 15, 550-569(1969).
6. Hoffman, K.L., "A Method for Globally Minimizing Concave Functions over Convex Sets," *Math. Programming* 20, 22-32(1981).
7. Horst, R., "A General Class of Branch-and-Bound Methods in Global Optimization with Some New Approaches for Concave Minimization" *J. Optim. Theory Appl.* 51, 271-291 (1986).
8. Horst, R.and Thoai, N.V., "Branch-and-Bound Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations and Inequaltites," *J. Optim. Theory Appl.* 58, 139-146(1988).
9. Horst, R., Thoai, N.V., and de Vries, J., "On Finding the New Vertices and Redundant Constraints in Cutting Plane Algorithms for Global Optimization," *Operations Research Letters* 7, 85-90 (1988).
10. Kalantari, B., "Quadratic Functions with Exponential Number of Local Maxima," Operatins Research Letters 5, 47-49(1986).
11. Kalantari, B. and Bagchi, A., "An Algorithm for Quadratic Zero-One Programs," Naval Research Logistics Quarterly 37, 527-538(1990).
12. Kalantari, B. and Rosen, J.B., "Construction of Large-Scale Global Minimum Concave Quadratic Test Problems," *J. Optim. Theory Appl.* 48. 303-313(1986).
13. Mathur, K and Salkin, H. M, "A Branch and Bound Algorithm for a Class of Nonlinear Knapsack Problem," *Operations Research Letters* 2, 155-160(1983).
14. Mattheiss, T.H., "An Algorithm for the Determination of Irrelevant Constraints in All Vertices in Systems of Linear Inequalities," *Oper. Res.* 21, 247-260 (1973).
15. More, J. J. and Vavasis, S.A., "On the solution of concave knapsack" problem," *Math, Prog. 49*, 397-411(1991)
16. Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A., "Integer and Combinatorial Optimization", Wiley(1988).
17. Pardalos, P. M. and Kovddr, N., "An Algorithm for a Singly Constrained Class of Quadratic Programs Subject to upper and lower Bounds," *Math. Prog.* 46, 321-328(1990).
18. Rosen, J. B., "Minimization of a Linearly Constrained Concave Function

by Partition of Feasible Domain,"*Math Oper.Res.* 8, 215-230(1983).
19. Soland, R.M., "An Algorithm for Separable Nonconvex Programming Problems Ⅱ : Nonconvex Constraints", *Management Science* 11, 759-773(1971).
20. Taha, H., "Concave Minimization over a Convex Polyhedron" *Naval Res. Logist, Quart.* 20, 533-548(1973).
21. Thoai, N. V. and Tuy, H. Convergent Algorithm for Minimzin a Concave Function. *Math. Oper. Res.* 5. 556-556 (1980).
22. Zwart, P. B., "Global Maximization of a Convex Function with Linear Inequality Constraints," *Oper. Res.* 22, 602-609 (1974).