

# 난류유동의 대 와동 모사(LES)

양 경 수

## Large Eddy Simulation of Turbulent Flows

Kyung-Soo Yang



●양경수(인하대학교 기계공학과)  
●1957년생  
●유체역학을 전공하였으며, 천이유동과 난류유동의 LES, DNS에 관심을 가지고 있다.

### 1. 머리말

고대로부터 시작된 유체역학의 연구는 19세기 초반에 발표된 나비에-스톡스(Navier-Stokes) 방정식에 의해 중대한 전기를 맞게 된다. 이 방정식은 유체를 연속체로 취급하여 Newton의 제2법칙을 적용하여 유도되며, 유체유동을 지배하는 가장 근본적인 방정식이다. 하지만 이 방정식에 포함된 비선형항 때문에 엄밀한 수학적 해석은 극히 제한된 간단한 유동에서만 가능하였다. 그러나 20세기 후반에 들어 급속히 이룩된 컴퓨터 하드웨어와 수치해석법의 발전으로 양질의 근사해를 얻는 것이 가능하게 되었다. 수치모사(numerical simulation)란 컴퓨터와 수치해석 기법을 이용하여 유동장내 제한된 수의 격자점에서 나비에 스톡스(Navier-stokes) 방정식의 근사해를 구함으로써 주어진 유동장을 연구하는 방법이다. 특히 초고속 슈퍼 컴퓨터의 출현으로 더욱 정확하고 많은 유동장의 정보를 얻는 것이 가능하게 되었다. 수치모사는 수학적 해석법에 비해

보다 많은 종류의 유동장에 적용될 수 있으며, 실험에 비해서 훨씬 고해상도의 유동장 정보를 얻을 수 있다. 또한 수치모사는 초기 및 경계조건과 각종 매개변수의 완벽한 제어가 가능하다. 따라서 특정 유동장의 재현이 가능한 것은 물론이다. 이러한 장점을 갖고 있는 수치모사가 이제는 수학적 해석과 실험과 더불어 유체역학의 3대 연구방법의 하나로 확고한 위치를 차지하게 되었다.

난류유동의 연구에도 수치모사를 이용한 연구가 매우 활발히 수행되어 왔다. 그중 가장 널리 사용되는 기법은 레이놀즈 평균된 나비에-스톡스 방정식에 근거를 둔 레이놀즈 평균기법(Reynolds-averaging technique)이다. 이 기법에서는 모든 난류구조(turbulent structure)들의 효과가 모델되며, 응용적인 난류유동에도 흔히 사용된다. 하지만 이 기법의 문제점은 형상이 다른 난류유동들에서의 큰 유동구조들을 보편적으로 모델하기가 매우 어렵다는 점이다. 심지어 가장 세밀히 다듬어진 난류모형조차도 여러가지 다양한 종류의 난류유동에 적용되어 좋은 결과를 얻기란 매우 어렵다.

가장 바람직한 난류유동 수치모사의 형태는 아마도 DNS(direct numerical simulation)일 것이다. DNS는 그 이름 자체가 내포하듯, 아무런 난류모형을 사용하지 않고 3차원 비정상(unsteady) 나비에-스톡스 방정식의 수치해를 구하는 기법이다. 관련된 오차(error)는 단지 사용된 수치해석법에만 기인된 것이고 주의깊게 조절하면 원하는 만큼 작게 유지될 수 있다. 따라서 이론적으로는 가장 이상적인 수치모사 방법이라 할 수 있다. 하지만 에너지를 운반하는 큰 유동구조로부터 에너지를 소산하는 작은 유동구조까지 모든 크기의 난류구조를 해상하려면 대략  $Re^{3/4}$ 에 비례하는 많은 수의 격자점이 필요하다( $Re$ 는 레이놀즈 수). 따라서 현재 수준의 컴퓨터로는 단지 간단한 형상의 낮은 레이놀즈 수 유동에만 DNS의 적용이 가능하다. 그러므로 현재로서는 실제적인 응용보다는 난류모형의 검증에 위한 도구로서 주로 이용된다. 물론 컴퓨터 하드웨어 및 수치해석 알고리즘의 발전에 따라 점차적으로 DNS에의 관심이 높아질 것은 자명하나, 실제 공학적인 난류유동에의 적용은 아직은 요원한 실정이다.

1970년대 대기유동을 연구하는 기상학자들 사이에서 사용되기 시작한 large-eddy simulation(LES)는 1980년대 들어 난류유동의 전산해석을 위한 새로운 접근 방법으로서 본격적인 연구가 수행되었다. LES는 지금까지 난류유동의 계산에 널리 사용되고 있는 레이놀즈 평균기법과는 상당히 다른 개념을 내포하고 있다. LES에서는 주어진 격자간격보다 큰(GS; grid-scale) 유동구조는 직접 계산하되, 주어진 격자로서 해상(resolve)할 수 없는 작은(SGS; subgrid-scale) 유동구조의 GS 유동구조에의 영향은 난류모형으로 처리하는 계산 기법이다(그림 1). 난류에너지의 대부분은 GS 유동구조에 포함되어 있고, SGS 유동구조는 등방적인 사실로부터 LES의 이론적 정당성이 뒷받침된다. 따라서

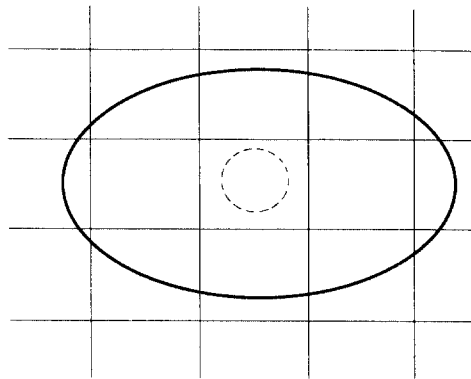


그림 1 해상될 수 있는 GS 유동구조(—)와 해상될 수 없는 SGS 유동구조(---)의 개략적 그림. 직선은 격자를 나타냄

LES는 모든 scale의 유동구조에 영향을 주는 레이놀즈 평균기법에서의 난류모형보다는 좀더 일반적이고 또한 형상에 덜 의존한다고 할 수 있다. 이와 같은 이유로 LES는 난류유동의 수치해석법으로서 주목을 받고 있으며, 최근 들어서는 간단한 형상에서의 기초 연구단계를 지나 유동의 박리를 포함하는 좀더 복잡하고 실용적인 난류유동에도 적용하고자 하는 노력이 집중되고 있다. 이 글에서는 LES의 개념과 몇 가지 응용예, LES의 문제점과 앞으로의 전망 등에 관해 자세하고 살펴보고자 한다.

## 2. LES

### 2.1 수식전개

LES 개념의 이해를 돕기 위해 비압축성 유동에 대한 LES의 지배방정식의 유도를 관찰해보자. LES에서는 순간적인 속도성분이 GS 속도성분 ( $\bar{u}_i$ )과 SGS 속도성분 ( $u'_i$ )으로 나뉘어진다. 즉

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (1)$$

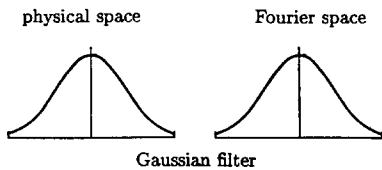
여기서, GS 속도성분은 여과(filtering) 과정을 통해 얻어진다.

$$\bar{u}_i(x_i, t) = \int_{D_j} \prod_{j=1}^3 G_j(x_j - \bar{x}_j) u_i(\bar{x}_i, t) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 \quad (2)$$

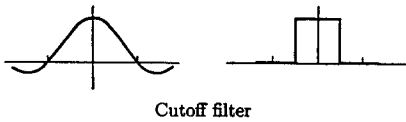
여기서,  $G_j$ 는  $j$ 방향의 여과함수(filter function)이고 적분은 전 계산영역에 대해서 수행된다. 또한  $x_i$ 는 각 좌표축을 나타내고  $u_i$ 는 상응하는 좌표축방향의 속도성분을 나타낸다. 이 여과함수는 확률밀도함수(probability density function)와 같은 의미를 갖고 있어 여과함수만을 전 계산영역에 대해서 적분하면 그 값은 1이 되어야 한다. 즉

$$\int_{D_j} \prod_{j=1}^3 G_j(x_j - \bar{x}_j) d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 = 1 \quad (3)$$

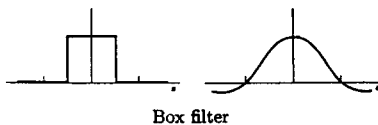
여과함수로서는 균질한(homogeneous) 방향으로 Cutoff filter나 Gaussian filter가, 비균질한 방향으로 box filter가 주로 사용된다. 그림 2는 이들 각 filter의 물리적 영역(physical space)과 Fourier 영역(Four-



$$G_i(x_i - x'_i) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta_i^2}} \exp[-6(x_i - x'_i)^2 / \Delta_i^2] \quad (i = 1, 2, 3)$$



$$G_i(x_i - x'_i) = \frac{2 \sin[\pi(x_i - x'_i) / \Delta_i]}{\pi(x_i - x'_i)} \quad (i = 1, 2, 3)$$



$$G_i(x_i - x'_i) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_i} & \text{for } |x_i - x'_i| < \frac{\Delta_i}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

그림 2 LES에서 사용되는 filter들

ier space)에서의 모양을 나타낸다. 예를 들면 Gaussian filter의 경우 여과과정에서 가중치는 다르지만 모든 파동들이 관여되는 형태의 filter이고, Cutoff filter는 여과과정에서 단지 특정범위의 파동만이 관여되는 filter이다. Box filter는 격자세포(grid cell)에서 평균하는 효과를 갖는다. 이와 같은 여과과정을 적용하여 여과된(filtered) 비압축성 모멘텀 방정식은 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, 모든 변수들은 특성 속도와 특성 길이로 무차원화되었으며,  $p$ 는 압력을 나타낸다. 또한 대류항(convective term)은 아래와 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j + L_{ij} \\ + C_{ij} + R_{ij}) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{cases} L_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ C_{ij} = \bar{u}_i u'_j + \bar{u}_j u'_i \\ R_{ij} = u'_i u'_j \end{cases} \quad (6)$$

$L_{ij}$ ,  $C_{ij}$ ,  $R_{ij}$ 는 각각 레오나드 응력(L Leonard stresses), 교차항(cross terms), SGS 레이놀즈 응력(subgrid-scale Reynolds stresses)이고, 정확도가 2차인 유한차분법이 사용될 때에는 레오나드 응력의 크기는 잘림오차(truncation error)와 같은 정도(order)가 된다.<sup>(1)</sup> 나머지 항들은 모두 모델되어야 한다. 결과적으로 LES를 위한 지배방정식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) \\ = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,

$$\begin{cases} \tau_{ij} = Q_{ij} - \frac{1}{3} Q_{kk} \delta_{ij} \\ P = \bar{p} + \frac{1}{3} Q_{kk} \\ Q_{ij} = R_{ij} + C_{ij} \end{cases} \quad (9)$$

또한  $\delta_{ij}$ 는 크로네커(Kronecker) 델타이며, 대류항의 여과과정에서 생성된 응력항  $\tau_{ij}$ 을 모델링하는 것을 subgrid-scale modeling (SGSM)이라 부른다. SGSM으로는 아래와 같은 Smagorinsky의 에디 점성 모델(eddy viscosity model)<sup>(2)</sup>이 흔히 사용된다.

$$\tau_{ij} = -2\nu_T \bar{S}_{ij} \quad (10)$$

여기서,

$$\begin{cases} \bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ \nu_T = l^2 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \end{cases} \quad (11)$$

여기서,  $l$ 은 작은 에디들의 특성 길이 스케일(characteristic length scale)이며, LES의 개념에 일치되도록 흔히 격자간격에 비례하는 것으로 가정된다. 즉,

$$l = C_s \Delta \quad (12)$$

여기서,  $\Delta = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3}$ 이고  $C_s$ 는 비례상수(이후 모델계수라 칭함)이다. 식 (9)에서와 같은 형태의  $\tau_{ij}$ 를 택한 이유는  $i=j$  수축(contraction)할 때 식 (9)에서의  $\tau_{ij}$ 와 식 (10)이 동일하게 되기 위해서이다.

## 2.2 SGSM

앞절에서 살펴본 바와 같이 LES에서는 순간적인 유동장을 여과함으로써 얻어지는 지배방정식으로부터 filter 크기(대부분의 경우 격자 간격)보다 큰 GS 유동구조는 직접 계산될 수 있지만, 여과과정에서 대류항에 의해 생성된 응력에 대해서는 모형을 도입하는 것이 불가피하다. LES가 근거를 두고 있는 실험적 사실들(난류에너지의 대부분은 GS 유동구조에 포함되어 있고, SGS 유동구조는

등방적임)은 GS 유동구조에의 SGS 유동구조의 영향이 상당히 간단한 난류모형으로도 모델되어질 수 있음을 암시한다. 하지만 성긴(coarse) 격자가 사용될수록 SGSM의 효과는 두드러지고 따라서 공학적 응용에서의 정확한 LES를 위해서는 정확한 SGSM의 개발이 필수적이다. 지금까지는 주로 위에서 언급된 Smagorinsky의 에디 점성 모델이 가장 많이 사용되었고 그밖에 Schumann<sup>(3)</sup>의 두쪽 모델(two-part model), 그리고 Bardina 등<sup>(4)</sup>의 혼합 모델(mixed model) 등도 간헐적으로 사용되었다. 특히 혼합 모델은 GS 유동구조와 SGS 유동구조 사이에서의 주된 상호작용이 가장 작은 GS 유동구조와 가장 큰 SGS 유동구조 사이에서 일어난다는 가정에 근거를 두고 있는데, 균질한 난류유동뿐만 아니라 전단 유동에도 상당히 효과적으로 사용되었다.

## 2.3 LES의 발전방향과 문제점

지금까지의 LES는 기초연구로서 주로 간단한 형상의 난류유동에 적용되어 왔으며 실제로 많은 성과를 이룩하였다.<sup>(3,5)</sup> 이로서 LES 개념의 정당성은 입증되었으며 그후로는 LES의 효율성을 증대시키기 위한 알고리즘의 개발 및 좀더 응용적인 유동에의 LES

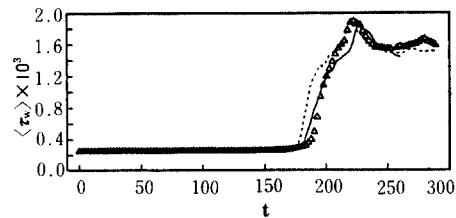


그림 3  $Re=8000$ 인 평행한 평판 사이의 천이유동에서의 평면평균된 벽전단응력의 시간에 따른 변화.  $Re$ 는 평판 사이의 간격의 반과 초기 중심선 속도(centerline velocity)를 기준으로 함.  $\triangle$  DNS, — DSGSM을 사용한 LES, ---종래의 SGSM을 사용한 LES. (Germano 등<sup>(6)</sup>)

의 적용에 집중적인 노력이 기울어져 왔다.

최근 들어 Germano, Piomelli, Moin & Cabot<sup>(6)</sup>은 종래의 모형에서와 같이 SGSM의 모델계수의 값( $C_s$ )을 미리 고정시키지 않고, 수치해석을 진행함에 따라 dynamic하게 모델계수의 값을 결정하는 dynamic subgrid-scale modeling(DSGSM)을 제안하였다. 이 방법은 두 개의 다른 filter level에서의 SGS 응력들과 여과된 지배방정식으로부터 계산되어 해상된 난류응력(resolved turbulent stress) 사이에서 성립되는 항등식에 근거를 두고 있다. 즉 DSGSM에서는  $C_s$ 가 위치와 시간의 함수이며 Germano 등은 DSGSM을 천이과정(그림 3) 혹은 완전히 난류로 발달된 두 평행한 평판 사이의 유동(그림 4)에 적용하여, 층류에서는 DSGSM의 효과가 사라진다는 것과 난류유동의 벽면 근처에서는 임의의 damping 함수 없이도 정확한 점근거동을 얻는다는 것을 보고하였다. 이것은  $C_s$ 의 값을 미리 고정시키는 종전의 SGSM에 비해 매우 중요한 진전이라 할 수 있다. 또한 DSGSM에서는 유동장의 일부에서  $C_s$ 값이 음이 될 수도 있는데 이는 backscattering이라 불리우는 SGS 유동구조에서 GS 유동구조로의 에너지 전달을 의미한다. 이는 난류에서의 통상적인 에너지 전달경로의 역방향인데 이러한 현상의 존재는

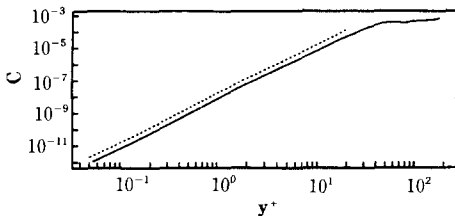


그림 4  $Re=3300$ 인 평행한 평판 사이의 난류 유동에서의 벽면으로부터의 거리에 따른  $C_s$ 값의 변화.  $Re$ 는 평판 사이의 간격의 반과 중심선 속도(centerline velocity)를 기준으로 함. — DNS, ---DSGSM을 사용한 LES(Germano 등<sup>(6)</sup>)

DNS 자료를 이용한 Härtel과 Kleiser<sup>(7)</sup>의 연구에서도 입증되었다. 한편  $C_s$ 의 값을 양의 수로 고정시키는 종래의 SGSM로는 backscattering을 감지하는 것은 불가능하다.

위에 열거된 바와 같이 DSGSM은 난류모형의 임의성을 최소화할 수 있는 매우 바람직한 성질을 갖고 있다고 말할 수 있다. 하지만 DSGSM을 보다 응용적인 유동에 적용하기 위해서는 아직도 극복해야 할 기술적인 문제점이 있다. DSGSM의  $C_s$ 는 국부적(local)인 양이기 때문에 시간과 위치에 따라 심하게 변동될 수 있고, 이 때문에 수치해가 불안정해질 수 있다. 따라서 안정된 수치해를 얻기 위해서는 매 시간단계(time step)마다 국부적으로 계산되는  $C_s$ 를 평균할 수 있는 균질한 방향이 필요하다. 그러나 복잡한 형상의 유동에서는  $C_s$ 를 평균하기 위한 균질한 방향의 부족으로, DSGSM을 적용시키기 가 매우 어려워진다. 공학적인 유동의 대부분이 복잡한 형상에서의 난류유동이기 때문에 모델계수의 적절한 평균기법을 찾는 것이 DSGSM을 복잡한 유동에 적용시키기 위한 필수조건이라 하겠다. 따라서 이러한 방향으로 많은 연구가 진행되고 있다.<sup>(8,9)</sup> 그림 5는 복잡한 유동에 DSGSM을 적용한 예로서 유동의 박리와 재부착 등 여러가지 유동영역을 갖는 장애물 유동에서의 수소기포 수치모사(hydrogen bubble simulation)를 보여준다.<sup>(10)</sup> 장애물 위 평균유속과 장애물 높이로 정의된 레이놀즈수는 3,300이고, 5개의 다른 시각에서의 유동장을 보여준다. 화살표로 표시된 Vortex를 포함하여, 실험에서 관찰되어지는 유동구조가 잘 재현되었다. 또한 LES의 응용범위를 넓히기 위해 diffuser에서의 유동, 익형 주위에서의 유동, 연소를 포함하는 유동 등에 적용시키려는 연구도 진행 중이다.<sup>(11)</sup>

위에서 언급된 바와 같이 LES는 최근들어 기술적인 면에서 급속한 발전을 이룩하였고

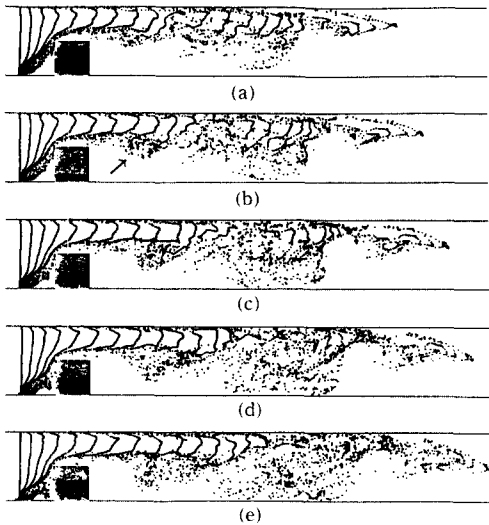


그림 5 복잡한 유동에의 DSGSM의 적용예. 유동의 방향은 왼쪽에서 오른쪽. 장애물은 단면이 정사각형인 막대기 형태. 옆에서 본 그림.

또한 현재도 바람직한 방향으로 연구가 진행되고 있다. 하지만 아직은 상업용 컴퓨터 코드에 적용시킬 단계에는 이르지 못한 형편이다. LES는 레이놀즈 평균기법과는 달리 난류의 효과를 공간에서 처리하기 때문에 그 수치해는 당연히 3차원 비정상 계산이어야 한다. 이는 시간에 따른 자세한 유동 정보를 제공할 수 있는 장점이 있는 반면, 난류 통계치를 얻기 위해서는 충분한 샘플 유동장을 수집하기 위해 장시간 계산을 수행해야 하는, 즉 많은 CPU 시간이 소요되는 단점이 있다. 따라서 현재로서는 레이놀즈 평균기법과 DNS의 중간단계로서 연구단계를 벗어나지 못하고 있으나 LES의 개념적 보편성과 앞으로 지속될 컴퓨터 하드웨어와 수치해석 알고리즘의 발전으로 난류유동을 예측하기 위한 도구로서 LES의 전망은 매우 밝다.

### 3. 맺음말

이 글에서는 난류유동의 수치모사 기법으

로서 최근 주목을 받고 있는 LES에 대해서 살펴보았다. LES의 개념은 공간에서의 여과에 근거를 두고 있으며 따라서 난류모델은 작은 스케일의 유동구조에만 국한된다. LES의 이러한 장점은 DNS에 좀더 가까운 난류 모델링의 가능성을 의미한다. 또한 그간 발전된 LES의 기법들에 대해 고찰해보았으며 LES는 DNS의 차선택으로서 난류유동을 예측하기 위한 도구로서 그 전망은 매우 밝다.

### 참고문헌

- (1) Shaanan, S., Ferziger, J. and Reynolds, W., 1975, "Numerical Simulation of Turbulence in the Presence of Shear," *Report TF-6, Thermosciences Division, Dept. of Mech. Eng., Stanford Univ., Stanford CA 94305, U.S.A.*
- (2) Smagorinsky, J., 1963, "General Circulation Experiments with the Primitive Equations. I. The Basic Experiment," *Monthly Weather Review*, Vol. 91, pp. 99~164.
- (3) Schumann, U., 1975, "Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulation of Turbulent Flows in Plane Channels and Annuli," *J. Comp. Phys.*, Vol. 18, pp. 376~404.
- (4) Bardina, J., Ferziger, J. H. and Reynolds, W. C., 1980, "Improved Subgrid Scale Models for Large Eddy Simulation," *AIAA Paper*, No. 80-1357.
- (5) Piomelli, U., Ferziger, J. H. and Moin, P., 1987, "Models for Large Eddy Simulations of Turbulent Channel Flows Including Transpiration," *Report TF-32, Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford Univ., Stanford, CA 94305, U.S.A.*
- (6) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W., 1991, "A Dynamic Subgrid-

- Scale Eddy Viscosity Model," *Phys. Fluids A*, Vol. 3, pp. 1760~1765.
- (7) Härtel, C. and Kleiser, L., 1993, "Energy Transfer Between Large and Small Scales in Wall-Bounded Turbulent Flows," *Engineering Applications of Large-Eddy Simulations*, Ragab S. A. and Piomelli U., Ed., FED-Vol. 162, ASME, pp. 21~28.
- (8) Ghosal, S., 1993, "On the Large Eddy Simulation of Turbulent Flows in Complex Geometry," Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford Univ., Stanford CA 94305, U.S.A..
- (9) Yang, Kyung-Soo, 1994, "On a Local Averaging of Model Coefficient in Large Eddy Simulation," *Proceedings of the 3rd JSME-KSME Fluids Engineering Conference*, July 25~27, Sendai, Japan, pp. 114~119.
- (10) Yang, Kyung-Soo and Ferziger, J. H., 1993, "Large Eddy Simulation of a Turbulent Obstacle Flow Using a Dynamic Subgrid-Scale Model," *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 8, pp. 1406~1413.
- (11) Annual Research Briefs, 1993, Center for Turbulence Research, Stanford Univ., Stanford CA 94305, U.S.A..