

# 유한요소해의 정확도 평가와 조절법

임 장 근

## Accuracy Estimation and Control Methods of Finite Element Solutions

Jang-Keun Lim



- 임장근(한양대 기계공학과)
- 1946년생
- 고체역학을 전공하였으며, 유한요소법에 의한 구조물의 해석 및 설계, 유한요소해의 정확도평가와 특정요소개발 등에 관심을 가지고 있다.

### 1. 머리말

유한요소법은 1960년 Clough<sup>(1)</sup>에 의하여 명명된 이래 구조역학적인 문제에 이용되어 오다가 오늘날에는 공학적 문제를 해결하기 위한 가장 보편적인 도구가 되었다. 유한요소법의 사용이 이와 같이 보편화될 수 있었던 주요인은 컴퓨터의 발달과 무관하지 않겠지만 해석프로그램을 한번 개발하면 동일한 특성의 다양한 구조물을 누구나 쉽게 해석할 수 있는 범용성 때문으로 생각된다.

그러나 유한요소법도 일종의 수치해법이기에 때문에 수식화 방법과 해석하는 사람에 따라서 그 결과에 다소 차이가 생기는 것도 틀림 없는 사실이다. 따라서 1980년대 초부터 학자들<sup>(2)</sup>은 유한요소법의 정확도 문제에 관심을 갖게 되었고 최근에는 누가 해석하든지 신뢰성 있는 동일한 결과를 얻을 수 있는 방법과 미리 해석결과의 정확도를 지정하여 입력시킬 때 이에 따른 결과를 얻기 위한 방법

에 많은 연구를 하고 있다.<sup>(3,4)</sup>

유한요소해석에서 해에 영향을 주는 인자는 다음 네 가지로 볼 수 있다.

- (1) 수학적 모델의 신뢰성
- (2) 입력자료의 불확실성
- (3) 수치 모델의 분할 형태
- (4) 컴퓨터의 계산오차

첫번째 항은 모델의 현실성을 의미하고 두번째 항은 재료, 형상, 경계조건과 하중의 불확실 및 비합리성에서 기인되는 오차이고 네번째 항은 컴퓨터 기종에 관계한다.

이들은 모두 해석 경험과 도구에 관계하여 이론적으로 처리할 수 없으나 세번째 항은 해석 모델의 분할방법 및 요소선정에 관계되기 때문에 이론적인 연구가 가능하여 해석결과의 정확도 평가와 개선 대책에 관한 연구가 여기에 집중되어 있다.

### 2. 분할오차의 평가 방법

해석 모델의 요소분할 방법에 따른 오차평

가 방법은 해석전 오차평가(prior error estimates)와 해석 후 오차평가(posteriori error estimates)의 두 가지로 나눌 수 있다.

해석 전 오차평가는 요소의 수식화 과정에서 근사함수의 차수와 요소의 형상 및 크기에 따라 수렴속도를 이론적으로 설정하고 요소의 분할상태로써 정확도를 점근적(asymptotic)으로 예측하기 때문에 오차의 값이 정확하게 결정될 수 없다. 반면에 해석 후 오차평가는 상대적인 방법이지만 해를 구하는 과정에서 정보를 얻어 분할오차를 계산하기 때문에 정량적으로 정확히 평가할 수 있는 장점이 있다.

해석 후 오차평가 방법도 문제의 특성과 오차평가의 대상에 따라서 여러가지 방법이 있으나 가장 일반적인 방법은 1987년 Zienkiewicz와 Zhu<sup>(5)</sup>가 제안한 응력오차이며 이 응력오차의 분포형태는 요소분할 방법의 적합성 및 해의 정확도를 평가하는 방법이다. 이들은 요소내의 응력오차를 식 (1)과 같이 정의한다.

$$e_{\sigma} = \sigma^* - \sigma \quad (1)$$

이 식에서  $\sigma$ 는 변위분포 함수로부터 계산되는 유한요소 해의 응력분포이고  $\sigma^*$ 는 엄밀해(exact solution)이지만 통상 절점응력을 변위분포의 형상함수로써 보간한 응력분포이다.

엄밀해 대신 사용되는  $\sigma^*$ 는 그 정확도가 절점응력값에 좌우되기 때문에 절점응력값을 보다 정확하게 구하기 위한 배려가 필요하다. 가장 일반적으로 사용되는 방법은 요소의 수치적분점에서 응력을 계산하고 이를 절점에 외삽한 다음 이 절점을 공유하는 요소에 대해서 평균값을 취하는 방법이다. 이 방법은 평균응력법으로 널리 알려져 있으며 요소별 응력도약현상을 막을 수 있고 해의 정확도도 크게 향상시킬 수 있음이 보고되어 있다.<sup>(5,6)</sup>

식 (1)로 표현한 응력오차는 일반적으로

요소내에 분포특성을 보이기 때문에 위치별 오차의 값도 구할 수 있으나 특별히 요구되는 경우 이외에는 다음식으로 표현되는 요소별 오차에너지 값(error energy norm)을 계산하여 요소의 분할오차로써 정의한다.<sup>(5,6,8)</sup>

$$\|e\|^e \equiv \int_{\Omega} e^T c e \, d\Omega \quad (2)$$

단,  $c$ 는 재료의 컴플라이언스(compliance) 행렬이고 상첨자  $e$ 는 요소를 의미한다. 이와 같이 정의된 요소의 분할오차를 모든 요소에 대하여 계산하고 요소별로 분할크기를 상대적으로 평가하기 위하여 재분할 지수(mesh refinement indicator)  $\xi^e$ 를 다음식으로 구한다.

$$\xi^e = \|e\|^e / \|e\|_m \quad (3)$$

$$\|e\|_m = \sum_{e=1}^E \|e\|^e / E \quad (4)$$

$E$ 는 계 전체의 요소 갯수이기 때문에  $\|e\|_m$ 은 평균 오차 에너지 값이 된다.

재분할 계수  $\xi^e$ 는 1보다 크거나 작은 값으로 각 요소에 분포되며 1보다 큰 요소는 더 작게 분할하여야 된다는 의미가 되므로 요소분할 방법의 적합성 여부를 판정하는 기준이 되기도 한다. 그림 1은 분할방법에 따른 재분할 지수  $\xi^e$ 의 분포상태를 표시한다.

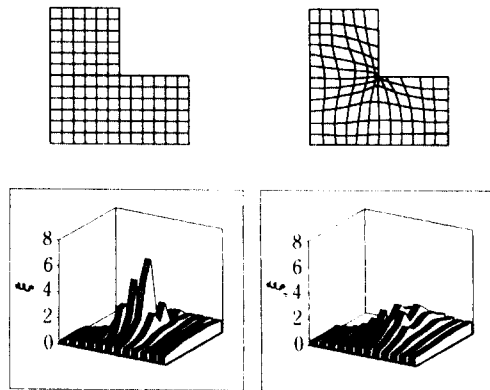


그림 1 L자형 모델에서 요소분할방법의 적합성

### 3. 유한요소해의 개선을 위한 적응전략

유한요소해의 정확도를 향상시키기 위하여 적응법(adaptive method)이 사용된다. 적응법은 전 단계에서 얻은 정보를 이용하여 적절한 방법으로 해석요소 모델을 수정한다는 의미로서 통상 피드백 과정(feedback process)을 수반하며 미리 설정된 기준에 따라서 수렴 허용치가 만족될 때까지 반복계산된다. 이와 같은 피드백 과정에는 오차평가와 적응모델 수정 및 수렴판정 단계가 포함된다. 피드백 과정의 유효성은 계산목표를 잘 설정함으로써 얻어질 수 있으며 계산목표가 달라지면 피드백 알고리즘과 유한요소 모델이 크게 달라질 수 있다. 즉 응력오차 에너지 값을 기준한 분할오차평가와 최대응력값을 기준한 오차평가는 각자 서로 다른 유한요소 모델을 생성시킬 수 있다.<sup>(7)</sup> 이 글에서는 앞절에서 정의한 응력오차에 의한 에너지 값으로 분할오차를 평가하고 이 분할오차가 최소가 되도록 요소크기를 반복 수정하는 적응전략을 고려하기로 한다.

유한요소해의 개선을 위한 적응전략에는 다음 네 가지가 사용된다.<sup>(7)</sup>

- (1) 요소의 연속적인 생성법
- (2) 절점좌표의 이동법
- (3) 일부 요소의 근사함수 차수를 증가시키는 방법
- (4) 요소의 생성과 근사함수 차수의 증가를 국부적으로 병행하는 방법

첫번째 전략은 보통 h-method로 불려지고 요소를 되풀이하여 세분하는 방법이다. 피드백 알고리즘은 요소의 분할오차값을 직접 또는 간접적으로 사용하며 모든 요소에서 이 오차값이 거의 같아질 때까지 되풀이된다.

두번째 전략은 요소와 계전체의 자유도 수를 일정하게 유지하면서 절점 위치를 이동시킴으로써 해의 정확도를 개선하는 방법이다. 이 방법은 R-method로 불려지고 유한요소법

보다 유한차분법에서 흔히 사용되고 있다.

세번째 전략은 요소의 근사함수의 차수를 일부 요소에서 연속적으로 증가시키기 때문에 p-method라고 불려지고 형상함수로서 계층함수(hierarchical function)가 사용된다. 이 방법은 처음 두 가지 전략보다 알고리즘이 간단하고 오차 평가가 수월한 장점이 있다.

네번째 전략은 (1)의 전략과 (3)의 전략을 동시에 사용하는 방법으로 h-p method로 불려진다. 적응 h-p method와 R-method에 대한 수학적 배경은 다른 방법에 비하여 덜 확립되어 있으며 미분방정식의 형태에 따라서 피드백 알고리즘을 달리 적용하고 있다. 이들 알고리즘을 분류하면 두 가지로 나눌 수 있으며 첫번째는 국부적인 외삽법(local extrapolation)이고 두번째는 일시적인 수정법이라고 볼 수 있다.

일시적인 수정법은 엄밀해를 알 수 있는 모델을 해석하여 그 모델의 정확한 오차를 계산하고 그 오차를 기준한 보간법을 써서 해석모델의 요소망을 수정하는 방법으로서 여러 소프트웨어에 이용되고 있다.

#### 3.1 h-method

유한요소의 크기를 연속적으로 세분해가는 h-method는 다음과 같은 적응 알고리즘을 채택한다.<sup>(5)</sup> 식 (3)으로 표현되는 분할오차의 크기와 요소의 크기  $h$  사이에는 식 (5)의 관계가 성립함이 알려지고 있다.<sup>(6)</sup>

$$h_f = h_i / \xi^p \tag{5}$$

$h_i$ 는 초기 요소의 크기이고  $h_f$ 는 새롭게 생성될 요소의 크기이다. 이 식에서 요소를 의미한 상첨자  $e$ 는 생략하였으며  $p$ 는 요소의 근사함수 차수가 된다. 식 (5)을  $h_i/h_f = \xi^p$ 으로 정리하고  $h_i/h_f = 2^n$ 으로 가정할 때 양변에 상용대수를 취하면 다음과 같이 오차 크기에 따른 요소 재분할 기준이 설정된다.

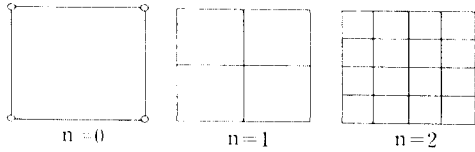


그림 2 요소 재분할 등급(n)

$$n = \begin{cases} \frac{1}{p} \frac{\log \xi}{\log 2} & (\xi > 1) \\ 0 & (\xi < 1) \end{cases} \quad (6)$$

식 (6)의  $n$ 는 요소 재분할의 등급이라고 할 수 있으며 그림 2와 같이 약속한다.

이와 같이 한 요소가 재분할 등급  $n$ 에 따라서 세분되고 인접요소에서 분할등급이 다르게 되면 5절점, 6절점, 7절점의 천이요소(transition element)<sup>(8)</sup>가 발생하고 이들 요소에 관한 수식화 과정이 서브루틴으로 도입되어야 한다.

이 방법의 피드백 알고리즘은 해의 허용오차,  $\bar{\eta}$ 를 지정하고 계 전체의 분할 오차 합  $\eta$ 가 이보다 작아지도록 세분한다.

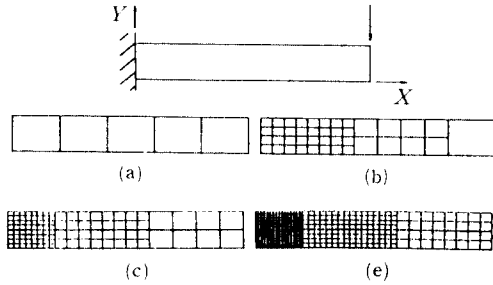
$$\eta = \left[ \frac{\|e\|}{\|u\| + \|e\|} \right]^{1/2} \leq \bar{\eta} \quad (7)$$

식 (7)에서  $\|e\| = \sum_{e=1}^E \|e\|^e$ 이고  $\|u\|$ 는 계의 변형률 에너지이다.

그림 3과 표 1은 외팔보 모델의 h-method 해석의 예를 보인다.

그림 4와 표 2는 L자형 모델의 h-method 해석의 예를 보인다.

h-method의 어려움은 절점과 요소가 새롭게 생성되기 때문에 요소자료의 구조(data structure)를 효과적으로 구성하여야 하며 계 전체의 자유도가 급격히 증가하고 강성행렬의 0이 아닌 원소가 폭 넓게 배치되기 때문에 역행렬을 구할 때 특별한 배려가 필요하다. 이와 같은 행렬의 역행렬을 구하는 방법으로는 프론탈 법(frontal method)<sup>(9)</sup>이나 밴드폭의 최소화 과정에 입각한 절점번호의

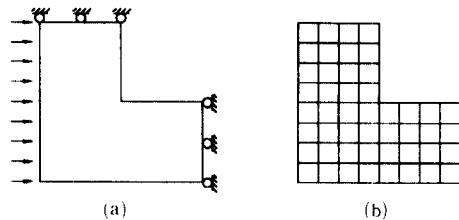


(a) 초기요소 모델  
(b) 30%허용오차 모델  
(c) 20%허용오차 모델  
(d) 10%허용오차 모델

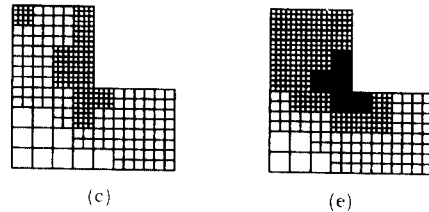
그림 3 h-method에 의하여 분할된 외팔보의 유한요소 모델

표 1 외팔보의 h-method 해석결과

모 델	허용오차 ( $\bar{\eta}$ )	총자유도	최대변위 ( $u/u^*$ )
a	-	20	0.5489
b	30	108	0.9196
c	20	248	0.9383
d	10	912	0.9909



(a) 초기요소 모델  
(b) 10%허용오차 모델



(c) 6%허용오차 모델  
(d) 6%허용오차 모델

그림 4 h-method에 의하여 분할생성된 유한요소 모델

표 2 L자형 모델의 h-method 해석결과

모 델	허용오차( $\eta$ )	총자유도	최대변위 (u/u*)
b	-	120	0.9518
c	10	676	0.9925
d	6	1546	0.9981

리넘버링법 (renumbering method)<sup>(10)</sup>이 추천된다. 그러나 최근에는 Gauss-Seidel법<sup>(11)</sup>에 의한 반복계산 등이 보고되고 있다.

### 3.2 G-method

요소와 계전체의 자유도수를 일정하게 유지하고 절점좌표를 이동시킴으로써 요소 크기가 조정되고 이에 따라 해의 정확도를 향상시키려는 방법이다. 절점좌표를 이동시키는 기준으로 식 (3)에서 정의한 요소재분할지수  $\xi$ 가 사용되며  $\xi$ 가 1보다 큰 요소는 요소크기를 더 작게 하여야 하고  $\xi$ 가 1보다 작으면 좀더 크게 분할하여서 전체 요소에  $\xi$ 가 1에 가까운 값으로 분포되도록 한다. 이와 같은 기준하에서 절점좌표를 이동시키는 기본적인 개념은 그림 5와 같은 스프링-절점계로 생각할 수 있다.

절점번호  $i$ 의 좌표를 새롭게 선정하고자 할 때 이절점을 공유하는 요소들을 ①, ②, ③, ④라 하고 각 요소의 도심과  $i$ 절점이 스프링으로 연결되어 있다고 생각한다. 이때 각 스프링 상수  $k_j$ 는 해당 요소에서 계산한 분할오차[식 (2)]에 비례한다고 가정할 때 절점  $i$ 는 오차가 큰 쪽으로 이동하게 된다. 이 관계를 수식으로 표현하면 다음과 같다.<sup>(12)</sup>

$$(x_i, y_i, z_i) = \frac{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\xi_j}{V_j} \right) (\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)}{\sum_{j=1}^m \left( \frac{\xi_j}{V_j} \right)} \quad (8)$$

단,  $(x_i, y_i, z_i)$ 는  $i$ 절점의 새로운 위치이고  $V_j, \xi_j, (\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$ 는  $j$ 요소의 체적과 오차에 의한 재분할 지수 [식 (3)] 및 도심의 좌표를 의미한다. 또한,  $m$ 는  $i$ 절점을 공유하

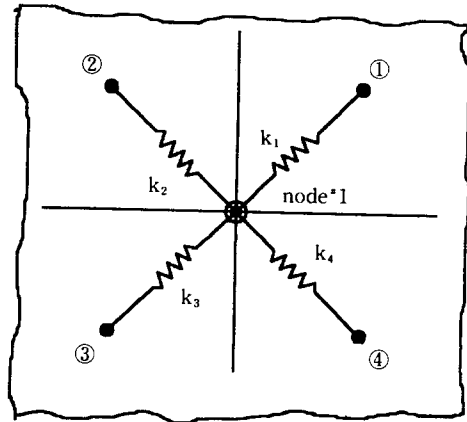
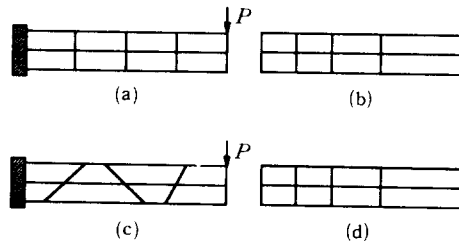


그림 5 스프링-절점계

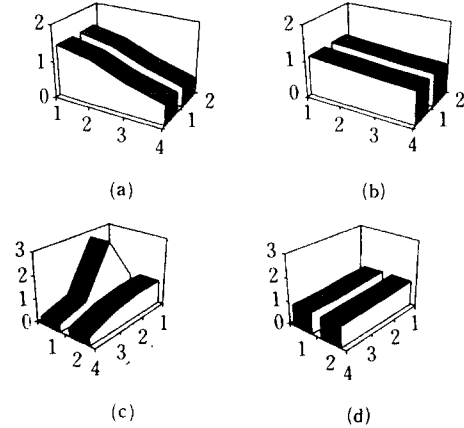


- (a) 초기 등요소분할 모델
- (b) 생성된 최적분할 모델
- (c) 초기 찌그러진 요소분할 모델
- (d) 생성된 최적분할 모델

그림 6 R-method를 이용한 외팔보의 초기 및 최적요소분할

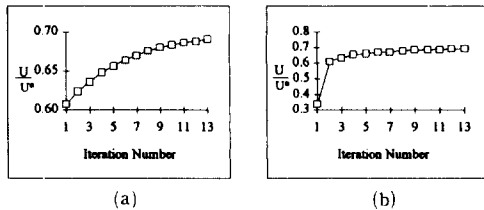
는 요소의 전체 갯수이다. 이와 같은 방법으로 모든 절점의 새로운 위치를 선정하고 반복계산을 수행한다. 이 방법에서는 요소의 재분할지수  $\xi$ 가 모든 요소에 대하여 1에 가까운 값이 될 때까지 반복 수행한다. 그림 6, 7, 8은 간단한 외팔보 문제에 대하여 이 방법으로 해석한 결과를 보인다.

이 방법의 특징은 문제의 특성에 따라서 수렴속도가 달라지며 초기 요소분할 형태가 어느 정도 합리성이 있으면 단 3~4번의 반복계산으로 가장 적절한 유한요소망을 얻을 수 있으며 이에 따라 해의 정확도를 향상시킬 수 있다.



(a) 초기 등요소분할 모델  
 (b) 생성된 최적분할 모델  
 (c) 초기 찌그러진 요소분할 모델  
 (d) 생성된 최적분할 모델

그림 7 외팔보의 초기 및 최적 요소분할 상태에서의 재분할 지수의 분포



(a) 초기 등요소분할 모델  
 (b) 초기 찌그러진 요소분할 모델

그림 8 외팔보의 최대 절점 변위의 수렴도

반복계산에 따른 역행렬 계산은 Gauss-Seidel법을 사용함으로써 대형 해석문제에 효과적으로 적용될 수 있음을 기대할 수 있다.

### 3.3 p-method

이 방법은 재분할 지수[식 (3)]가 1보다 큰 요소에 대하여 형상함수의 차수를 증가시키는 방법이다. 형상함수의 차수가 증가되면 새로운 절점이 요소의 변이나 중앙에 생성되므로 이와 같은 번거러움을 피하기 위하여

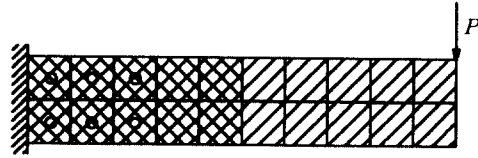


그림 9 p-version 해석을 위한 외팔보 모델

계층함수(hierarchical function)<sup>(13)</sup>를 도입하여 요소의 각 변이나 면의 중앙에 가상절점을 두고 수식화한다.

계층함수에 의한 p-version 요소의 수식화가 갖는 또 하나의 장점은 초기 자유도에 의한 강성행렬과 가상절점 자유도에 의한 강성행렬이 서로 연성되지 않기 때문에 해를 구할 때 반복법을 이용할 수 있다는 것이다.

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ia} \\ k_{ai} & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_a \end{Bmatrix} \quad (9)$$

식 (9)는 p-version 요소들에 의하여 수정된 계의 행렬 방정식을 표현한다. 첨자  $i$ 는 초기 p-version 요소가 없을 때의 값을 의미하고 첨자  $a$ 는 p-version 요소에 의하여 추가된 값을 표시한다. 식 (9)의 'k'는 원소가 임의로 분포(sparsely populated)되기 때문에 반복법을 써서 해를 구하는 것이 효과적이다.<sup>(13)</sup>

$$[k_{ii}]\{\Delta_i\} = \{f_i\} - [k_{ia}]\{\Delta_a\} \quad (10)$$

$$[k_{aa}]\{\Delta_a\} = \{f_a\} - [k_{ai}]\{\Delta_i\} \quad (11)$$

즉, p-version 요소를 도입하기 전에 구한 해,  $\{\Delta_i\}$ 를 식 (11)에 대입하여  $\{\Delta_a\}$ 를 구한 다음 식 (10)에 의하여  $\{\Delta_i\}$ 를 수정하고 이 값을 식 (11)에 다시 대입하여  $\{\Delta_a\}$ 를 구하는 반복법을 사용한다.

그림 9 및 표 3은 간단한 외팔보 문제에 p-method를 적용하여 구한 결과를 보인다.

이 방법은 알고리즘 자체가 다른 방법에 비하여 간단하고 해의 정확도도 요구하는 값에 만족하도록 조절할 수 있기 때문에 많은 연구가 보고되어 있다.

표 3 p-version 해석에 의한 변위와 응력의 수렴성

구 분	일반사변형요소	p-version 사변형 요소		
		경우 1	경우 2	경우 3
최대변위 ( $u/u^*$ )	0.80976	0.93178	0.92599	0.90669
최대주응력 ( $\sigma_1/\sigma_1^*$ )	0.90664	0.92351	0.92470	0.92471

### 3.4 최적 유한요소 모델

최적 유한요소 모델은 일정 자유도하에서 오차가 최소로 되도록 절점이 분포된 가용요소(admissible element)만의 모델을 의미한다. 가용요소는 무엇보다 근사차수가 일정하여야 하며 이것이 다르거나 오차평가의 기준이 다르면 최적 유한요소 모델의 형상도 크게 달라질 수 있다.

변분법에 의한 유한요소법에서 최적 요소 모델을 얻으려는 최초의 시도<sup>(14)</sup>는 절점위치를 미지수로 하고 전체 위치 에너지를 절점 자유도와 절점 위치에 관하여 최소화시키고 하였다. 이와 같은 방법은 선형문제조차 비선형 방정식을 풀어야 하기 때문에 매우 비현실적이다.

오차를 최소화시켜서 최적 요소망을 구성하려는 문제는 그 자체가 잘 정립되기 어렵다. 그 이유는 절점위치의 작은 이동이 오차의 자승으로 영향을 주기 때문이다.<sup>(7)</sup> 따라서 준최적 요소망(nearly optimal meshes)이 고려되고 위에서 설명한 적응개선 전략들은 모두 이에 준한다. 즉, 모든 요소들에서 오차값이 거의 같아지면 최적 요소망이 형성되었음을 특정짓게 된다. 이에 대한 타당성은 1차원 문제에서 요소의 오차값이 동일할 때 계의 오차가 최소가 되어 최적 요소망이 형

성됨이 밝혀진 데서 유래된다.<sup>(15)</sup>

## 4. 맺음말

유한요소해의 신뢰성을 높이기 위하여 현재까지 연구된 해의 오차 평가 방법과 적응 수정 전략들을 검토하였다. 이들 방법과 수학적 이론으로 볼 수 있는 분할오차의 평가법이 아직도 불완전하고 매우 간단한 문제에 대해서 수치적 실험이 수행되었을 뿐이다. 더욱이 적응전략은 연구용 또는 특정목적의 유한요소 프로그램에 응용되었을 뿐 최근까지 상업용 패키지 프로그램에는 해의 적응 수정이나 해의 오차평가 기능이 도입되지 못하고 있는 실정이다. 이런 측면에서 오차평가와 조절을 위한 이론과 전략 및 알고리즘 개발에 주된 연구가 요구된다.

분할오차의 평가와 조절기법이 완성되고 일반 유한요소 패키지 시스템에 이 기술이 도입되었을 때 해석자는 구조물을 특정짓는 초기 분할 모델과 오차평가 대상 및 허용치만을 입력시키면 된다. 이 두 가지 자료에 의하여 유한요소 시스템은 계산오차가 허용치 이하가 될 때까지 자동적으로 모델을 재분할하여 해석함으로써 신뢰성 있고 해석자와 무관한 유한요소해를 제공하게 될 것이다.

## 참고문헌

- (1) Clough, R. W., 1960, "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis," *J. Struct. Div., ASCE, Proc. 2nd Conf. Electronic Computation*, pp. 345~378.
- (2) Utku, S. and Melosh, R. J., 1984, "Solution Error in Finite Element Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 3, pp. 379~393.
- (3) Babuska, I., Zienkiewicz, O. C., Gago J. R. and DeOliveira, F. R. A., 1986, *Accuracy*

- Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, John Wiley & Sons, New York.
- (4) Szabo, B. and Babuska, I., 1991, *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- (5) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1987, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis," *Internat. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 24, pp. 337~357.
- (6) 이상혁, 임장근, 1993, "변위형 유한요소법에서 발생하는 응력오차의 보정 방안," 대한기계학회논문집, 제17권, 제4호, pp. 731~739.
- (7) Noor, A. K. and Babuska, I., 1987, "Quality Assessment and Control of Finite Element Analysis," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 3, pp. 1~26.
- (8) Krishnamoorthy, C. S. and Umesh, K. R., 1993, "Adaptive Mesh Refinement for Two-Dimensional Finite Element Stress Analysis," *Computer & Structure*, Vol. 48, No. 1, pp. 121~133.
- (9) Irons, B. M., 1970, "A Frontal Solution Program," *Internat. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 2, pp. 5~32.
- (10) Collins, R. J., 1973, "Bandwidth Reduction by Automatic Renumbering," *Internat. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 6, pp. 345~356.
- (11) Tokarsky, B., 1992, "Fully Automatic Finite Element Solution of Static Problems," *Computers & Structures*, Vol. 43, No. 2, pp. 391~394.
- (12) 오형석, 임장근, 1994, "절점이동에 의한 평면문제 유한요소의 최적 분할 방안," 대한기계학회, 94년도 춘계학술대회 논문집(1), pp. 331~335.
- (13) Robinson, J., 1986, "An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 2, pp. 377~388.
- (14) McNiece, G. M. and Marcal, P. V., 1973, "Optimization of Finite Element Grids Based on Minimum Potential Energy," *J. Engrg. for Industry*, ASME, Vol. 95, pp. 186~190.
- (15) Babuska, I. and Rheinboldt, W. C., 1981, "A Posteriori Error Analysis of Finite Element Solutions for One-Dimensional Problems," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 18, pp. 565~589. ■