□論　文□

종단선형설계 최적화 기법에 관한 연구

Mathematical Optimization Models for Determination of Optimal Vertical Alignment

姜 聖 徹
유신설계공단 건설기술연구소
시스템연구실 연구원

全 京 秀
서울대학교 토목공학과
도시공학전공 교수, Ph.D

朴 泳 郁
유신설계공단 건설기술연구소
시스템연구실 실장, Ph.D

目　次

ABSTRACT

In the fields of rail and road design, most vertical alignment design have been thus far heavily dependent upon trial-and-errors of experienced engineers. However, it has long been recognized that these practices have been inefficient in productivity of designing process.

In order to overcome this inefficiency, this paper presents the optimal vertical alignment design method using mathematical optimization techniques. For optimization, mathematical model to minimize the construction cost is formulated and the separable programming technique and the Zoutendijk method are introduced to solve it. As result, it is shown that this optimization technique can give efficient solutions to all vertical alignment design fields with properly-estimated cost function.

Ⅰ. 序論

철도 및 도로의 선형설계(이하 선형설계)는 일반적으로 기본계획단계에서 사회경제적 효과를 중심으로 노선대를 설정하게 되고 이를 바탕으로 기본설계단계에서 평면 및 종단설계를 하게 된다. 기본설계단계에서 설계의 주된 목표는 주행의 안전성과 승객의 안락감을 적절한 수준까지 유지하고 각종 지장물 및 환경조건 등의 제약조건을 만족시킨 상태에서 최소의 공사비가 소요되는 평면 및 종단선형을 설계하는 것이다.

본 연구진이 해외의 유수설계회사와 합동작업을 통해 접한 정보와 지난 3~4년간 국내에 활발하게 도입되기 시작한 각종 도로 및 철도 토목설계용 CAD(Computer Aided Design)소프트웨어들[4]의 기능분석을 바탕으로 판단하였을 때, 전세계적으로도 현재까지의 선형설계는 선형설계자의 경험에 의하여 도출된 평면선형과 그에 따른 종단선형 비교대안들에 대한 반복적 검토작업에 의해 이루어지고 있으며 토목설계용 CAD 소프트웨어들은 이러한 반복적 검토작업을 전산화된 입력자료를 바탕으로 고속화함으로서 보다 많은 비교대안에 대한 검토를 용이하게 해주고 있다고 할 수 있다. 그러나 이러한 전산처리방법에서도 비교대안의 생성과정은 전적으로 설계자의 경험적 판단과 반복적 작업에 의해 이루어진다.

이러한 선형설계방식을 단계별로 고려되는 자료와 의사결정과정을 중심으로 개략적으로 살펴보면 기본설계단계에서는 결정된 노선대 안에서 지형도, 토지수용비, 시설물자료 등을 바탕으로 운행안전성을 만족시키는 범위안에서 공사비를 줄일 수 있는 평면선형을 선정하고 그 다음 단계로 종단선형을 설계하게 된다(물론 평면선형설계시 종단선형에 대한 전반적인 설계개념은 염두에 둠). 종단선형설계는 주어진 평면선형 중심선을 중심으로한 종단면도를 기본으로 평면선형설계의 정신을 충분히 수용하면서 각종 제약조건들을 만족하는 종단선형중에서 최소비용을 소요케하는 선형을 찾는 것을 목표로 한다. 이를 위해 현재까지 쓰이는 방법(전산작업포함)은 전문가의 판단을 바탕으로 한 반복적 대안비교방법이었다. 따라서 긴 작업시간이 소요되며(물론 수작업의 경우보다 비교할 수 없을만큼 효율적이지만) 또한 주어진 비교대안 안에서의 검토라는 제한을 벗어날 수 없고 특히 장거리 노선의 설계인 경우 전 노선에 대한 종합적인 고려가 거의 불가능하다고 판단된다.

본 연구에서는 위에서 제시된 기본계획 및 기본설계의 종단선형 설계단계에서의 효율성을 제고하기 위해 최적화 모형을 이용한 최적종단 선형설계(최소 공사비 선형 설계)방법을 제시하고 이를 전산 프로그램화함으로써 다음의 목표를 성취하고자 하였다.

1) 종단 선형설계의 출발점 제공
- 주요변수들로만 구성된 최적화 모형의 해로서 얻어진 종단선형을 평가, 분석하고 설계자의 경험과 모형에서 고려되지 못한 점을 추가, 보완함으로써 보다 나은 설계를 구현하는 기반을 제공한다.

2) 평면선형들간의 신속한 비교기능 제공
- 여러 평면선형 대안들에 대한 최적화모형의 해로서의 종단선형을 신속히 구하고 이를 바탕으로 개략 공사비 비교가 용이해지기 때문에 보다 나은 평면선형결정에 도움이 될 수 있다.

3) 설계자의 종합적 판단 지원 및 오류판별 기능 제공
- 장거리 노선의 경우 주요변수에 대하여 수학적으로 종합 검토해줌으로써 인간의 지력의 한계로 인한 문제점을 해결하고 부주의나 미고려

4) INTERGRAPH, MOSS, CANDID & ESPADD, DCA

사항으로 인한 오류를 판별하게 해준다.

Ⅱ. 최적화 모형

종단선형은 일반적으로 직선과 원곡선의 조합으로 이루어지는데 이때 기본적으로 지켜야 할 조건은 최대구배 조건, 시종점 조건, 지장물 조건, 최소 직선구간거리 조건, 최소 원곡선반경 조건, 평면선형상의 곡선부 지점에서의 구배조건 등이다. 이때 주행자의 안전성, 운행 쾌적성 및 선형의 연속성들이 평면선형과 함께 위 조건들을 결정하는 요인이 된다. 결국 최적화란 이러한 주어진 제약조건하에 건설비용을 최소화하는 선형을 설계하는데 목적이 있는 것이다. 이를 위해서는 비용함수를 어떻게 정의하는가 하는 문제가 선결되어야 한다.

1. 비용함수의 결정

도로나 철도를 건설할 때에는 토공이 수행되어야 할 구간과 교량 및 터널을 개설하여야 할 구간등이 존재하게 된다.

토공비용을 결정하는 데에는 횡단면상에서의 토량종류별 절토량과 성토량의 절대량과 두양의 균형정도가 결정적인 요소로서 작용하게 된다. 터널구간의 경우는 지질의 형태가 중대한 영향을 미치며 교량의 경우 계획고와 지표면의 차이에 따라 교량형식에 변화가 오고 이것이 교량 건설비에 중요 결정요소로서 작용한다.

본 모형에서는 단위 길이당 절토비용과 성토비용을 평면선형의 중심선에서의 계획고와 지반고의 차이의 절대값에 대한 증가함수로 가정하였다. 물론 실시설계단계의 토공비는 토량종류별 횡단면상의 절성토량과 그 균형에 의하여 결정된다. 그러나 기본계획 및 기본설계의 선형설계단계에서는 주상도자료가 특수지역을 제외하고는 획득 불가능하며 주로 대상지역의 개략적 평균치를 사용하고, 또한 주어진 평면선형상에서 종단을 설계할때 기준이 되는 자료는 중심선의 종단면자료이므로 위 가정이 무리없이 받아들여 질 수 있다고 보여진다.

단위 길이당 교량건설비의 경우 교량형식별(PC BOX, PC BEAM)로 계획고와 지반고의 차이의 함수로 표시하였으며 터널의 경우 NATM 형식을 가정하여 지반고와 계획고의 차이가 경제성으로 보아 일정수준을 넘을때 설치한다고 가정하였다.

이러한 가정들은 설계자들이 현재 현장에서 수행하고 있는 기본설계단계의 설계결정방식과 주요사항에서 크게 차이가 나지 않는 기준이기도 하다. 따라서 위 가정들을 배경으로 계획고와 지반고의 차이에 대한 토공구간과 교량 및 터널 공사구간의 단위 길이당 공사비용을 추정하여 최소비용을 나타내는 봉투곡선(Envelope Curve)을 도출한 결과 다음 형태의 그림을 얻을 수 있었다.

다음 그림의 x축은 지반고와 계획고의 차이를 나타내고 y축의 경우는 단위당 공사비를 의미하는데, 양의 x축 방향의 경우는 절토구간과 터널구간에서, 음의 x축 방향의 경우는 성토구간과 교량구간에서 지반고의 계획고에 대한 상대적 높이에 따른 단위당 공사비용을 나타낸다. 따라서 주어진 선형에 따른 총 공사비는 각 스테이션에서 지반고와 계획고의 차이에 의하여 결정되는 단위당 건설비용의 합으로 표시될 수 있게 된다.

$$\text{총공사비} = \sum_{i=1}^{n} C(y_i - f(x_i)) \qquad (1)$$

$C(\cdot)$: 비용함수

$f(x)$: 종단 선형을 대표하는 함수

x_i : i번째 스테이션 값

y_i : i번째 스테이션에서의 지반고

$f(x_i)$: i번째 스테이션에서의 계획고

이와 같이 표현된 총 비용을 앞에서 언급한 각종 제약조건하에서 최소화 하는 선형, $f(x)$를 찾는 것이 본 연구의 최종 목표가 되는 것은 물론이다. 이때 찾아진 선형은 시종점 좌표, VI점(Vertical Intersection Point), 원곡선의 반경,

원곡선과 직선의 교점들로 구성되어져야만 한다.

본 연구에서는 최적종단선형을 찾기 위하여 2단계의 접근을 시도하였다. 첫번째 단계는 $f(x)$를 스테이션간의 직선조합함수(piecewise linear function)로 가정하고 주어진 조건하에서 목적함수인 총 비용함수를 최소화하는 직선조합함수 $f(x)$를 구하는 단계이고, 두번째 단계는 첫번째 단계에서 구해진 직선조합함수와 가장 유사하면서 시종점 좌표, VI점, 원곡선의 반경, 원곡선과 직선의 교점들로 구성된 종단선형을 나타내는 함수 $f(x)$를 구하는 과정이다.

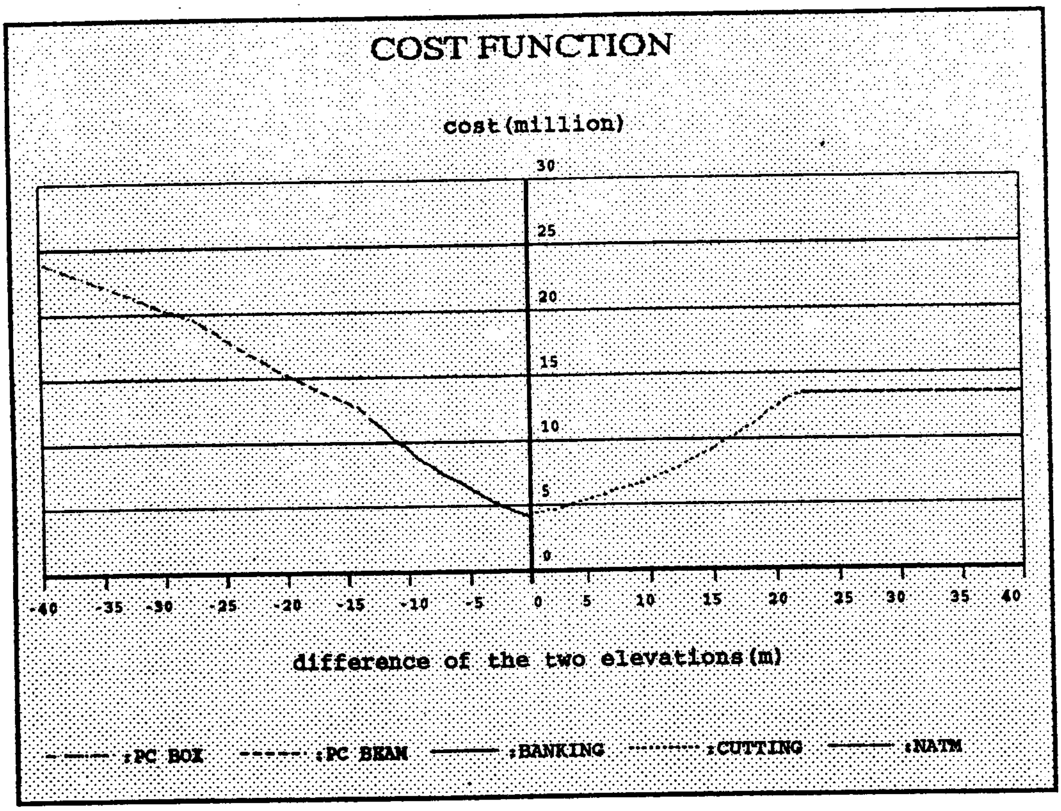


그림 Ⅱ-1 비용함수의 예

2. 1단계 최적화

1단계의 목적은 총비용을 최소화 시키는 계획고들을 직선조합함수 $f(x)$의 형태로 구해내는 것으로 여기에는 Separable Programming 기법이 적용되는데, 주어진 지형 자료(각 스테이션 값과 해당 지반고)와 비용함수 하에서 다음의 문제를 최적화 한다.

minimize 총 비용
subject to 구배 조건
시종점 조건
지장물 조건

수학적 모형을 구성하기 위하여 다음의 기호를 정의한다.

x_i : i번째 스테이션 값
y_i : i번째 스테이션에서의 지반고
y^*_i : i번째 스테이션에서의 계획고(control variable) = $f(x)$
d_i : $y_i - y^*_i = y_i - f(x_i)$
O : 지장물 조건 집합 즉,
{i : obstacle condition exists at i-th station}
o_r : r번째 지장물 조건에서 만족되어야 하는 계획고
slope : 최대 구배
s : 시점의 계획고
e : 종점의 계획고
n : 스테이션의 총 수
p : 단위당 공사비용이 알려진 d_i의 갯수
$C(d_i)$: d_i에 대한 비용함수의 값

이를 해를 얻기 위한 구체적인 수학적 최적화 문제로 전환시키면 위의 최적화 문제는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} C(d_i) \qquad (2) \\ &\text{subject to} \quad \left| \frac{y^*_{i+1} - y^*_i}{x_{i+1} - x_i} \right| \le slope \\ &\quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ &\quad y^*_1 = s \\ &\quad y^*_n = e \\ &\quad y^*_r \ge o_r \quad \text{for } r \in O \end{aligned}$$

식 (2)를 모두 d_i를 표시하면 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} C(d_i) \qquad (3) \\ &\text{subject to} \\ &-d_{i+1} + d_i \le slope \cdot (x_{i+1} - x_i) - (y_{i+1} - y_i) \\ &-d_{i+1} + d_i \ge -slope \cdot (x_{i+1} - x_i) - (y_{i+1} - y_i) \\ &-d_1 = s - y_1 \\ &-d_n = e - y_n \\ &-d_r \ge o_r - y_r \quad \text{for } r \in O \end{aligned}$$

식 (3)을 살펴보면 목적함수 및 제약조건이 지반고와 계획고의 차 d_i에 대하여 분리된 형태(separable form)로 구성되어 있음을 알 수 있다. 따라서 위 문제에는 Separable programming 기법이 적용될 수 있다.

d_i에 대한 격자점(grid points)으로서 비용함수에 정의되어 있는 값들을 사용하는데 이들을 d_{ik} (k=1,...,p)라 하면 식 (3)은 다음과 같은 Separable Problem으로 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda_{ik} C(d_{ik}) \qquad (4) \\ &\text{subject to} \quad \sum_{k=1}^{p} (-\lambda_{i+1\,k} d_{i+1\,k} + \lambda_{ik} d_{ik}) \\ &\qquad \le slope \cdot (x_{i+1} - x_i) - (y_{i+1} - y_i) \\ &\qquad \sum_{k=1}^{p} (-\lambda_{i+1\,k} d_{i+1\,k} + \lambda_{ik} d_{ik}) \\ &\qquad \ge -slope \cdot (x_{i+1} - x_i) - (y_{i+1} - y_i) \\ &\qquad \sum_{k=1}^{p} (-\lambda_{1k} d_{1k}) = s - y_1 \\ &\qquad \sum_{k=1}^{p} (-\lambda_{nk} d_{nk}) = e - y_n \\ &\qquad \sum_{k=1}^{p} (-\lambda_{rk} d_{rk}) \ge o_r - y_r \quad \text{for } r \in O \\ &\qquad \lambda_{ik} \ge 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, n \,,\ k = 1, \ldots p \end{aligned}$$

위의 문제를 restricted basis entry rule을 포함하는 선형계획법으로 풀면 λ값들이 구해지고 다음의 두 식에 의하여 계획고 y^*_i $(i=1,...,n)$가 계산된다.

$$d_i = \sum_{k=1}^{p} \lambda_{ik} d_{ik} \quad \text{for } i = 1,\dots,n$$

$$y^*_i = y_i - d_i \quad \text{for } i = 1,\dots,n$$

3 2단계 최적화

1단계에서 얻어진 직선조합함수 $f(x)$는 종단선형이 만족시켜야 하는 조건 중에 직선과 원곡선으로만 구성되어야 한다는 조건 이외의 모든 조건을 만족시키고 있다. 따라서 2단계는 다른 모든 조건을 만족시키고 직선과 원곡선으로만 구성된 함수 중에서 1단계의 결과와 가장 가까운 함수 $f^*(x)$를 찾는 것이 목적이다.

이를 간단히 정리하면 2단계에서 최적화해야 할 문제는 다음과 같다.

minimize 1단계에서 얻어진 계획고와 함수값으로 얻어지는 계획고의 차의 제곱의 총합[5)]

subject to 직선구간 거리 조건
최소 원곡선반경 조건

위의 문제를 수학적으로 표현하는데 필요한 몇 가지 기호를 정의하면 다음과 같다.

c : 삽입할 원곡선의 수

minradius : 최소 원곡선 반경

length : 원곡선사이에 최소한 확보되어야 하는 직선구간길이

y^*_i : i번째 스테이션에서의 잠정 계획고(1단계 결과치)

T^{x1}_i, T^{x2}_i : i번째 원곡선에서의 직선과의 접점들(tangent points)의 x 좌표 ($T^{x1}_i < T^{x2}_i$)

T^{y1}_i, T^{y2}_i : i번째 원곡선에서의 직선과의 접점들의 y 좌표

O^x_i, O^y_i : i번째 원곡선의 중심 좌표

V^x_i, V^y_i : i번째 VI점의 좌표(control variable)

R_i : i번째 원곡선의 반지름(control variable)

$f^*(x)$: x스테이션에 대한 계획고 함수

$$
\begin{cases}
\dfrac{V^y_1 - y^*_1}{V^x_1 - x_1}(x - V^x_1) + V^y_1 & x_1 \le x \le T^{x1}_1 \\
\pm\sqrt{R^2_1 - (x - O^x_1)^2} + O^y_1 & T^{x1}_1 < x \le T^{x2}_1 \; * \\
\cdots\cdots & \cdots \\
\dfrac{V^y_i - V^y_{i-1}}{V^x_i - V^x_{i-1}}(x - V^x_i) + V^y_i & T^{x2}_{i-1} < x \le T^{x1}_i \\
\pm\sqrt{R^2_i - (x - O^x_i)^2} + O^y_i & T^{x1}_i < x \le T^{x2}_i \; * \\
\cdots\cdots & \cdots \\
\dfrac{y^*_n - V^y_c}{x_n - V^x_c}(x - x_n) + y^*_n & T^{x2}_c < x \le x_n
\end{cases}
$$

* : 선형의 형태에 따라 부호 결정

위의 기호를 바탕으로 위의 최적화 문제를 수식화하면 식 (5)와 같다.

$$
\begin{aligned}
&\textit{minimize} && \sum_{i=1}^{n} (y^*_i - f^*(x_i))^2 \qquad (5) \\
&\textit{subject to} && \sqrt{(T^{x1}_1 - x_1)^2 + (T^{y1}_1 - y^*_1)^2} \le \textit{length} \\
& && \sqrt{(T^{x1}_i - T^{x2}_{i-1})^2 + (T^{y1}_i - T^{y2}_{i-1})^2} \le \textit{length} \\
& && \quad \text{for } i = 2,\dots,c \\
& && \sqrt{(x_n - T^{x2}_c)^2 + (y^*_n - T^{y2}_c)^2} \le \textit{length} \\
& && R_i \ge \textit{minradius} \quad \text{for } i = 1,2,\dots,c
\end{aligned}
$$

일반적으로 종단선형설계시 고려되는 구배는 거의 수평에 가깝기 때문에 식 (5)의 제약조건 중 직선구간 거리조건은 아래와 같이 근사화하여 변형될 수 있다.

---

5) 엄밀한 의미에서 2단계의 목적함수는 $\sum_{i=1}^{n} C(y_i - f(x_i))$이나 cost function C(•)가 piecewise linear function이므로 solution algorithm인 Zoutendijk method의 적용을 용이하게 하기 위하여 $\sum_{i=1}^{n} (y^*_i - f(x_i))^2$을 목적함수로 사용하였다.

$$\sqrt{(T_1^{x1}-x_1)^2+(T_1^{y1}-y_1^*)^2} \simeq (T_1^{x1}-x_1) \le length$$

$$\sqrt{(T_i^{x1}-T_{i-1}^{x2})^2+(T_i^{y1}-T_{i-1}^{y2})^2} \simeq (T_i^{x1}-T_{i-1}^{x2}) \le length$$

$$\text{for} \quad i=2,\ldots,c$$

$$\sqrt{(x_n-T_c^{x2})^2+(y_n^*-T_c^{y2})^2} \simeq (x_n-T_c^{x2}) \le length$$

또한 2단계에서 구한 해가 1단계의 제약조건에 대해서도 실현가능해(feasible solution)가 되기 위해서는 최소구배 조건과 지장물 조건이 추가적으로 고려되어야 한다. 이 추가적인 조건들과 위의 근사화된 제약조건을 감안하여 식 (5)를 재구성하면 식 (6)과 같다.

$$\begin{aligned}
\textit{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{n}(y_i^*-f^*(x_i))^2 \qquad (6)\\
\textit{subject to} \quad & (T_1^{x1}-x_1) \le length\\
& (T_i^{x1}-T_{i-1}^{x2}) \le length \quad \text{for } i=2,\ldots,c\\
& (x_n-T_c^{x2}) \le length\\
& R_i \ge minradius \quad \text{for } i=1,2,\ldots,c\\
& \left|\frac{f^*(x_{i+1})-f^*(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right| \le slope\\
& \text{for } i=1,2,\ldots,n-1\\
& f^*(x_r) \ge o_r \quad \text{for } r \in O
\end{aligned}$$

위의 모형은 목적함수와 제약조건이 모두 비선형(nonlinear) 형태이므로 비선형최적화문제(nonlinear optimization problem)에 속한다. 이와 같은 문제를 해결하는 solution algorithm은 다수가 알려져 있으나 본 연구에서는 feasible direction method중의 하나인 Zoutendijk method를 이용하였다.

Ⅲ. 사례 적용

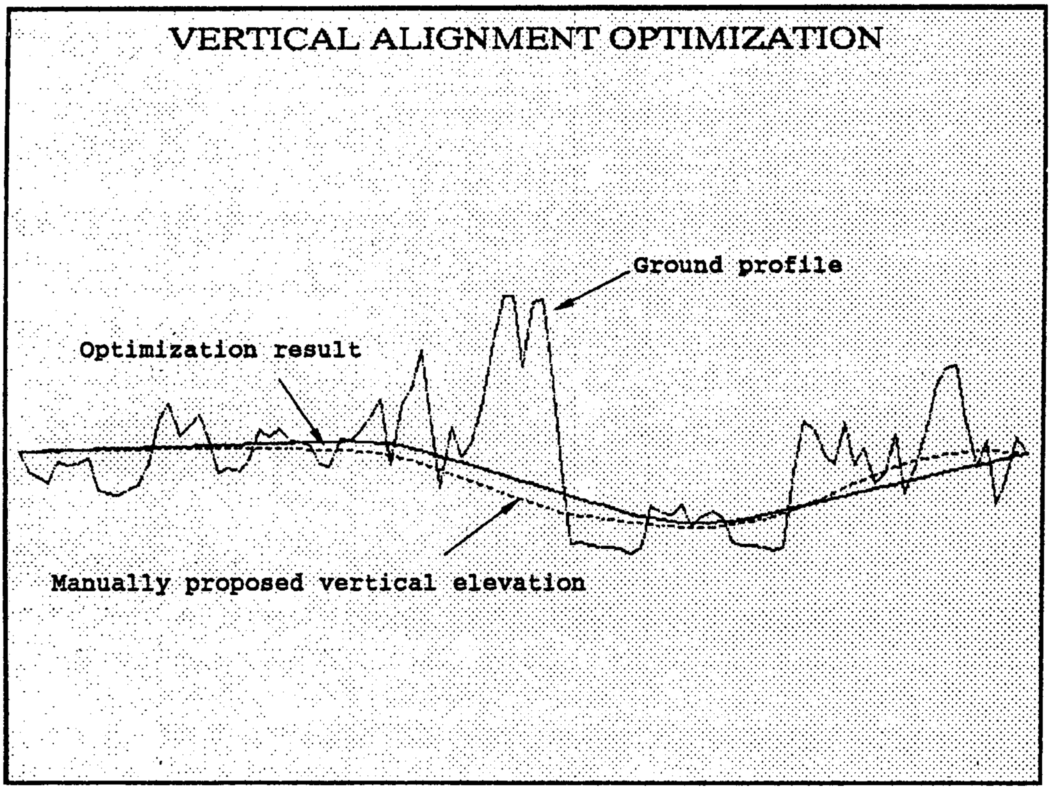
앞 절에서 언급한 방법론과 모델링과정을 실제 문제에 적용시키기 위하여 사례구간으로서 경부고속전철 제 13공구 중 일부구간(352㎞ 800m ~362㎞ 800m)을 선택하였는데 이 공구는 경주~부산 구간의 일부이며 산지와 구릉지를 통과하고 있다.

우선 비용함수를 정의하고 각 스테이션에 대한 지반고 자료를 준비한 후, (표 Ⅲ-1)의 제반 제약조건들을 고려하여 모델링을 하였다. Computer수행을 위하여 C 언어로 프로그램을 작성하였으며 486DX2/66 PC에서 수행한 결과 1단계는 비교적 시간이 많이 걸리는 단계 특성으로 인하여 40분 정도가 소요되었으며 2단계는 5번 iteration하는데 약 3분이 소요되었다.

위의 최적화 과정을 통하여 도출된 계획고와 선형기술자에 의하여 기존에 제시된 계획고를 비교한 것이 (그림 Ⅲ-1)이다.

〈표 Ⅲ-1〉 대상지역의 제반 조건

대상 지역		경부고속전철 제 13공구 일부구간 (352㎞ 800m~362㎞ 800m)
비용 함수		(그림 Ⅱ-1) 참조
제약조건	시점조건	시점의 계획고 = 212.76m
	종점조건	종점의 계획고 = 212.09m
	최대구배조건	최대배 = 0.025(25‰)
	지장물조건	353㎞ 700m의 계획고 ≥ 213.95m 358㎞ 400m의 계획고 ≥ 177.81m 358㎞ 700m의 계획고 ≥ 176.09m 358㎞ 900m의 계획고 ≥ 173.17m 360㎞ 300m의 계획고 ≥ 177.89m
	직선구간거리조건	원곡선 사이의 최소 직선구간거리 = 150m
	최소반경조건	원곡선의 최소반경 = 48000m



〈그림 Ⅲ－1〉 최적화 결과와 기존 계획선형 비교[6)]

6) 실제 설계에 사용된 비용자료가 충분히 수집, 분석되지 못하여 정확한 비용함수 추정이 이루어지지 않았기 때문에 두 결과를 동일한 범주에서 비교 불가능 했음.

Ⅳ. 결론 및 향후 연구과제

종단선형 설계에 있어 기존의 반복적인 작업의 비효율성을 줄이고 설계자의 의사결정과정을 지원하므로서 보다 나은 선형설계에 도달케하기 위해 제안된 본 연구는 서론에서 제시한 세가지 목표를 실현하는 방법론으로서 성공적인 것으로 본 연구진은 판단한다. 그러나 본 연구에서의 미비점을 보완하고 실무차원에서 적용성을 높이기 위하여 다음과 같은 계속적인 연구가 필요하다.

- 첫재, 1단계 최적화과정 중 선형계획법을 푸는 과정에서 많은 시간이 소요되는데 이에 대한 보완이 필요하다.
- 둘째, 종단설계시 고려해야 하는 모든 정량적인 요소들 중 현재 모델링 단계에서 고려하지 않는 것들에 대한 종합적인 분석 및 적용이 요구된다.
- 셋째, 비용함수의 적절하고 현실적인 추정방식이 필요하다.
- 넷째, 한 모델안에서 지역별로 서로 다른 비용함수를 사용할 수 있는 방법을 보완해야 한다.
- 다섯째, 실무 적용 타당성을 위해 앞으로 많은 검정작업이 수행되어야 한다.

參考文獻

1. Schittkowski K., "NLPQL : A FORTRAN subroutine for solving constrained nonlinear programming problem", Annal of Oper. Res. 5, pp 485-500, 1985
2. C.J.Goh & E.P.Chew & T.F.Fwa, "Discrete and continuous models for computation of optimal vertical highway alignment", Transpn. Res. Vol 22B, pp 399-409, 1988
3. M.S.Bazaraa & C.M.Shetty, *Nonlinear programming - Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, 1979