

(論 文)

반해석적 방법에 의한 작은 변위를 가지는 얇은판의 자유진동해석

최 덕 기*

(1993년 12월 30일 접수)

Free Vibration of a Thin Plate with Small Deflections by Semi-Analytical Approach

Deok-Kee Choi

Key Words : Semi-Analytical Method(반해석적방법), Galerkin Method(갈러킨방법), Computer Algebra System(컴퓨터 대수시스템), Thin Plate(박판), Free Vibration(자유진동)

Abstract

The free vibration of a thin plate with three different boundary conditions is discussed in this paper. A semi-analytical approach to the plate problems has been exploited using computer algebra system(CAS). The approximate solutions are assumed as algebraic polynomials that satisfy the appropriate boundary conditions. In order to solve problems, Galerkin method is used, which is known as an ineffective tool for practical engineering problems, being involved with a large number of multiple integration and differentiation. All the admissible functions used in this paper are generated automatically by CAS otherwise a tedious algebraic manipulations should be done by hand. One, six and fifteen-term solutions in terms of frequency parameters are presented and compared with exact solutions. Even using one-term solution, the comparison with existing data shows good agreement and accuracy of the present method.

1. 서 론

지난 수십년간 공학자들은 설계 및 해석을 위한 보다 나은 환경을 갈구해 왔다. 최근의 비약적인 컴퓨터 하드웨어와 소프트웨어의 발전에 따라, 공학에도 컴퓨터를 이용한 통합개념의 응용이 활발하게 연구되고 있다. 즉, 컴퓨터를 이용한 설계, 해석 및 생산에 이르는 모든과정을 하나의 연속적인 과정으로 파악하고 응용하려는 움직임이 일어나고 있다. 일반적으로 공학문제를 해결하는데 있어서, 수

치적인 방법을 사용하는 것보다는 해석적인 방법을 사용하는 것이 주어진 문제를 이해하는데 있어서 더욱 쉽다는 점은 해석적방법의 장점이라 할 수 있다. 그러나 대부분의 해석적방법은 많은 양의 수학적 처리와 그 복잡함때문에 일반적인 문제해결에 사용되기 어렵다는 단점도 또한 가지고 있다. 그러나 수치적인 방법을 사용한다고해도 주어진 문제에 대한 충분한 수학적인 고찰과 적절한 물리적 성향의 파악없이 수치적인 방법을 사용한다면, 예를 들어, 유한요소해석 프로그램을 사용하는 경우에, 요소의 수를 늘인다거나, 높은 차수의 요소를 단순히 사용하는 것만으로는 계산된 답이 정확하다는 것을 판단할 수 없다는 점이 문제로 지적될 수 있다. 최

*정회원, 단국대학교 기계공학과

근 컴퓨터 대수시스템(computer algebra system: CAS)의 등장은 여러 공학분야에서 새로운 문제해석 도구로써 주목받고 있다. 미국등에서는 이미 대학과정에 이 CAS를 활용하는 과목을 이미 개설하고 있다. CAS의 등장으로 이전에는 해석적방법으로는 불가능하게 생각되었거나 비 효율적이라고 간주되었던 문제해결방법들이 연구되고 있고 또한 CAS를 사용하여 새로운 방법들이 개발되고 있다. Beck(1992) 등은 CAS를 다양한 열전도 문제를 해석하기 위하여 적용하였다. Noor(1981)은 비선형 문제에 대한 유한요소해석을 수행하면서 CAS를 사용하여 강성매트릭스 등을 자동으로 생성할 수 있음을 보였다. Reduce, Macsyma, Maple, Mathematica(Wolfram, 1991) 등으로 대표되는 CAS는 이미 다양한 문제에 적용하는데에 어려움이 없을 정도로 잘 개발되어 있고 신뢰성도 향상되고 있다. 인간의 문제해결을 위한 접근방식을 그대로 재현할 수 있다는 점에서 볼때, 해석적인 접근방식은 단지의미없이 보이는 수치자료들을 컴퓨터에 입력시켜 문제를 해결하는 수치해석방법에 비하여 주어진 문제의 본질에서 벗어나지 않는다는 장점이 있다. 최근의 수치해석적 방법 특히 유한요소법의 대폭적인 사용과 연구로 인하여, 최근까지 한정된 숫자의 CAS를 이용한 연구가 수행되었다. Choi(1992) 등은 2차원 탄성문제를 반해석적 방법으로 해석하면서 CAS를 해석도구로 사용하였다. 대부분의 해석적방법에서는 상당한 양의 수학적 기호처리가 요구되므로, CAS의 사용이 필수적이라 할 수 있다. 특히 최근 개발된 CAS는 강력한 그래픽기능을 내장하고 있기때문에 출력된 자료들을 곧 바로 화면에 나타낼 수 있는 점도 큰 장점이다. 본 연구에서는 얇은 판의 자유진동문제를 3가지의 다른 경계조건에 대하여 반해석적 방법을 적용하는 과정을 CAS를 사용함으로써 체계적으로 해석할 수 있음을 보였다. 본 연구에서 자유진동문제를 해석하기 위하여 갈러킨방법을 사용하였다. 갈러킨방법은 비교적 간단히 적용될 수 있다는 점과, 뛰어난 정확도로 인하여 높게 평가받고 있으나, 실제로 컴퓨터를 사용하여 갈러킨방법을 적용하는 것은 많은 양의 미분과 적분 및 수학적인 기호처리를 수반함으로써 비효율적인 것으로 간주되어 왔다. 그러나 본 논문에서는 갈러킨방법이 문제해석을 위한 도구로 유용하게 사용될 수 있음을 보였다. 본 연구의 목적은 CAS를 사용하여 반해석적 방법을 체계적으

로 컴퓨터가 수행할 수 있다는 것을 보이고, 제안된 방법의 유용성과 정확도를 실증하는데 있다.

2. 방정식 및 해석

먼저 얇은 판에 대한 일반적인 방정식을 유도하기 위하여 임의의 경계조건을 가지고 있는 이방성판을 고려하기로 한다. 이방성판에 대한 자유진동 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$D_{ijkl}w_{,ijkl} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

위의 식에서

$$D_{ijkl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 C_{ijkl} dz \tag{2}$$

식(2)에서 C_{ijkl} 는 이방성물질에 대한 탄성계수, ρ 는 질량밀도, h 는 판의 두께, w 는 판의 변위를 나타낸다. 고정된 모서리를 갖는 판에 대한 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ on the edges} \tag{3}$$

단순지지된 모서리를 갖는 판에 대한 경계조건은

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0 \text{ on the edges} \tag{4}$$

판의 변위 w 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t} \tag{5}$$

식(5)를 식(1)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$D_{ijkl}W_{,ijkl} = \rho\omega^2 W \tag{6}$$

갈러킨방법을 사용하기 위하여 W 는 식(7)의 허용함수(admissible function)의 선형집합으로 근사화될 수 있다.

$$W(x, y) = \sum_a C_a \phi_a(x, y) \tag{7}$$

위식에서 $\phi_a(x, y)$ 는 동차 경계조건을 만족시키는 다항식이고, C_a 는 미정계수이다. 식(7)을 식(6)에 대입하고 갈러킨방법을 적용하면 다음과 같은 고유치문제로 만들 수 있다.

$$Ac = \rho\omega^2 Bc \tag{8}$$

위식에서

$$\alpha_{ab} = \iint (D_{ijkl}\phi_a(x, y))_{,ijkl}\phi_b(x, y) dx dy \tag{9}$$

$$b_{\alpha\beta} = \iint \phi_{\alpha}(x, y) \phi_{\beta}(x, y) dx dy \quad (10)$$

그리고 $a_{\alpha\beta}$ 와 $b_{\alpha\beta}$ 는 각각 매트릭스 A 와 B 의 요소이다. 주어진 경계조건을 사용하면 식(9)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_{\alpha\beta} = \iint D_{ijkl} \phi_{\alpha,ij}(x, y) \phi_{\beta,kl}(x, y) dx dy \quad (11)$$

여기에서 판을 등방성이라고 가정하면 식(8)은 다음과 같이 단순화 시킬 수 있다.

$$Ac = \frac{12\rho\omega^2(1-\nu^2)}{Eh^3} Bc \quad (12)$$

ν 는 푸아송수이고, E 는 탄성계수이며, 식(11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_{\alpha\beta} = \nu \iint \phi_{\alpha,ii}(x, y) \phi_{\beta,ij}(x, y) dx dy + (1-\nu) \iint \phi_{\alpha,ij}(x, y) \phi_{\beta,ij}(x, y) dx dy \quad (13)$$

3. 수치해석 예

본 논문에서 제안된 방법의 검증을 위하여 판의 자유진동문제를 생각하기로 한다. Fig. 1에서 나타낸 것과 같은 정사각형꼴의 얇은 등방성판을 선택하여 해석하기로 한다. 계산결과 비교를 위해 진동계수 λ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\lambda = \omega\alpha^2 \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\rho}{Eh^3}} \quad (14)$$

판에 대한 경계조건중 3가지의 다른 경우를 생각하여 보기로 한다. 계산에 사용된 판에 대한 수치들

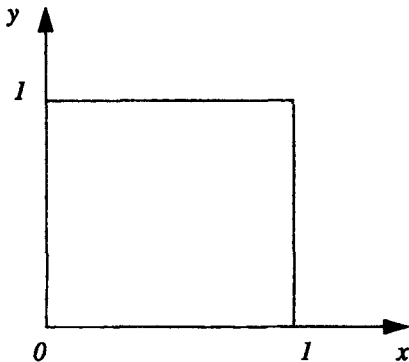


Fig. 1 A square plate

은 다음과 같다.

$$E = 70 \times 10^6 \text{ GN/m}^2, \nu = 0.3, h = 0.1 \text{ m}, \rho = 1 \text{ m}, \rho = 3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

3.1 수치해석 예 1

고정단을 가지는 판의 경우

판의 모든 모서리가 고정되어 있는 경우 (Fig. 2)의 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} w(0, y) = 0, & \quad w(1, y) = 0 \\ w(x, 0) = 0, & \quad w(x, 1) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, & \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, & \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

이 문제를 해석하기 위하여 먼저 식(15)에서 주어진 경계조건을 만족하는 허용함수를 구해야한다. 이 과정을 수행하는데 있어서 일일이 손으로 계산해야만 하던 과정을 본 연구에서는 CAS를 사용하여 자동으로 경계조건을 만족하는 허용함수를 대수다항식을 이용하여 구하였다. Table 1에서 볼 수 있는 바와같이, 1개의 허용함수를 사용하여도 첫번째 진동계수를 상당한 정확도로 얻을 수 있었다. Fig. 3에서는 본 예제에서 사용된 허용함수들중 최저차수의 허용함수를 나타내었다.

3.2 수치해석 예 2

단순지지된 모서리를 가지는 판의 경우

판의 모든 모서리가 단순지지된 경우 (Fig. 4)의 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$w(0, y) = 0, \quad w(1, y) = 0$$

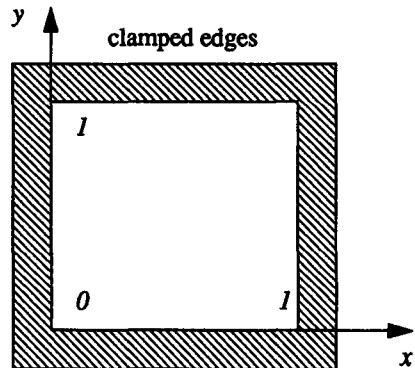


Fig. 2 Plate with clamped boundary conditions

Table 1 Comparison of frequency parameters λ for clamped boundary conditions by proposed method and analytical method

	λ_{11}	λ_{21}	λ_{12}	λ_{22}	λ_{31}	λ_{13}
One-term solutions	36.0000	-	-	-	-	-
Six-term solutions	36.0000	74.2967	74.2967	108.591	137.294	138.651
15-term solutions	35.9998	73.4329	73.4329	108.265	131.898	132.424
Exact solutions	35.9920	73.4130	73.4130	108.270	131.640	132.240

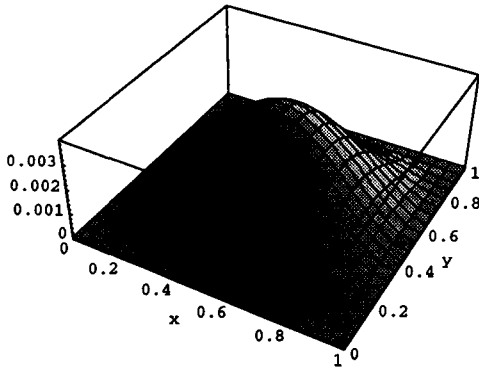


Fig. 3 The lowest order admissible function for clamped boundary conditions

$$\begin{aligned}
 w(x, 0) &= 0, & w(x, 1) &= 0 \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=1} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=1} &= 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

Fig. 5에서는 본 예제에서 사용된 허용함수들중 최저차수의 허용함수를 나타내었다. Table 2에서 볼 수 있는 바와같이 계산된 진동계수들과 엄밀해는 잘 일치하였다.

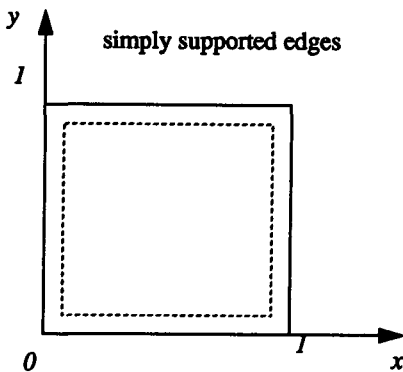


Fig. 4 Plate with simply supported boundary conditions

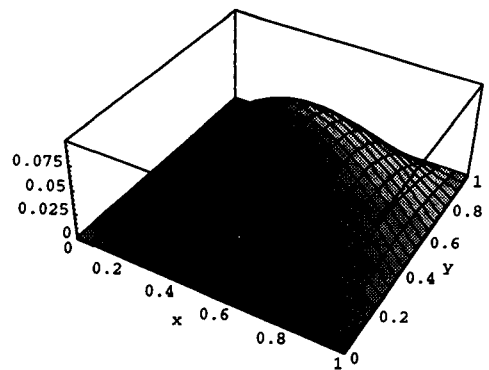


Fig. 5 The lowest order admissible function for simply supported boundary conditions

Table 2 Comparison of frequency parameters λ for simply supported boundary conditions by proposed method and analytical method

	λ_{11}	λ_{21}	λ_{12}	λ_{22}	λ_{31}	λ_{13}
One-term solutions	19.7476	-	-	-	-	-
Six-term solutions	19.7392	49.6319	49.6319	79.3997	101.059	101.063
15-term solutions	19.7392	49.3490	49.3490	78.9580	98.7260	98.7260
Exact solutions	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960	98.6960

3.3 수치해석 예 3

고정된 모서리와 단순지지된 모서리를 가지는 판의 경우

세번째 수치해석 예에서는 두 모서리는 고정되어 있고 나머지 두 모서리는 단순지지되어 있는 판을 생각한다. 만족해야 할 경계조건(Fig. 6)은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 w(0, y) &= 0 & w(1, y) &= 0 \\
 w(x, 0) &= 0 & w(x, 1) &= 0 \\
 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0 & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=1} &= 0 \\
 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=1} &= 0
 \end{aligned} \tag{17}$$

앞의 예에서와 같이 최저차수의 허용함수를 Fig. 7

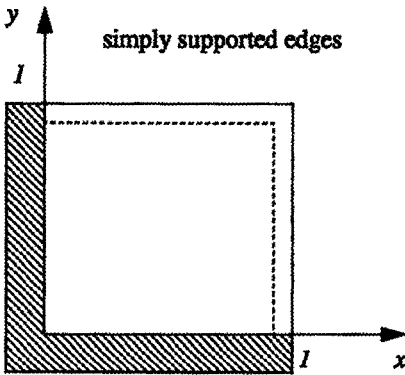


Fig. 6 Plate with mixed boundary conditions

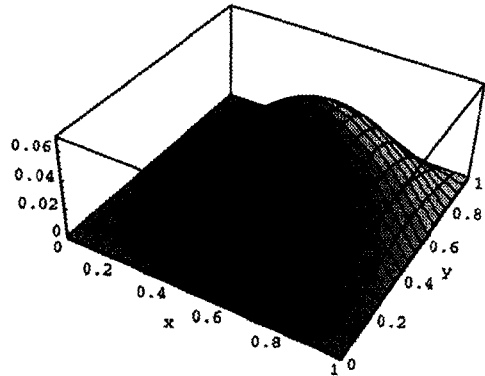


Fig. 7 The lowest order admissible function for mixed boundary conditions

Table 3 Comparison of frequency parameters λ for simply supported plate by proposed method and analytical method

	λ_{11}	λ_{21}	λ_{12}	λ_{22}	λ_{31}	λ_{13}
One-term solutions	27.129	-	-	-	-	-
Six-term solutions	27.059	61.027	61.269	93.280	118.992	119.227
15-term solutions	27.055	60.544	60.797	92.873	114.793	114.906
Exact solutions	27.056	60.544	60.791	92.865	114.570	114.720

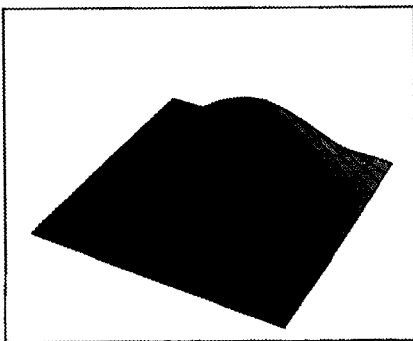


Fig. 8 Mode shape of clamped and simply supported plate for λ_{11}

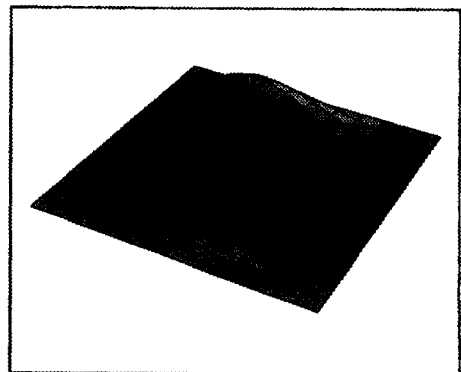


Fig. 9 Mode shape of clamped and simply supported plate for λ_{21}

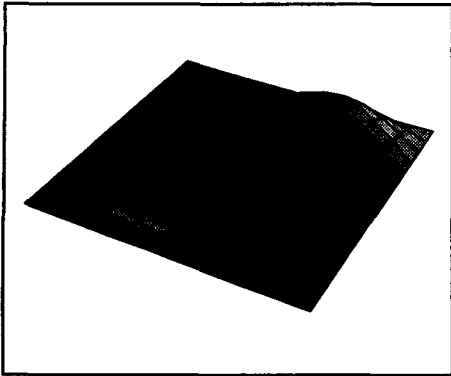


Fig. 10 Mode shape of clamped and simply supported plate for λ_{12}

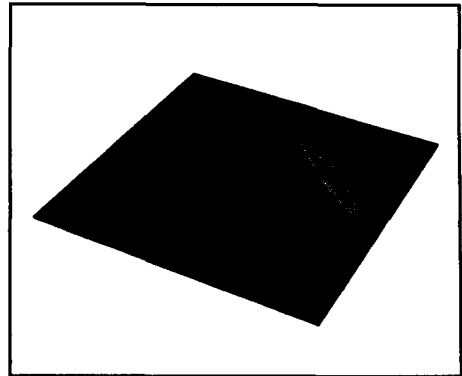


Fig. 13 Mode shape of clamped and simply supported plate for λ_{31}

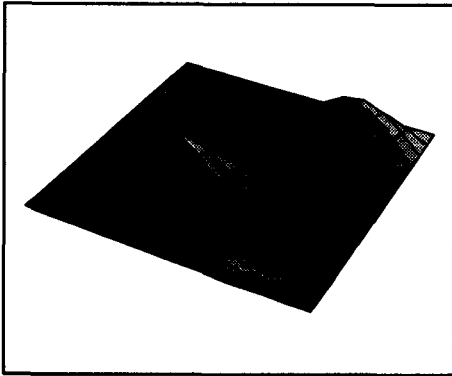


Fig. 11 Mode shape of clamped and simply supported plate for λ_{22}

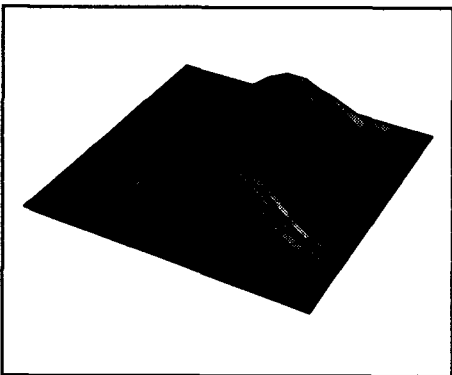


Fig. 12 Mode shape of clamped and simply supported plate for λ_{13}

에 나타내었다. Table 3에서 볼 수 있는 바와같이 계산된 진동계수들과 엄밀해는 근사한 오차로 일치하였다. Fig. 8~13에서는 계산된 각 진동계수들에

대한 모드형상을 보였다.

4. 결 론

본 논문에서는 3가지의 다른 경계조건에 대하여 등방성판의 자유진동해석이 수행되었다. 주어진 경계조건을 만족하는 대수다항식을 이용하여 변위를 근사적으로 가정하고, 갈러킨방법을 사용하여 유도된 고유치문제를 해석하여 각 경계조건에 대한 고유진동수를 진동계수 형식으로 구하였다. Table 1~3에서 볼 수 있는 바와같이 본 논문에서 제안된 방법으로 계산된 진동계수와 비교했을때, 적은 수의 허용함수를 사용해서도 상당한 정확도로 구할 수 있다는 것을 보여주었다. 본 연구에서 사용된 1항 해(one-term solution)는 허용함수를 하나만 사용한것으로 주어진 경계조건을 만족하는 최저차수의 대수다항식이 사용되었으며, 그 차수는 8이다. 한편 10차, 12차의 대수다항식이 각각 6항 해 및 15항 해를 구하는데 쓰였다. 계산수행중, 갈러킨방법의 사용으로 인한 적분수행 회수는 1항 해에서는 3번, 6항 해에서와 15항 해에서는 각각 18번, 45번 씩 수행되었다. 본 연구에서 수행된 모든 결과는 다른 컴퓨터 언어의 도움없이 CAS 자체내의 프로그래밍 언어를 사용하여 구하였다.

판문제에 대한 고전적인 해석방법은 주어진 판방정식에 대한 해를 경계조건을 만족하는 삼각함수의 합으로 근사시켜서 구하는 것이었다. 그러나 경계조건이 복잡하거나, 판의 기하학적 모양이 달라질 때에는 허용함수를 그때마다 달라진 조건들을 만족시키는 삼각함수의 합으로 다시 구하는 것은 매우

어렵다. 대수다항식을 사용하면 비교적 쉽게 주어진 조건들을 만족시키는 허용함수를 구할 수 있으며, CAS를 사용하면 그 전 과정을 체계적으로 컴퓨터에서 수행시킬 수 있게 된다. 따라서 본 논문에서 제안된 방법을 사용하여 다른 형상 및 경계조건들에 대한 활발한 연구가 기대된다.

참고문헌

- (1) Beck, J. V., Cole, K.D., Haji-Sheikh, A. and Litkouhi, B., 1992, *Heat Conduction Using Green's Functions*, Hemisphere Publishing Co., London.
- (2) Choi, Deok-Kee and Nomura, Seiichi, 1992, "Application of Symbolic Computation to Two-Dimensional Elasticity," *Computers and Structures*, Vol. 43, pp. 645~649.
- (3) Leissa, A. W, 1973, "The Free Vibration of Rectangular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31, pp. 257~247.
- (4) Meitrovitch, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan Publishing Company, London.
- (5) Nomura, Seiichi and Wang, B. P., 1989, "Free Vibration of Plate by Integral Method," *Computers and Structures*, Vol. 32, pp. 245~247.
- (6) Noor, Ahmed K., 1981, "Computerized Symbolic Manipulation in Nonlinear Finite Element Analysis," *Computers and Structures*, Vol. 13, pp. 379~403.
- (7) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., 1959, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- (8) Wolfram, S., 1991, *Mathematica, A system of Doing Mathematics by Computers*, 2nd ed., Addison-Wesley, Redwood City, CA.