

〈論 文〉

접선하중과 비틀림모멘트를 받는 직교이방성 마찰조건인 정지미끄럼접촉 해석

이성철* · 광병만** · 권오관*

(1994년 2월 8일 접수)

Analysis of Incipient Sliding Contact with Orthotropic Friction Condition Subjected to Tangential Load and Twisting Moment

Sung Chul Lee, Byung Man Kwak and Oh Kwan Kwon

Key Words : Sliding Contact(미끄럼접촉), Friction Law(마찰법칙), Micro Slip(미세미끄럼), Frictional Traction(마찰력), Linear Complementarity Problem(선형상보성문제)

Abstract

A numerical scheme is developed for the analysis of incipient sliding contact with orthotropic friction condition subjected to tangential load and twisting moment. The inherent nonlinearity in the orthotropic friction law has been treated by a polyhedral friction law. Then, a three-dimensional linear complementarity problem(LCP) formulation in an incremental form is obtained, and the existence of a solution is investigated. A Lemke's complementary pivoting algorithm is used for solving the LCP. The scheme is illustrated by spherical contact problems, and the effects of eccentricity of elliptical friction domain on the traction and stick region are discussed.

1. 서 론

기계나 구조물에서 서로 접촉하고 있는 물체에 동하중이 작용하면 접촉부는 반작용력으로 인하여 크랙의 발생이나 전파의 시발점이 될 가능성이 높으며, 재료의 국부적 강성저하로 항복이나 파괴에 취약해지기 쉽기 때문에 구조강도에 큰 영향을 미치고, 접촉부에서 되풀이되는 미세미끄럼(micro slip)에 기인한 마멸이 발생되어 간극 및 재원변화가 초래될 수 있어 구조물의 전전성에 큰 영향을 미치므로 자세한 해석이 요구된다.

접촉하고 있는 물체에 부가되는 하중이 미끄럼을

동을 일으키는 임계하중보다 작은 경우 접촉영역의 일부에서는 미세미끄럼이 발생되며, 이를 정지미끄럼접촉(incipient sliding contact)이라 한다. 수직하중을 받아 접촉하고 있는 물체에 접촉부 접선방향으로 하중이 부가되는 문제는 Mindlin⁽¹⁾에 의해 처음 연구되었다. Mindlin은 두개의 구가 접촉한 상태에서 접선하중이 작용할 때 마찰력분포, 강체변위, 접합과 미끄럼영역의 경계를 구하는 식을 유도하고 강체변위 계산결과로부터 마찰에 의해 소모되는 에너지를 계산하였다. Johnson⁽²⁾은 Mindlin의 해석을 확장하여 미세미끄럼량을 계산하고 Mindlin과 Deresiewicz⁽³⁾는 접촉면에 경사진 방향으로 반복하중이 작용하는 문제에 대해서 이론해석을 수행하였다. Lubkin⁽⁴⁾은 접촉하고 있는 물체에 비틀림모멘트가 작용하는 문제의 이론해를 구하였으며,

*정회원, 한국과학기술연구원 기전연구부

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

Deresiewicz⁽⁵⁾는 Lubkin의 해를 확장하여 비틀림 모멘트가 되풀이되는 문제를 다루었다. 한편 Choi⁽⁶⁾는 마찰력과 미끄럼의 부등식조건에 여유변수를 도입하여 정지미끄럼접촉을 수정된 선형계획법문제로 수식화하고 비틀림모멘트가 작용하는 문제의 해법을 제시하였다.

접촉문제에서 다루고 있는 마찰은 대부분 쿨롱마찰로 2차원 문제로 다루고 있으나 본 연구에서는 3차원 마찰접촉문제를 대상으로 하여, 쿨롱마찰법칙을 일반화한 직교이방성 마찰법칙(orthotropic friction law)^(7,8)을 적용하기로 한다. 직교이방성 마찰법칙은 비선형 부등식조건이기 때문에 수치적으로 취급하기가 매우 어려우며, 이를 고려한 접촉문제는 소수의 연구결과만이 발표되어 있다. Kwak^(9,10)은 직교이방성 마찰법칙의 비선형성을 제거하기 위하여 다각형 마찰법칙(polyhedral friction law)을 도입하고 3차원 마찰접촉 문제를 선형상보성문제로 수식화하였으며, Lee 등⁽¹¹⁾은 Kwak이 제안한 다각형 마찰법칙을 효율적인 식으로 유도하고 접촉부 접선하중이 작용하는 문제에 대한 수치해석 결과를 제시하였다.

본 논문에서는 직교이방성 마찰조건을 다각형 마찰조건으로 선형화하여 헤르츠접촉(Hertzian contact) 상태에서 접촉부 접선하중과 비틀림모멘트가 동시에 추가되는 정지미끄럼접촉을 선형상보성문제(linear complementarity problem)로 수식화하고 해의 유일성에 대해서 검토하며, 마찰의 직교이방성이 마찰력분포와 접합영역에 미치는 영향을 고찰한다.

2. 상보성 수식화를 위한 이론전개

수직하중이 작용하여 접촉하고 있는 물체에 접선하중과 비틀림모멘트가 동시에 추가되는 정지미끄럼접촉을 선형상보성문제(LCP)로 수식화한다. 수직하중에 의한 헤르츠접촉 상태에서도 마찰력이 존재하나⁽¹²⁾ 접선하중이나 비틀림모멘트가 추가되기에 의한 마찰력이 지배적으로 나타나기 때문에 수직하중 작용시에 생긴 잔류 마찰력은 무시한다. 그리고 접촉하는 두 물체의 재료는 탄성적 특성이 유사하고 선형탄성을 만족하며, 접촉부는 평면으로 가정한다.

접촉하고 있는 물체에 추가되는 하중이 미끄러운 동을 일으키는 하중보다 작은 정지미끄럼접촉의 경

우 접촉부 일부는 미끄럼이 생기지 않는 접합영역(stick region)이 되며 그 나머지 부분은 미끄럼이 발생하는 미끄럼영역(slip region)이 된다. 이 문제는 접합영역에서 마찰력은 미지인 반면 미끄럼이 생기지 않고, 미끄럼영역에서 미끄럼은 미지이나 마찰력은 한계 마찰력에 도달하기 때문에 접촉압력이 주어지면 바로 구할 수 있다. 이러한 물리적 특성을 갖고 있는 문제들은 상보성문제로 수식화가 가능하다.

2.1 평형방정식

두 물체를 Fig. 1에 표시한 바와 같이 물체 1과 물체 2로 구분하고 수직하중 P 에 의해 접촉하고 있는 상태를 초기상태로 한다. 접촉부에서 (x, y) 좌표는 마찰주축 방향으로 잡으며, 수직전개의 편의를 위하여 물체 1에서 물리량의 부호는 좌표계와 동일한 방향의 마찰력과 변위를 (+)부호로 잡으며, 물체 2에서는 좌표계의 (-)방향에 대한 마찰력과 변위를 (+)로 잡는다. 그리고 미끄럼은 마찰력의 반대방향으로 발생되기 때문에 각 물체에서 미끄럼은 마찰력 방향과 부호를 반대로 잡는다. 각 물체에 작용하는 마찰력은 크기가 같고 방향이 반대이므로 위의 부호규약을 따르면 물체를 구분하지 않고 사용할 수 있다.

물체의 초기상태는 헤르츠접촉인 경우가 대상이므로 비틀림 중심은 알고 있으며, 변하지 않는다고 가정한다. 그리고 접촉하고 있는 물체의 접촉압력 S_n 과 접합영역은 수직하중 P 에 의해 결정되며 접촉부 접선하중이나 비틀림모멘트가 추가되어도 변하지 않는다고 가정한다. 이러한 가정은 두 물체의 탄성적 특성이 유사한 경우에 적용할 수 있다.⁽¹³⁾

본 연구에서는 동하중을 대상으로 하므로 증분해석이 필요하다. 증분해석을 위하여 기준상태에서

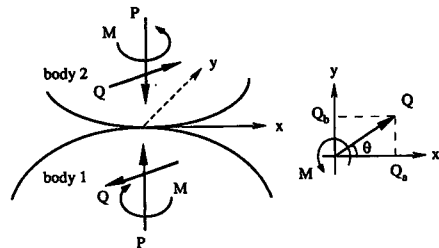


Fig. 1 Model of contact subjected to tangential load and twisting moment

접촉물체는 평형을 만족하고 접촉부의 상태는 알고 있는 것으로 한다.

접촉부를 n 개의 격자로 분할하고 격자의 중심점에 작용하는 접선방향 표면력 즉, 마찰력 벡터를 q_a 라 하면 접선하중에 대한 평형방정식은 다음과 같다.

$$\bar{Q}_a + \Delta Q_a = e^T q_a, \quad a = a, b \tag{1}$$

여기서, \bar{Q}_a 는 기준상태에서의 접선하중, ΔQ_a 는 접선하중의 증분이다. 그리고 e 는 모든 성분이 1인 n 차원의 벡터, 하첨자 a 와 b 는 각각 x 축과 y 축 방향을 나타낸다.

비틀림모멘트에 대한 평형방정식은 다음과 같다.

$$\bar{M} + \Delta M = -y^T q_a + x^T q_b \tag{2}$$

여기서, \bar{M} 는 기준상태에서의 비틀림모멘트, ΔM 은 비틀림모멘트의 증분이며, (x, y) 는 각 결점의 위치벡터이다.

식(1)과 (2)에서 마찰력은 현재 상태에 대하여 기술하였는데 그 이유는 마찰조건에서 미끄럼발생 여부는 현재 상태의 마찰력을 기준으로 판별하기 때문이다.

2.2 마찰조건

마찰 주축방향에 대한 마찰계수를 μ_a, μ_b 라 하고 마찰은 직교이방성 마찰법칙을 따르는 것으로 한다. 직교이방성 마찰법칙을 식으로 기술하면 다음과 같다. ^(7,8)

$$C_E = \{(q_a, q_b) : [(\frac{q_a}{\mu_a})^2 + (\frac{q_b}{\mu_b})^2]^{\frac{1}{2}} \leq p\} \tag{3}$$

여기서, C_E 는 마찰영역이 타원임을 나타낸다. p 는 격자에 작용하는 접촉압력을 격자의 중심결점에 작용하는 힘으로 등가한 벡터이며 접촉압력을 (+)로 정의 하던 항상 양의 값을 갖는다.

식(3)에서 부등호가 만족되면 즉, 마찰력이 영역 내부에 위치하면 미끄럼이 발생되지 않는다. 등호 상태가 되면 마찰력이 영역 경계에 위치하여 한계 마찰력에 도달하기 때문에 더 이상 증가할 수 없고 미끄럼이 발생된다. 이때 미끄럼은 다음 식으로 기술된다.

$$D_{Ea} = -\lambda \frac{q_a}{\mu_a}, \quad D_{Eb} = -\lambda \frac{q_b}{\mu_b} \tag{4}$$

여기서, D_{Ea} 와 D_{Eb} 는 각각 x 축과 y 축에 대한 두

물체의 상대 미끄럼량을 나타내고 λ 는 양의 값의 변수이다. 이 식에서 미끄럼방향은 경계에서 법선 방향으로 결정되며, (-)부호는 마찰력과 반대방향으로 미끄럼이 발생됨을 의미한다.

직교이방성 마찰조건 식(3)과 (4)는 비선형이므로 선형문제로 다루기 위해서 타원의 마찰영역을 Fig. 2에 보인 바와 같이 다각형 마찰영역으로 선형화하면 다음과 같다. ⁽¹¹⁾

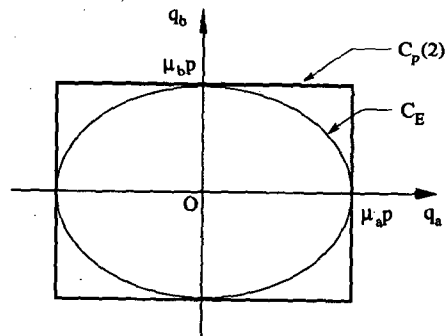
$$C_p(e) = \{(q_a, q_b) : |q_a \cos \beta_i + q_b \sin \beta_i| \leq \mu_i p, \quad i = 1, \dots, e\} \tag{5}$$

여기서,

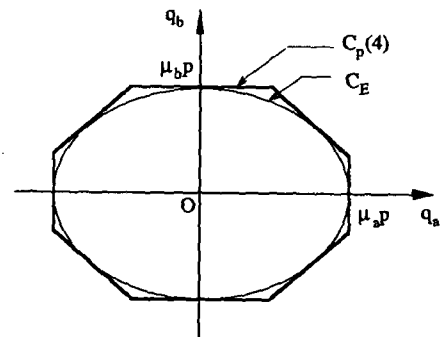
$$\mu_i = \mu_a \cos \alpha_i \cos \beta_i + \mu_b \sin \alpha_i \sin \beta_i \tag{6}$$

$$\tan \beta_i = (\frac{\mu_a}{\mu_b}) \tan \alpha_i \tag{7}$$

그리고 e 는 마찰영역을 구성하는 다각형의 차수로 $e=2$ 이면 사각형 마찰영역, $e=4$ 이면 팔각형 마찰영역이 된다.



(a) Rectangular law, $C_p(2)$



(b) Octagonal law, $C_p(4)$

Fig. 2 Polyhedral friction law as compared to orthotropic law

식(5)에서 부등호가 만족되면 미끄럼이 발생되지 않는다. 상계의 등호조건 $i \in e$ 에서는 β_i 방향으로 미끄럼이 생기며, 이때의 미끄럼량을 D_i^+ ($D_i^+ \geq 0$)라 하면 주축방향 미끄럼은 다음과 같이 구해진다.

$$D_a = D_i^+ \cos \beta_i, \quad D_b = D_i^+ \sin \beta_i \quad (8)$$

하계의 등호조건에서는 $D_i^- \geq 0$ 이 존재하고 미끄럼 방향은 상계 조건에서의 미끄럼방향과 반대가 된다. 따라서 이때의 주축방향 미끄럼은 다음과 같다.

$$D_a = -D_i^- \cos \beta_i, \quad D_b = -D_i^- \sin \beta_i \quad (9)$$

다각형 마찰영역의 모든 경계변을 고려하면 주축방향 미끄럼은 다음과 같이 기술된다.

$$D_a = \sum_{i=1}^n (D_i^+ - D_i^-) \cos \beta_i \quad (10)$$

$$D_b = \sum_{i=1}^n (D_i^+ - D_i^-) \sin \beta_i \quad (11)$$

이 식들은 직교이방성 마찰법칙에서 미끄럼에 대한 식인 식(4)에 대응하는 식이다.

상보성 수식화를 위하여 식(5)의 마찰조건에 여유변수를 도입하면 다음과 같다.

$$q_a \cos \beta_i + q_b \sin \beta_i + T_i^+ = \mu_i p \quad (12)$$

$$q_a \cos \beta_i + q_b \sin \beta_i - T_i^- = -\mu_i p \quad (13)$$

여기서,

$$T_i^+ \geq 0, \quad T_i^- \geq 0 \quad (14)$$

주축방향 x 에서는 $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\mu_1 = \mu_a$ 이므로 식(12)와 (13)은

$$q_a + T_1^+ = \mu_a p \quad (15)$$

$$q_a - T_1^- = -\mu_a p \quad (16)$$

y 축에서는 $\alpha_2 = \beta_2 = \pi/2$, $\mu_2 = \mu_b$ 이므로

$$q_b + T_2^+ = \mu_b p \quad (17)$$

$$q_b - T_2^- = -\mu_b p \quad (18)$$

다각형 마찰영역의 각 경계변에 대한 마찰조건에서 도입된 여유변수와 주축방향의 여유변수 T_1^+ , T_2^+ 와의 관계는 식(15), (17)을 식(12), (13)에 대입하면 다음과 같이 구해진다.

$$T_i^+ = T_1^+ \cos \beta_i + T_2^+ \sin \beta_i + \mu_i^* p \quad (19)$$

$$T_i^- = -T_1^+ \cos \beta_i - T_2^+ \sin \beta_i + 2\mu_i p - \mu_i^* p \quad (20)$$

여기서,

$$\mu_i^* = \mu_i - \mu_a \cos \beta_i - \mu_b \sin \beta_i \quad (21)$$

주축방향에서 식(19)는 항등식이므로 마찰영역이 사각형인 $C_p(2)$ 에서는 나타나지 않는다.

2.3 변위조건

접촉하고 있는 두 물체에 접촉부 접선방향으로 하중이 작용할 때 x 축 방향에 대한 물체의 변형을 Fig. 3에 도시하였다. 그림에서 A_1 과 A_2 는 물체 1과 2의 표면에 위치한 점으로 초기상태에서 접촉하고 있던 점이다. 접선하중 Q 가 부가되면 접촉부에서 충분히 떨어져 있는 지점인 B_1 과 B_2 에서는 강체변위 δ_a^0 , δ_b^0 만 생기나 A_1 과 A_2 점에서는 강체변위와 함께 반대방향으로 마찰력에 의한 u_a^1 , u_a^2 의 표면변위가 생긴다.

물리적으로 두 물체의 표면은 서로 겹쳐질 수 없기 때문에 두 물체의 표면변위 합은 강체변위의 합보다 작아야 한다. 모든 절점에서 표면이 겹치지 않는 조건을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$U_a \leq r_i^c e, \quad \alpha = a, b \quad (22)$$

여기서,

$$U_a = u_a^1 + u_a^2 \quad (23)$$

$$r_i^c = \delta_a^1 + \delta_a^2 \quad (24)$$

그리고 상첨자 c 는 현재상태를 나타낸다.

식(22)에 비틀림모멘트가 작용하는 경우를 고려하면 다음과 같다. 현재상태에 대한 두 물체의 강체회전각의 합을 β^c 라 하면 이에 의한 각 절점에서의 축방향 강체변위는 다음 식으로 구해진다.

$$b_a^c = -\beta^c y, \quad b_b^c = \beta^c x \quad (25)$$

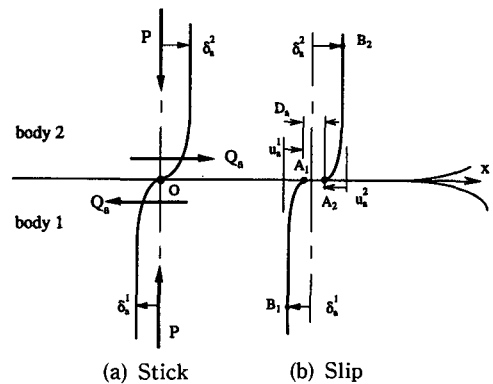


Fig. 3 Deformation patterns near contact surface for stick and slip situations

따라서 접선하중과 비틀림모멘트가 동시에 추가될 때 두 표면이 겹치지 않는 조건은 다음과 같다.

$$U_a \leq r_a^c e - \beta^c y \quad (26)$$

$$U_b \leq r_b^c e + \beta^c x \quad (27)$$

식(26)과 (27)에서 등호조건을 만족하는 절점들은 상대변위가 없는 접합영역을 나타내며, 부등호 조건의 절점들은 미끄럼이 생기는 미끄럼영역이 되고 이때 강체변위와 표면변위의 차는 미끄럼량이 된다.

$$D_a^c = -U_a + r_a^c e - \beta^c y \quad (28)$$

$$D_b^c = -U_b + r_b^c e + \beta^c x \quad (29)$$

미끄럼량과 강체변위를 다음과 같이 증분형으로 기술하고

$$D_a^c = \bar{D}_a + D_a \quad (30)$$

$$r_a^c = \bar{r}_a + r_a, \quad \beta^c = \bar{\beta} + \beta \quad (31)$$

강체변위의 증분을 두 개의 음이 아닌 변수의 차로 표현하여 식(28), (29)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$D_a = -U_a + (r_a^+ - r_a^-)e - (\beta^+ - \beta^-)y + d_a \quad (32)$$

$$D_b = -U_b + (r_b^+ - r_b^-)e + (\beta^+ - \beta^-)x + d_b \quad (33)$$

여기서,

$$d_a = \bar{r}_a e - \bar{\beta} y - \bar{D}_a, \quad d_b = \bar{r}_b e + \bar{\beta} x - \bar{D}_b \quad (34)$$

$$r_a = r_a^+ - r_a^-, \quad (r_a^+ \geq 0, r_a^- \geq 0) \quad (35)$$

$$\beta = \beta^+ - \beta^-, \quad (\beta^+ \geq 0, \beta^- \geq 0) \quad (36)$$

마찰조건에서 미끄럼에 대해 기술한 식(10)과 (11)은 미끄럼 발생여부와 미끄럼방향을 구속하는 식인데 반하여 식(32)와 (33)은 미끄럼에 대한 물리적 적합성을 나타낸다. 식(32), (33)에 각각 식(10), (11)을 대입하면 다음 식이 유도된다.

$$\sum_{i=1}^e (D_i^+ - D_i^-) \cos \beta_i = -U_a + (r_a^+ - r_a^-)e - (\beta^+ - \beta^-)y + d_a \quad (37)$$

$$\sum_{i=1}^e (D_i^+ - D_i^-) \sin \beta_i = -U_b + (r_b^+ - r_b^-)e + (\beta^+ - \beta^-)x + d_b \quad (38)$$

2.4 상보성조건의 검토

마찰조건에 도입된 여유변수와 각 경계면에서의 미끄럼은 상보성 관계에 있다. 절점 k 에서 마찰력

의 β_i 방향 성분이 다각형 마찰영역 경계에 위치하면 마찰력은 더 이상 증가할 수 없고 미끄럼이 발생된다. 즉, $T_{ki}^+ = 0, D_{ki}^+ \geq 0$ 이 된다. 한편 마찰영역 내부에 마찰력이 위하면 미끄럼이 발생되지 않는다. 이 경우에는 $T_{ki}^+ \geq 0, D_{ki}^+ = 0$ 이 된다. 마찬가지로 $(-)\beta_i$ 방향에 대해서 고찰하면 T_{ki}^- 와 D_{ki}^- 의 관계가 설명된다. 모든 절점에 대해서는 다음 식과 같이 기술된다.

$$(T_i^+)^T D_i^- = 0, \quad (T_i^-)^T D_i^+ = 0, \quad i=1, \dots, e \quad (39)$$

$$T_i^+ \geq 0, \quad D_i^+ \geq 0, \quad T_i^- \geq 0, \quad D_i^- \geq 0 \quad (40)$$

정지미끄럼접촉을 상보성문제 수식화하기 위해서는 변위조건인 식(37), (38)에 포함되어 있는 미지의 강체변위 및 강체회전각과 상보성조건을 갖는 변수를 설정하여야 한다. 강체변위는 물체에 작용하는 외력과 관련이 있기 때문에 평형방정식에 여유변수를 도입하면 강체변위와 상보성조건을 이루게 할 수 있다.

접선하중에 대한 평형방정식인 식(1)을 두 개의 부등식 조건으로 나누어 쓰고, 여기에 다음과 같이 음이 아닌 여유변수를 도입한다.

$$Q_a + V_a^+ = e^T q_a \quad (41)$$

$$Q_a - V_a^- = e^T q_a, \quad \alpha = a, b \quad (42)$$

여기서, $Q_a = \bar{Q}_a + \Delta Q_a$

평형방정식에 도입된 여유변수 V_a^+ 와 V_a^- 는 강체변위 r_a^+ 와 r_a^- 를 제한하는 가상외력으로 해석된다. 즉, $V_a^+ = 0$ 이면 이에 대응하는 강체변위 r_a^+ 가 존재하며, $r_a^+ = 0$ 이면 가상구속력이 있을 수 있다. 마찬가지로 V_a^- 와 r_a^- 의 관계가 설명된다. 이를 식으로 기술하면 다음과 같다.

$$V_a^+ r_a^+ = 0, \quad V_a^- r_a^- = 0 \quad (43)$$

$$V_a^+ \geq 0, \quad r_a^+ \geq 0, \quad V_a^- \geq 0, \quad r_a^- \geq 0 \quad (44)$$

물리적 의미에서 보면 V_a^+, V_a^- 는 등식인 평형방정식에 도입된 것이기 때문에 실제로 $V_a^+ = V_a^- = 0$ 이며, 강체변위 r_a 가 허용된다.

마찬가지로 비틀림모멘트 평형방정식 식(2)를 두 개의 부등식으로 나누어 쓰고 음이 아닌 여유변수 W^+ 와 W^- 를 도입한다.

$$M + W^+ = -y^T q_a + x^T q_b \quad (45)$$

$$M - W^- = -y^T q_a + x^T q_b \quad (46)$$

여기서, $M = \bar{M} + \Delta M$

$$f = \begin{bmatrix} d_a - \mu_a H_a p - \mu_b G_a b p \\ d_b - \mu_a G_a b p - \mu_b H_b p \\ \mu_i^* p \\ 2\mu_i p - \mu_i^* p \\ -(Q_a - \mu_a P) \\ (Q_a - \mu_a P) \\ -(Q_b - \mu_b P) \\ (Q_b - \mu_b P) \\ -(M + \mu_a y^T p - \mu_b x^T p) \\ (M + \mu_a y^T p - \mu_b x^T p) \end{bmatrix} \quad (65)$$

그리고

$$\begin{aligned} i &= 1, \dots, e, \quad j = 3, \dots, e \\ c_i &= \cos \beta_i, \quad s_i = \sin \beta_i \\ I &= n \text{ 차원의 단위 행렬} \end{aligned}$$

정지미끄럼접촉을 수식화한 선형상보성문제에서 계수행렬 M 은 다음의 특성을 갖고 있다.

$$M = \begin{bmatrix} B & A^T \\ -A & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

여기서, B 는 영향계수행렬로 대칭이므로 식 (61)의 선형상보성문제는 이차계획법문제의 쿤-터커(Kuhn-Tucker)조건이 된다. 따라서 정지미끄럼접촉은 이차계획법문제로도 수식화할 수 있다. 그리고 행렬 B 의 2차 형식(quadratic form)은 접선방향 포면력에 의한 외부일을 나타내기 때문에 B 는 positive definite하다. 따라서 M 은 copositive-plus이며, 이

러한 특성은 해의 존재를 보장하고 상보성 피보팅 알고리즘을 사용하면 유한 수순내에 가용해(feasible solution)가 얻어진다.⁽¹⁵⁾

식 (61)로 수식화된 정지미끄럼접촉의 선형상보성 문제의 해가 구해지면 각 절점에 작용하는 주축방향 마찰력은 식 (15), (16)과 식 (17), (18)에서 다음과 같이 계산된다.

$$a_a = -\frac{T_1^+ - T_1^-}{2} \quad (67)$$

$$a_b = -\frac{T_2^+ - T_2^-}{2} \quad (68)$$

절점에서의 마찰력을 격자의 면적으로 나누면 단위 면적당 마찰력 S_{ta}, S_{tb} 가 계산된다. 그리고 미끄럼량은 식 (10)과 (11)에서 계산되며, 강체변위와 강체회전각은 각각 식 (35)와 식 (36)에서 구해진다.

4. 계산 예

물체의 물성치와 수직하중에 의한 초기 접촉상태는 Table 1의 값을 사용하였다. 접촉영역은 Fig. 4와 같이 221개의 격자로 분할하고 계산결과를 고찰하기 위하여 격자의 절점은 반경방향 위치에 따라 $g_0 - g_{10}$ 의 절점군으로 분류하였다. 물체에 작용하는 비틀림모멘트와 접선하중은 다음과 같이 무차원화 하였다.

$$m = M/M_0 \quad (69)$$

Table 1 Initial configuration of spherical contact

	Body 1	Body 2
Radius of sphere	$r_1 = 0.1 \text{ m}$	$r_2 = 0.1 \text{ m}$
Young's modulus	$E_1 = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$	$E_2 = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$
Poisson's ratio	$\nu_1 = 0.3$	$\nu_2 = 0.3$
Equivalent Young's modulus	$\frac{1}{E} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$	$E = 1.099 \times 10^{11}$
Equivalent radius	$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$	$R = 0.05 \text{ m}$
Normal load	$P = 5000 \text{ N}$	
Radius of contact circle	$a = \left(\frac{3PR}{4E} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.195 \times 10^{-3} \text{ m}$	
Max. contact pressure	$S_{n0} = \frac{3P}{2\pi a^2} = 1.672 \times 10^9 \text{ N/m}^2$	

$$t = Q / \mu_c P \quad (70)$$

$$\mu_m = \sqrt{\mu_a \mu_b} \quad (72)$$

여기서,

$$M_0 = \frac{3}{16} \pi \mu_m a P \quad (71)$$

등방성 마찰조건 즉, $\mu_a = \mu_b$ 이면 M_0 는 접촉영역이 완전 미끄럼상태에 도달하는 임계 비틀림모멘트가 된다.⁽¹³⁾ 그리고 μ_c 는 접선하중 작용방향에 대한 마찰계수이다.

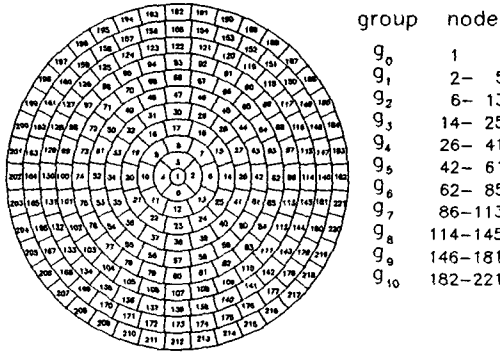
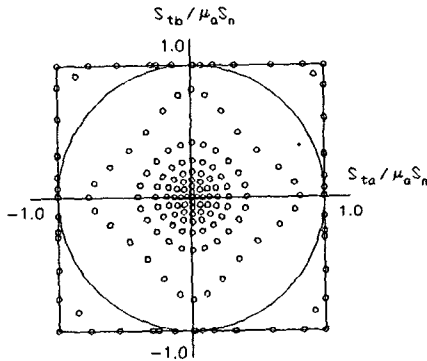


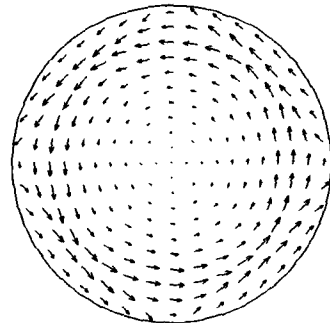
Fig. 4 Discretization of circular contact area

4.1 등방성 마찰조건에서 비틀림이 작용하는 문제

등방성 마찰조건 $\mu_a = \mu_b = 0.5$ 의 마찰영역을 $C_p(2)$, $C_p(4)$ 및 $C_p(6)$ 의 다각형 마찰영역으로 근사화하여 비틀림 $m=0.8$ 이 추가되는 문제를 해석하였다. 마찰영역을 $C_p(2)$ 로 계산한 Fig. 5를 보면 미끄럼영역에서 마찰력은 마름모꼴형상의 분포를 나타내고 있는데 이것은 마찰영역이 사각형으로 근사화되었기 때문이다. 사각형 마찰영역의 경계면에

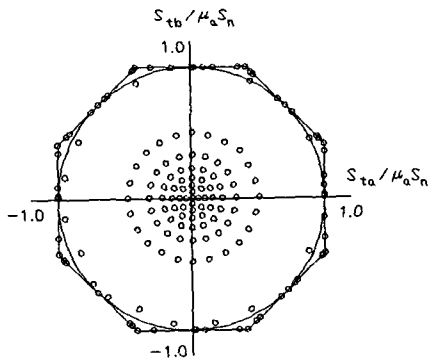


(a) Dimensionless traction constrained to friction domain

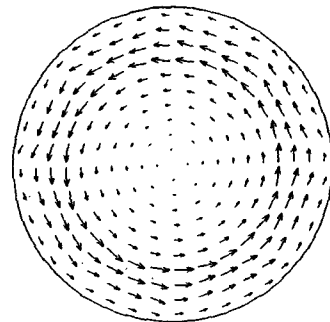


(b) Traction distribution in the contact region

Fig. 5 Frictional traction with the polyhedral friction law, $C_p(2)$

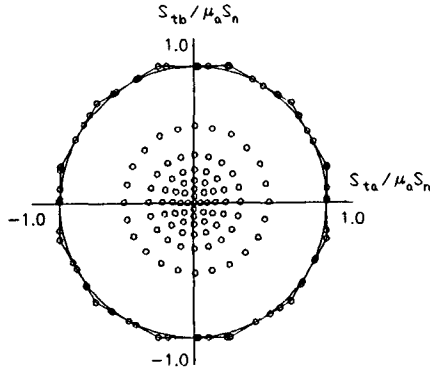


(a) Dimensionless traction constrained to friction domain

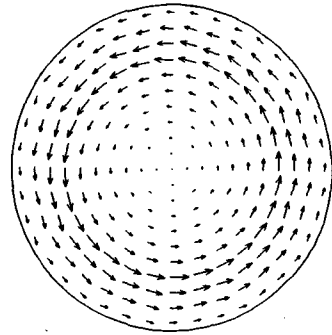


(b) Traction distribution in the contact region

Fig. 6 Frictional traction with the polyhedral friction law, $C_p(4)$



(a) Dimensionless fraction constrained to friction domain



(b) Traction distribution in the contact region

Fig. 7 Frictional traction with the polyhedral friction law, $C_p(6)$

서 미끄럼은 x 방향이나 y 방향으로 제한되기 때문에 주축에서 떨어져 있는 절점에서의 마찰력은 마찰영역 꼭지점에 위치하여 대응원추 내에서 미끄럼 방향이 결정된다. 마찰영역을 $C_p(4)$ 로 해석한 Fig. 6과 $C_p(6)$ 로 해석한 Fig. 7에서는 실제에 근접한 마찰력분포를 보여준다.

Fig. 8은 $m=0.8$ 의 비틀림모멘트를 가중한 후 한 사이클의 비틀림모멘트가 되풀이되는 경우를 대상으로 증분해석을 하여 강체회전각을 이론해⁽¹³⁾ 및 근사해⁽⁵⁾와 비교한 것이다. 근사해는 $m < 1$ 의 조건에서 유도된 것으로 가중시의 $m=0.8$ 에서는 본 연구의 LCP해가 근사해보다 이론해에 접근되어 있다. 따라서 강체회전에 대한 이력곡선도 LCP해가 근사해보다 더 정확하다.

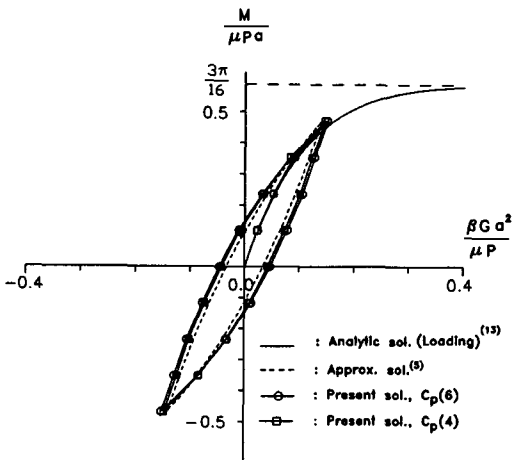


Fig. 8 Rigid body rotation due to a twisting moment

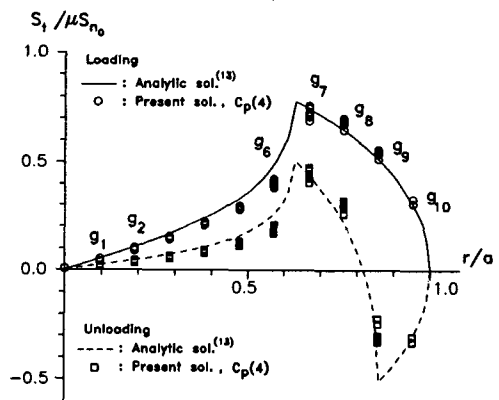


Fig. 9 Traction distribution in the radial direction $C_p(4)$

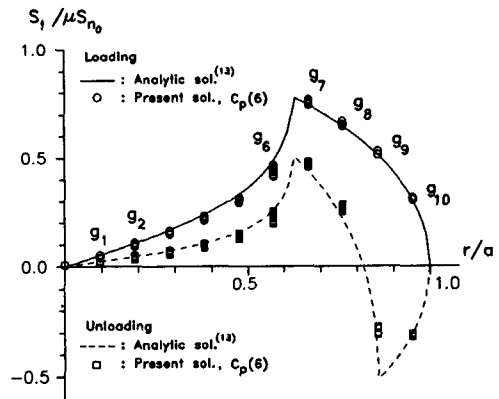


Fig. 10 Traction distribution in the radial direction $C_p(6)$

Fig. 9와 10은 각각 $C_p(4)$, $C_p(6)$ 의 다각형 마찰조건에서 비틀림모멘트를 가중했을 때의 마찰력 분포와 해중했을 때의 잔류 마찰력분포로 $C_p(4)$ 로

해석한 경우에는 접합영역과 미끄럼영역의 경계 부근에서 이론해와 약간 차이가 나고 있으나 $C_p(6)$ 의 조건에서는 이론해와 전반적으로 잘 일치하고

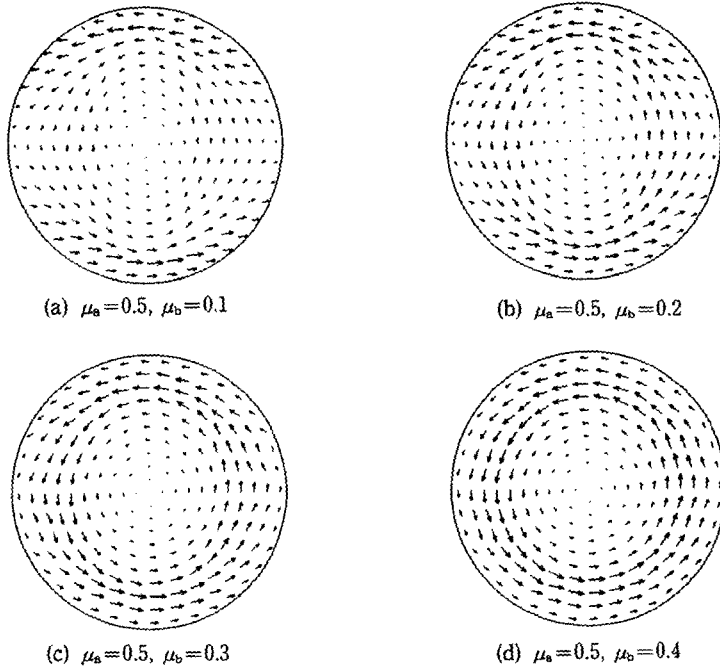


Fig. 11 Effects of eccentricity of friction domain on the traction distribution

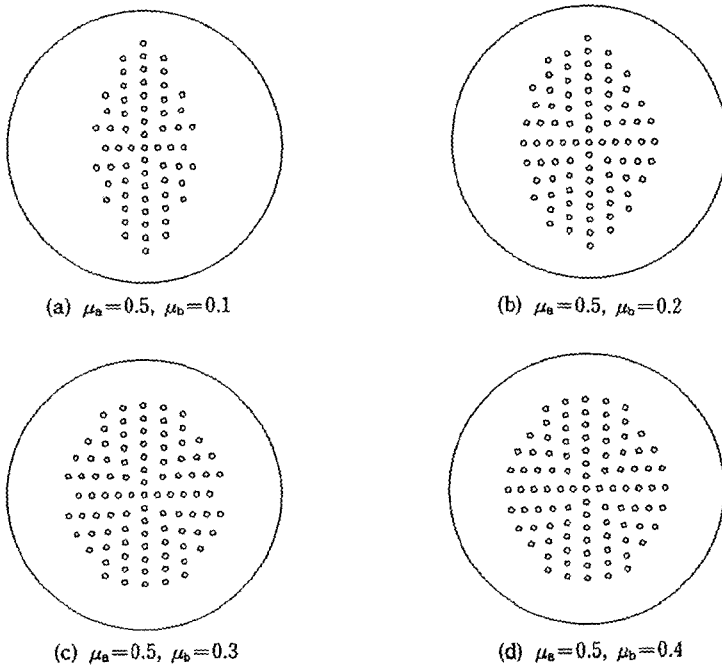


Fig. 12 Effects of eccentricity of friction domain on the stick region

있음을 알 수 있다.

마찰영역의 다각형 차수를 증가시키면 LCP해는 이론해에 접근하나 해의 정밀도 향상에 비해 계산 시간이 지나치게 증가된다. 접촉하고 있는 물체에 부가되는 비틀림모멘트가 작으면 미끄럼영역이 작게 형성되어 마찰영역의 다각형 근사화에 기인한 오차가 감소된다. 따라서 m 이 1보다 충분히 작은 경우에는 $C_p(4)$, m 이 1에 가까울 경우에는 $C_p(6)$ 의 마찰조건이 적당하다.

4.2 직교이방성 마찰조건에서 비틀림이 작용하는 문제

직교이방성 마찰영역을 $C_p(6)$ 의 다각형 마찰영역으로 선형화하여 비틀림모멘트가 부가되는 문제를 해석하였다. Fig. 11과 12는 마찰영역의 이방성 정도에 따른 마찰력분포와 접합영역의 변화를 보여 준다. Fig. 11과 12에서 (a)는 $\mu_a=0.5, \mu_b=0.1$ 의 마찰조건에 대한 계산결과로 y 축 방향의 마찰력 한계값이 x 축 방향의 한계값보다 매우 작기 때문에 절점중에서 y 방향의 마찰력 성분을 지배적으로 갖는 x 축 근처의 절점들이 먼저 한계마찰력에 도달하여 미끄럼이 발생된다. 이에 따라 마찰력은 x 축 방향의 마찰성분을 지배적으로 갖는 y 축 부근

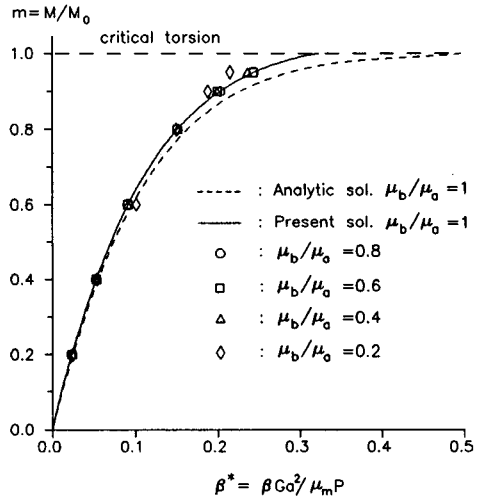


Fig. 13 Rigid body rotation during loading

의 절점에서 주로 담당하게 되며, 접합영역도 y 축 부근에서 형성된다. 마찰영역의 이방성이 줄어들면 Fig. 11, 12의 (b), (c), (d)에 도시한 바와 같이 마찰력분포 및 접합영역의 방향성도 감소하게 된다.

Fig. 13은 강제회전각을 다음과 같이 무차원화하여 비틀림모멘트 증분에 따른 회전각 변화를 도시한 것이다.

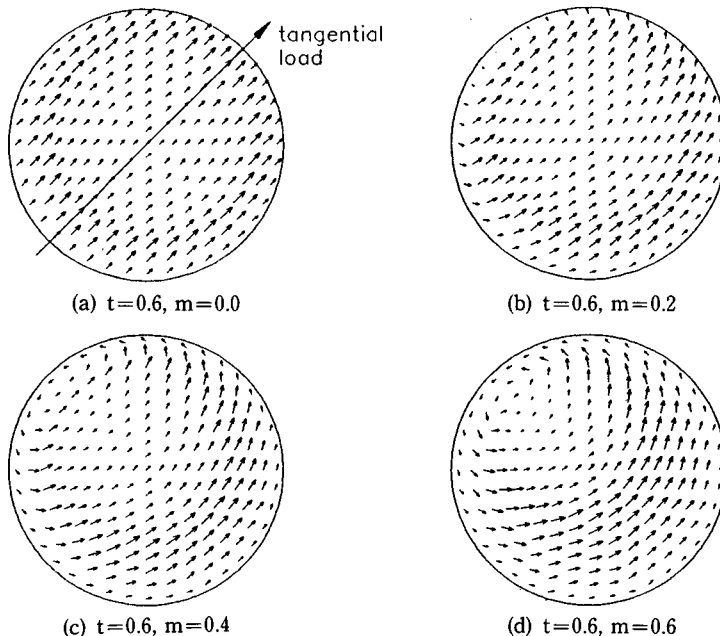


Fig. 14 Variations of traction distribution with increasing of twisting moment

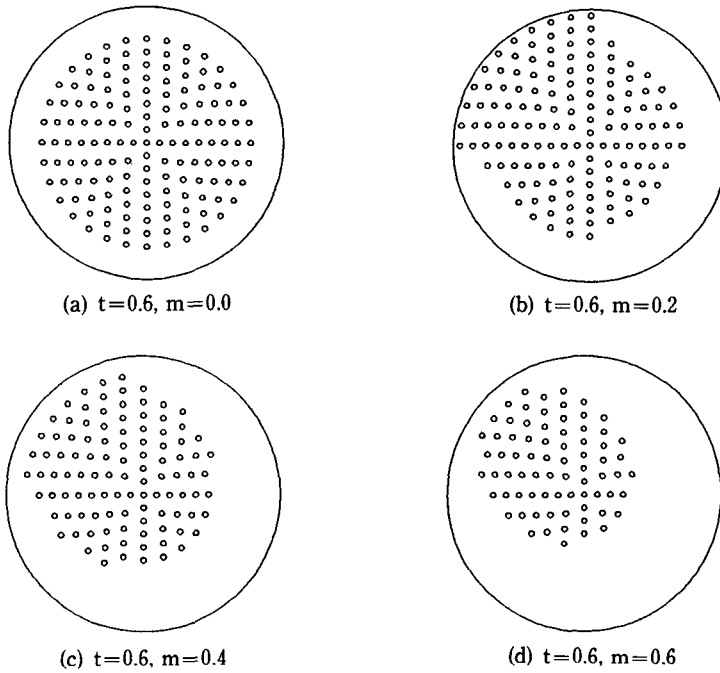


Fig. 15 Variations of stick region with increasing of twisting moment

$$\beta^* = \frac{\beta G a^2}{\mu_m P} \tag{73}$$

여기서, $\frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}$

G_1 과 G_2 는 각각 물체 1과 2의 전단탄성계수이다.

계산결과를 살펴보면 마찰의 이방성 여부와 무관하게 즉, μ_a 와 μ_b 의 비가 달라도 무차원 비틀림모멘트에 대한 무차원 회전각은 등방성 마찰조건인 $\mu_b/\mu_a=1$ 의 LCP해와 거의 동일한 경향을 나타내고 있음을 알 수 있다. 따라서 식(72)로 제시한 μ_m 은 비틀림모멘트에 대한 등가의 등방성 마찰계수이며, 식(71)의 M_0 는 접촉영역이 완전 미끄럼 상태에 도달하는 임계 비틀림모멘트로 추정된다.

4.3 접선하중과 비틀림모멘트가 작용하는 문제

접촉하고 있는 물체에 접선하중이 작용한 상태에서 비틀림모멘트가 부가되는 문제를 해석하였다. 물체에 작용하는 접선하중의 크기는 $t=0.6$, 방향은 45° 로 하고 비틀림모멘트 부가시 변하지 않는 것으로 하였다. 마찰계수는 $\mu_a=\mu_b=0.5$ 를 사용하고 마찰영역은 $C_p(6)$ 로 근사화하였다. Fig. 14와 15의 (a)는 접선하중만 작용하고 있을 때의 마찰

력분포와 접합영역을 도시한 것이며, (b), (c), (d)는 비틀림모멘트 증분에 따른 마찰력분포와 접합영역 변화를 보여준다.

접선하중과 비틀림모멘트가 (+)방향으로 작용할 때 접선하중과 비틀림모멘트의 복합효과에 의하여 접선하중 작용방향의 오른쪽 접촉영역에서는 마찰력이 가중되고 왼쪽 접촉영역에서는 마찰력이 서로 상쇄되어 마찰력은 그림에 도시한 바와 같이 접선하중 작용방향의 오른쪽 접촉영역에서 주로 담당하게 되며, 이에 따라 접합영역은 그 반대 방향으로 치우쳐서 형성된다.

5. 결 론

직교이방성 마찰조건을 다각형 마찰조건으로 선형화하여 접촉부 접선하중과 비틀림모멘트가 부가되는 정지미끄럼접촉을 선형상보성문제로 수식화하였다. 정지미끄럼접촉에 대한 선형상보성문제는 이차계획법 문제의 쿤-터커조건이 되어 등가의 이차계획법 문제가 존재함을 입증하였다.

본 연구에서 제안한 해법으로 등방성 마찰조건에서 비틀림모멘트가 부가되는 문제를 해석한 결과

이론해와 잘 일치하고 있었으며, 부가되는 비틀림 모멘트가 임계 비틀림모멘트보다 작을 경우에는 $C_p(4)$ 의 다각형 마찰조건, 임계 비틀림모멘트에 가까울 경우에는 $C_p(6)$ 의 마찰조건이 적당함을 알 수 있었다. 직교이방성 마찰조건에서 비틀림모멘트가 작용하는 문제를 해석하여 비틀림모멘트에 대한 등가의 등방성 마찰계수와 임계 비틀림모멘트에 대한 식을 제안하였다.

본 연구에서 수직하중이 변하는 문제, 재료의 물성이 다른 경우 등에 대해서는 고려를 하지 않았으나 이러한 문제도 상보성 수식화가 가능할 것으로 생각된다.

참고문헌

- (1) Mindlin, R. D., 1949, "Compliance of Elastic Bodies in Contact," *J. Appl. Mech.*, Vol. 16, pp. 259~268.
- (2) Johnson, K. L., 1955, "Surface Interaction between Elastically Loaded Bodies under Tangential Forces," *Proc. Roy. Soc.*, A230, pp. 531~548.
- (3) Mindlin, R. D. and Deresiewicz, H., 1953, "Elastic Spheres in Contact under Varying Oblique Forces," *J. Appl. Mech.*, Vol. 20, pp. 327~344.
- (4) Lubkin, J. L., 1951, "The Torsion of Elastic Spheres in Contact," *J. Appl. Mech.*, Vol. 18, pp. 183~187.
- (5) Deresiewicz, H., 1954, "Contact of Elastic Spheres under an Oscillating Torsional Couple," *J. Appl. Mech.*, Vol. 21, pp. 52~56.
- (6) Choi, D. H., 1987, "An Algorithmic Solution for Frictional Contact Problem subjected to a Twisting Moment," *KSME J.*, Vol. 1, No. 2, pp. 108~114.
- (7) Michalowski, R. and Mroz, Z., 1978, "Associated and Non-Associated Sliding Rules in Contact Friction Problem," *Arch. of Mech.*, Vol. 30, pp. 259~276.
- (8) Ziegler, H., 1981, "Discussion of Some Objections to Thermomechanical Orthogonality," *Ing. Archiv.*, Vol. 50, pp. 149~164.
- (9) Kwak, B. M., 1990, "Numerical Implementation of Three-Dimensional Frictional Contact by a Linear Complementarity Problem," *KSME J.*, Vol. 4, pp. 23~31.
- (10) Kwak, B. M., 1991, "Complementarity Problem Formulation of Three-Dimensional Frictional Contact," *J. Appl. Mech.*, Vol. 58, pp. 134~140.
- (11) Lee, S. C., Kwak, B. M. and Kwon, O. K., 1994, "Analysis of Incipient Sliding Contact by Linear Complementarity Problem Formulation," *To Appear in Computers & Structures.*
- (12) Kwak, B. M. and Lee, S. S., 1988, "A Complementarity Problem Formulation for Two-Dimensional Frictional Contact Problems," *Computers & Structures*, Vol. 28, pp. 469~480.
- (13) Johnson, K. L., 1985, *Contact Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- (14) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, 3rd Ed., McGraw-Hill, New York.
- (15) Bazaraa, M. S. and Shetty, C. M., 1979, *Nonlinear Programming*, John Wiley and Sons, New York.