

〈論 文〉

## 이중탄성계수 복합재료판의 좌굴

이영신\* · 김종천\*

(1993년 12월 20일 접수)

### Buckling of Bimodulus Composite Thin Plate

Young-Shin Lee and Jong-Cheon Kim

**Key Words :** Bimodulus(이중탄성계수), Bending(굽힘), Buckling(좌굴), Neutral Surface(중립면)

#### Abstract

A new analytical method for the prediction of the buckling behavior of laminated plates consisting of layers having different properties in tension and compression, so called bimodulus, is proposed in this paper. Buckling analysis of bimodular composite laminated plates are performed with the results reduced from plate bending analysis. The governing equations of bimodular plates are based on the first shear deformation theory. As a case study, bending and buckling of simply supported, multilayered, symmetric, antisymmetric, and specially orthotropic laminates under uniformly distributed lateral load for bending analysis and in-plane load for buckling are considered. The results of the bending analysis are compared with the previous papers. Then, the fundamental critical buckling loads and buckling modes are calculated for the various bimodular composite rectangular thin plates.

기 호 설 명			
$a, b$	: 사각판의 길이와 폭	$\nu^t, \nu^c$	: 등방성재료에 대한 인장 및 압축 푸아송비
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$	: 판강성계수	$\nu_{ij}^t, \nu_{ij}^c$	: 직교 이방성재료의 $x, y, z$ 방향의 인장 및 압축 푸아송비
$E^t, E^c$	: 등방성재료의 인장 및 압축탄성계수	$z_{nx}, z_{ny}$	: 판의 중립면위치
$E_i^t, E_i^c$	: 직교 이방성재료의 $x, y, z$ 방향 인장 및 압축탄성계수	$Z_{nx}, Z_{ny}$	: $Z_{nx} = z_{nx}/h, Z_{ny} = z_{ny}/h$ , 무차원 중립면위치
$G^t, G^c$	: 등방성재료의 전단탄성계수	$\phi_x, \phi_y$	: $xz$ 및 $yz$ 평면의 회전변위
$G_{ij}^t, G_{ij}^c$	: 직교 이방성재료의 $x, y, z$ 방향 인장 및 압축전단탄성계수		
$h$	: 판의 두께		
$N_{ij}, M_{ij}$	: 합응력 및 합모멘트		
$Q_{ij}^k$	: 축소강성계수		
$u_i$	: $x, y, z$ 방향의 변위		
$u, v, w$	: 중앙면에서의 $x, y, z$ 방향변위		

#### 1. 서 론

현재 광범위한 분야의 공학구조물에 사용되고 있는 섬유보강복합재료는 일부 경우에 매우 특수한 탄성특성을 보이고 있음이 알려져 있다. 즉, 재료의 섬유방향에서 인장하중이 작용할 때 압축하중의

\*정회원, 충남대학교 기계설계공학과

\*\*국방과학연구소

작용시와는 다른 탄성계수를 나타내며, 이러한 특성을 가지는 재료를 이중탄성계수 복합재료(bimodulus or bimodular composite material)라 한다. Fig. 1에서 인장, 압축의 각 탄성 비례곡선은 원점에서 경사를 달리하는 2개의 직선으로 이상화하였다.

복합재료판의 좌굴에 관한 대부분의 연구는 단일탄성계수를 사용하여 수행되어 왔으나, 굽힘 및 좌굴을 야기하는 하중을 받는 판재는 명백히 압축 및 인장되며, 보다 정확한 해석을 위하여 이중탄성계수 복합재료의 경우, 재료특성이 고려되어야 한다.

복합재료중의 일부가 인장될 때 압축시와는 서로 다른 탄성특성을 가진다는 사실은 Clark<sup>(1)</sup>과 Patel 등<sup>(2)</sup>이 고무(cord-rubber)복합재료에 관하여 보였으며, 1965년 Ambartsumyan<sup>(3)</sup>은 최초로 이중탄성계수 특성을 갖는 재료의 탄성거동에 관하여 주응력의 부호에 기초한 이론을 제시하였다.

Isabekyan과 Khachatryan,<sup>(4)</sup> Sharpiro,<sup>(5)</sup> Jones<sup>(6)</sup> 및 Green과 Mkrtychian<sup>(7)</sup>은 Ambartsumyan의 모델과 유사하거나, 수정된 방법을 제시하였다.

1977년 Bert<sup>(8)</sup>는 다른 방법으로 이 문제에 접근하였다. 그는 이중탄성계수 복합재료의 탄성계수들은 섬유방향에서의 변형률부호에 좌우된다는 가정에 기초하는 'macro fiber-governed model'을 도입하였다. 이 모델은 실험결과와의 좋은 일치 및 계산의 간편성에 의하여 많은 관심을 받았다.

최근에 Reddy와 Sacco<sup>(9)</sup>는 변형률 tensor의 양수 및 음수부를 고려한 변형률 에너지밀도 함수의 존재를 가정한 새로운 이중탄성계수 재료모델을 제안하여 Bert 등의 해석결과와 비교하였다.

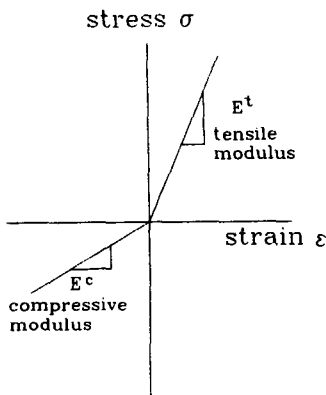


Fig. 1 Stress-strain curve of a bimodular material

이중탄성계수 복합재료의 굽힘 및 탄성안정에 관한 해석은 Jones<sup>(10,11)</sup> 및 Doong, Chen<sup>(12)</sup> 등에 의하여 원통형 shell, 원판, 고리형 원판 및 후판에 관한 연구가 수행되었다.

일반적으로 좌굴에 의한 휨은 압축 및 인장을 동반하며, 이중탄성계수 복합재료의 탄성계수는 응력의 부호에 따라 변하므로, 중립면의 위치가 이동하게 되어, 통상의 탄성계수에 의한 좌굴거동의 예측은 부정확하게 되므로 이중탄성계수 재료의 특성을 고려한 해석이 필요하다. 따라서, 양단 단순지지조건하에 내평면하중으로 좌굴되는 이중탄성계수 박판의 지배방정식을 유도하였으며, 이를 해석하여 종횡비(aspect ratio)에 대한 좌굴임계하중 및 좌굴모드를 구하여 단일탄성계수에 의한 결과와 비교하였다. 이중탄성계수 박판의 좌굴을 해석하기 위한 전제조건으로서 중립면의 위치는 균일 분포하중에 의한 판의 굽힘해석을 통하여 결정하였으며, 이 결과는 기존의 해석결과들과 비교하여 좌굴해석의 적용타당성을 검증하였다.

## 2. 수식화

### 2.1 해석모델

해석모델로서 섬유보강복합재의 균일두께  $h$ 인 이중탄성계수 사각형 박판을 고려한다. 좌표계의 원점은 중앙면에 수직하는  $z$ 축을 가지는 중앙면( $x, y$ )내에 위치하며, 각 적층의 표시 및 두께방향 좌표는 Fig. 2와 같다. 각 적층은 동일한 두께를 가지며, 층간의 접착은 완벽한 것으로 가정한다.

고려되는 판은 박판으로서, 두께척수  $h$ 는 다른 형상척수보다 작다. 이와 같은 박판을 취급하므로써  $x$ - $y$ 면내 작용응력들이 판의 거동을 지배하는 평면응력상태를 가정할 수 있으며, 체적력(body force)은 무시한다.

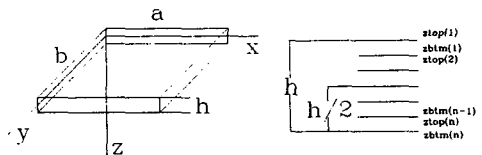


Fig. 2 Geometry and sign convention of a laminated composite plate

## 2.2 변위장 및 구성방정식

정적(static)인 좌굴문제의 취급에 있어서 변위는 시간에 무관한 것으로 가정하였으며, 고려되는 박판의 변위는 Reddy<sup>(13)</sup>에 의한 제1계 전단변형이론을 적용하였다. 즉,

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u + z\phi_x \\ u_2(x, y, z) &= v + z\phi_y \\ u_3(x, y, z) &= w \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $u, v$  및  $w$ 는 각각 중앙면에서의  $x, y$  및  $z$ 방향의 변위성분을 나타내며,  $\phi_x$ 와  $\phi_y$ 는  $y$  및  $x$ 축에 대한 횡수직요소의 회전을 나타낸다. 또한  $u, v, w, \phi_x$ 와  $\phi_y$ 는  $x, y$ 만의 함수이다.

이러한 변위장에 관련된 미소변형률(infinitesimal strain)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \epsilon_z &= 0 \\ \epsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \\ \epsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $\epsilon_{xy}$  등은 공학적 전단변형률을 나타낸다.

식(2)는 단일탄성계수재료 및 이중탄성계수재료에 대하여 모두 유효하다. 단일탄성계수재료와 이중탄성계수재료의 차이는 구성방정식(constitutive equation)에서 나타난다. Bert<sup>(8)</sup>의 섬유지배재료모델이론에 따라 2개의 평면응력축소강성(two sets of reduced stiffness)행렬이 존재한다고 가정한다. 즉, 섬유가 길이방향으로 인장될 때와 같은 방향에서 압축될 때의 것이다.

주재료 방향좌표계에 관한 이중탄성계수재료 박판에 관한 응력-변형률관계는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서,  $Q_{ij}^k$ 은 박판에 대한 평면응력상태 가정하의 섬유방향 변형률의 부호에 따른 주재료 좌표에서의 평면응력-변형률관계의 축소강성계수를 나타낸

다. 즉,

$$Q_{ij}^k = \begin{cases} Q_{ij}^t, & \epsilon_j > 0 \\ Q_{ij}^c, & \epsilon_j < 0 \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (4)$$

여기서,  $\epsilon_j$ 는 임의 재료점에서의 섬유방향 변형률을 나타낸다.

## 2.3 지배방정식

판의 좌굴문제는 정적응력상태를 가정하며, 따라서 총포텐셜에너지  $\Pi$ 는 다음과 같다.

$$\Pi = U + W + V \quad (5)$$

여기서,  $U$ 는 탄성체의 변형률에너지,  $W$ 는 판의 상, 하면에 작용하는 traction에 의한 일(work)이고,  $V$ 는 횡치점변위  $w$ 와 연관된 내평면하중에 의한 포텐셜에너지이다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{yz} \epsilon_{yz} + \sigma_{xy} \epsilon_{xy}) dV \\ W &= - \int_R [\sigma_z(h/2) - \sigma_z(-h/2)] w dA \\ &= - \int_R q w dA \\ V &= \int_R (\bar{N}_x \epsilon_x + \bar{N}_y \epsilon_y + \bar{N}_{xy} \epsilon_{xy}) dA \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,  $\bar{N}_x, \bar{N}_{xy}$  및  $\bar{N}_{xy}$ 는 전좌굴(prebuckled) 상태에서 판에 작용하는 초기내평면합응력을 나타낸다.

판의 거동문제에 다음과 같은 가상변위원리(principle of virtual displacement)를 적용하여, 판의 굽힘 및 좌굴에 대한 지배방정식을 유도한다.

$$\delta \Pi = \delta U + \delta W + \delta V = 0 \quad (7)$$

식(2) 및 다음과 같은 합응력(resultant)들을 식(7)에 대입하고, 부분적분과 Divergence theorem을 이용한다.

$$\begin{aligned} (N_i, M_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z) dz, \quad i = x, y, xy \\ Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz, \quad Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \end{aligned} \quad (8)$$

식(7)은 다음과 같아진다.

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= - \int_R \left[ \delta u \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad + \delta v \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \\ &\quad \left. + \delta w \left[ \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) + q + \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right] dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\bar{N}_{xy} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\
 & + \delta \phi_x \left[ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right] \\
 & + \delta \phi_y \left[ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y \right] dx dy \\
 & + \int_{S_x} \left[ N_x \delta u + N_{xy} \delta v \right. \\
 & \left. + \left[ Q_x + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta w \right. \\
 & \left. + M_x \delta \phi_x + M_{xy} \delta \phi_y \right] dy \\
 & + \int_{S_y} \left[ N_{xy} \delta u + N_y \delta v \right. \\
 & \left. + \left[ Q_y + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta w \right. \\
 & \left. + N_{xy} \delta \phi_x + M_y \delta \phi_y \right] dx = 0 \tag{9}
 \end{aligned}$$

식(9)에서 각 변위변분의 계수항을 각각 0과 등치시키면 지배방정식 및 경계조건을 구할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}
 \delta u ; \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
 \delta v ; \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\
 \delta w ; \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 & + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\
 \delta \phi_x ; \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\
 \delta \phi_y ; \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \tag{10}
 \end{aligned}$$

반면에,  $S_x$  경계상에서,  $N_x \delta u = 0$

$$\begin{aligned}
 N_{xy} \delta v &= 0 \\
 \left[ Q_x + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta w &= 0 \\
 M_x \delta \phi_x &= 0 \\
 M_{xy} \delta \phi_y &= 0 \tag{11}
 \end{aligned}$$

$S_y$  경계상에서,  $N_{xy} \delta u = 0$

$$\begin{aligned}
 N_y \delta \phi_x &= 0 \\
 \left[ Q_y + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta w &= 0 \\
 M_{xy} \delta \phi_x &= 0 \\
 M_y \delta \phi_y &= 0 \tag{12}
 \end{aligned}$$

박판에 대하여 합응력들을 변위(displacement)의 항으로 표현하기 위하여 응력-변형률 및 변형률-변위관계식을 각각 대입하여, 합응력-변위관계식을 유도하면,

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \text{Symmetric} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & & \\ & & D_{22} & D_{26} & & \\ & & & D_{66} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \\ \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & 0 \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x + w_{,x} \\ \phi_y + w_{,y} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \text{여기서, } (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{z_n} Q_{ij}(1, z, z^2) dz + \\
 & \int_{h/2}^{z_n} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \tag{15}
 \end{aligned}$$

및  $z_n$ 은 중립면의 위치다.

식(15)의 합응력-변위관계식을 지배방정식에 대입하여, 변위항으로 표현되는 지배방정식을 유도한다.

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 & + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 & + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
 & + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} = 0, \\
 & A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 & + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 & + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
 & + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} = 0, \\
 & A_{55} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + A_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{44} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q \\
 & + \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\
 & B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 & + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 & + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
 & + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -A_{55}(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x}) = 0, \\
 & B_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
 & + B_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 & + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \\
 & + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \\
 & -A_{44}(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y}) = 0 \tag{16}
 \end{aligned}$$

좌굴문제에 있어서 좌굴직전, 판이 평면을 유지하는 하중상태에서의 내평면 변위는 평형조건을 고려하여 결정하며, 판의 좌굴은 평형상태에서 하중의 증가없는 변위의 변분을 고려하는 것이다. 좌굴의 초기상태에서 횡변위성분은 0이므로 횡변위의 변분은 실제 횡변위에 대응한다. 그러나, 굽힘-인장 연성의 존재로 내평면변위와 횡변위가 연관을 가지므로 다음 식에서 변분표기를 유지한다. 식 (16)에 각 변위 변분항을 대입하면 판의 좌굴에 관한 지배방정식이 된다.

또한, 식(10)의 4, 5번째식의 관계를 3번째식에 대입하면,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q + \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 & + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{17}
 \end{aligned}$$

식(17)에 식(13) 및 (14)의 관계를 대입하고, 미소변위에 관하여 다음의 관계를 이용하고,

$$\phi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \tag{18}$$

변위에 관해 변분한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} \\
 & + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \\
 & - 3B_{16} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial y^3} \\
 & = 0, \\
 & A_{16} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} \\
 & + A_{66} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \\
 & - B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 \delta w}{\partial y^3} \\
 & = 0,
 \end{aligned}$$

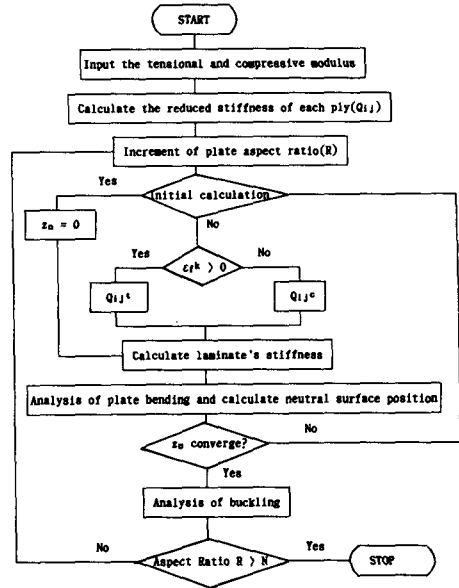


Fig. 3 Iterating procedure of computer program for analysis of plate bending and buckling

$$\begin{aligned}
 & - \left( D_{11} \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 \delta w}{\partial y^4} \right) + B_{11} \frac{\partial^3 \delta u}{\partial x^3} + \\
 & 3B_{16} \frac{\partial^3 \delta u}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 \delta u}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 \delta u}{\partial y^3} \\
 & B_{16} \frac{\partial^3 \delta v}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 \delta v}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3 \delta v}{\partial x \partial y^2} \\
 & + B_{22} \frac{\partial^3 \delta v}{\partial y^3} + q + \bar{N}_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \\
 & + \bar{N}_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} = 0 \tag{19}
 \end{aligned}$$

### 2.4 좌굴 지배방정식의 해석

앞에서 유도한 굽힘 및 좌굴에 관한 지배방정식은 제1차 전단변형이론(the first shear deformation theory)에 기초한 것이며, 적층의 구조에 관계없이 일반적으로 유효하다.

본 연구에서 고려하는 S2형 단순지지 경계조건은 다음과 같다.

$$\delta w = 0, \quad \delta M_n = 0, \quad \delta N_n = 0, \quad \delta u_i = 0 \tag{20}$$

여기서, 첨자 n과 t는 각각 변에 수직 및 접선 방향을 나타낸다.

다음과 같은 형의 중립면 변위들은 지배방정식 (19) 및 경계조건 (20)을 동시에 만족시키므로,

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m,n} U_{m,n} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ v &= \sum_{m,n} V_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ w &= \sum_{m,n} W_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

식(21)을 지배방정식(19)에 대입하고 정리하면, 대칭직교 (symmetric cross-ply) 및 대칭특수직교, 역대칭직교 (antisymmetric cross-ply) 적층에 대하여 ( $A_{16}, A_{26}, B_{16}, B_{26}, D_{16}$  및  $D_{26}=0$ ), 아래와 같이 좌굴임계하중을 직접 계산할 수 있는 식이 유도된다.<sup>(11)</sup>

$$\begin{aligned} & \bar{N}_x \left(\frac{m\pi x}{a}\right)^2 + \bar{N}_y \left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ &= T_{33} + \frac{2T_{12}T_{13}T_{23} - T_{11}T_{23}^2 - T_{22}T_{13}^2}{T_{11}T_{22} - T_{12}^2} \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,

$$\begin{aligned} T_{11} &= A_{11} (m\pi/a)^2 + A_{66} (n\pi/b)^2 \\ T_{12} &= (A_{12} + A_{66}) (m\pi/a) (n\pi/b) \\ T_{13} &= - (B_{12} + 2B_{66}) (m\pi/a) (n\pi/b)^2 \\ &\quad - B_{11} (m\pi/a)^3 \\ T_{22} &= A_{22} (n\pi/b)^2 + A_{66} (m\pi/a)^2 \\ T_{23} &= - (B_{12} + 2B_{66}) (m\pi/a)^2 (n\pi/b) \\ &\quad - B_{22} (n\pi/b)^3 \\ T_{33} &= D_{11} (m\pi/a)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) (m\pi/a)^2 \\ &\quad (n\pi/b)^2 + D_{22} (n\pi/b)^4 \end{aligned} \quad (23)$$

식(22)에서 좌굴임계하중은 다음과 같다.

$$\bar{N}_x = \frac{[RHS]}{\{(m\pi/a)^2 + k(n\pi/b)^2\}} \quad (24)$$

여기서,  $\bar{N}_y = k\bar{N}_x$ ,  $k$ 는 임의의 상수로서 하중인수이며,  $RHS$ 는 식(22)의 우변을 나타낸다. 모든 경우에서, 최소 좌굴임계하중은 좌굴형상(buckling mode)를 결정하는 정수치  $m$ 과  $n$ 에 대하여 식(24)의 우변을 최소화시키므로써 구해져야 한다.

### 3. 수치해석

이중탄성계수 복합재료판의 거동특성을 고려한 좌굴현상을 해석하기 위하여는 판의 휨으로 인한 처짐에 있어, 중립면의 이동특성을 결정하여야 한다. 따라서, 이중탄성계수 복합재료판의 횡방향하중에 의한 굽힘을 해석하여 중립면의 위치를 결정하고, 이 결과를 이용하여 이중탄성계수 복합재료

판의 좌굴임계하중 및 좌굴모드를 결정한다.

S2형의 단순지지경계조건(20)을 만족시키는 변위들의 형태를 다음과 같이 가정한다.

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m,n} U_{m,n} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ v &= \sum_{m,n} V_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ w &= \sum_{m,n} W_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \phi_x &= \sum_{m,n} D_{m,n} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \phi_y &= \sum_{m,n} E_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

식(25)를 판거동 지배방정식(16)에 대입하고, 필요한 수학적 처리를 하면 첨자 16 또는 26(즉,  $A_{16}, A_{26}, B_{16}$  및  $B_{26}$  등)을 가지는 판의 강성행렬 요소들이 0으로 되며, 이것은 본 해석에서 수행하게 될 판의 특성을 결정한다. 즉, 대칭직교 (symmetric cross-ply), 대칭특수직교, 역대칭직교 (antisymmetric cross-ply) 적층 등에 대하여만 본 해석이 유효함을 나타낸다.

판의 굽힘해석에 있어서, 내평면하중을 무시하고 변위와의 조화를 고려하여 다음과 같이 횡하중의 형태를 전개된 형으로 표현한다.

$$q = \sum_{m,n} Q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (26)$$

이들 변위 및 하중형에 의하여 식(16)은 다음과 같이 5개의 연립방정식군을 형성한다.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} \\ & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} \\ & & G_{33} & G_{34} & G_{35} \\ & & & G_{44} & G_{45} \\ \text{SUMMETRIC} & & & & G_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Umn \\ VUmn \\ Wmn \\ Dmn \\ Emn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Qmn \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서,  $G_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2$   
 $G_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta$   
 $G_{13} = G_{23} = 0$   
 $G_{14} = B_{11}\alpha^2 + B_{66}\beta^2$   
 $G_{15} = G_{24} = (B_{12} + B_{66})\alpha\beta$   
 $G_{22} = A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2$   
 $G_{25} = B_{55}\alpha^2 + B_{22}\beta^2$   
 $G_{33} = A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2$   
 $G_{34} = A_{55}\alpha$

$$\begin{aligned}
 G_{35} &= A_{44}\beta \\
 G_{44} &= A_{55} + D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 \\
 G_{45} &= (D_{12} + D_{66})\alpha\beta \\
 G_{55} &= A_{44} + D_{66}\alpha^2 + D_{22}\beta^2 \\
 \alpha &= \frac{m\pi}{a}, \quad \beta = \frac{n\pi}{b}
 \end{aligned} \tag{28}$$

이중탄성계수 복합재료판의 굽힘해석은 중립면의 위치를 결정하기 위한 절차이므로 횡하중은 단순한 균일 분포하중에 관하여 고려한다. 즉,

$$Q_{mn} = \frac{16q}{mn\pi^2} \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \tag{29}$$

상기의 연립방정식에서 각 변위 및 변형률을 구한다. 변형률의 값이 0이 되는 면이 중립면이므로,

$$\begin{aligned}
 z_{nx} &= - \frac{\sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(m+n+2)/2} Q_{mn} G_{13}^{-1} \alpha}{\sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(m+n+2)/2} Q_{mn} G_{43}^{-1} \alpha} \\
 z_{ny} &= - \frac{\sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} (-1) Q_{mn} G_{23}^{-1} \beta}{\sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{(m+n+2)/2} Q_{mn} G_{53}^{-1} \beta}
 \end{aligned} \tag{30}$$

여기서,  $G_{13}^{-1}$ ,  $G_{23}^{-1}$ ,  $G_{43}^{-1}$  및  $G_{53}^{-1}$ 는 각각 계수행렬  $[G]$ 의 역행렬의 해당위치 요소들을 나타낸다.

중립면 위치를 구하기 위한 해석절차는 식(27)에서 보듯이,  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$  등은 적층판 강성( $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  및  $D_{ij}$ )의 함수이고, 또한 적층판강성들은 각 층재료강성( $Q_{ij}^k$ )의 함수이므로 층강성이 먼저 계산되어야 한다. 계산초기에 중립면의 위치는 판의 중앙면이고, 상부층들은 압축되고 하부층들은 인장된다고 가정하므로써 다음단계의  $z_n$ 을 구한다. 계산된 중립면의 위치  $z_n$ 에 따른 적층판의 새로운 인장, 압축부위를 구하고, 적층판 형상좌표에 따른 변형률  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  및  $\epsilon_{xy}$ 를 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= - \sum_{m,n=1,3,\dots} (U_{mn} + zD_{mn}) \left( \frac{m\pi}{a} \right) \\
 &\quad \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 \epsilon_y &= - \sum_{m,n=1,3,\dots} (V_{mn} + zE_{mn}) \left( \frac{n\pi}{b} \right) \\
 &\quad \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 \epsilon_{xy} &= - \sum_{m,n=1,3,\dots} (U_{mn} + zD_{mn}) \left( \frac{n\pi}{b} \right) \\
 &\quad \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\
 &\quad + \sum_{m,n=1,3,\dots} (V_{mn} + zE_{mn}) \left( \frac{m\pi}{a} \right)
 \end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{31}$$

이들 적층판의 변형률로서 각 적층의 섬유방향 변형률을 각각 구한다. 즉,

$$\epsilon_f = \epsilon_x \cos^2 \theta^k + \epsilon_y \sin^2 \theta^k + 2\epsilon_{xy} \cos^2 \theta^k \sin^2 \theta^k \tag{32}$$

여기서,  $\theta^k$ 는  $k$ 번째 적층의 섬유방향을 나타낸다.  $\epsilon_f^k$ 의 부호에 따라, 인장 또는 압축재료강성을 각각 적용하여 적층강성 및 판강성을 계산하고, 이를 이용하여 새로운 중립면의 위치를 반복계산하며, 반복계산간의 중립면 위치 크기차가 1%이하로 수렴하면 반복계산을 종료하고  $z_n$ 을 결정한다.

결정된 중립면의 위치에 의하여 각 적층강성 및 판강성( $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  및  $D_{ij}$ )을 계산하여 좌굴임계하중 계산식(22) 및 (23)에 대입하여 좌굴임계하중 및 좌굴모드를 각각 구한다.

이상의 절차를 전산프로그램화하였으며, 도표로 다음과 같이 나타내었다.

### 4. 수치해석 결과 및 고찰

#### 4.1 중립면의 위치

대칭직교(symmetric cross-ply), 대칭특수직교, 비대칭특수직교 및 역대칭직교(anti-symmetric cross-ply) 적층된 이중탄성계수 복합재료판의 좌굴에 관한 새로운 해석이 단순지지 경계조건(식 20)에 대하여 시도되고 검토되었다. 좌굴해석의 타당성을 입증하기 위하여 균일분포하중에 의한 적층판 굽힘에서의 중립면의 이동을 본 연구절차에 의

**Table 1** Elastic properties for aramid-rubber and polyester-rubber unidirectional, bimodulus composite plates<sup>(12,14,15)</sup>

Propeties and unit(GPa)	Aramid-rubber		Polyester-rubber	
	Tens.	Compr.	Tens.	Compr.
$E_{11}$	3.58	.012	.617	.0369
$E_{22}$	.00909	.012	.008	.0106
$G_{12}=G_{13}^{(1)}$	.0037	.0037	.00262	.00267
$G_{23}$	.0029	.00499	.00233	.00475
$\nu_{12}$	.416	.205	.475	.185

<sup>(1)</sup> Assumed properties

해 계산하였으며, 계산에 사용된 재료의 탄성특성들은 Table 1 및 2와 같다. 굽힘해석결과를 기존의 연구결과(12, 14 및 15)와 비교하였으며(Table 3, 4, 5 및 6 참조), 비교 결과, 적용한 판이론 및 이중탄성계수재료 모델이 상이함에도 불구하고 중립면의 이동경향이 같으며, 굽힘해석이 정확함이 입증되었다. Table 7~12는 각각 좌굴해석에 사용된 재료, 적층수 및 적층구조에 따라 각각의 굽힘해석에 의한 중립면의 이동량을 수록하였다.

Table 3에서 섬유방향 인장탄성계수가 압축탄성계수보다 약 300배 정도되는 Aramid-rubber의 경우 중립면  $Znx$ 는 극단적으로 하향이동하였으며,  $Zny$ 는 약간 상향이동한다. 섬유방향 인장탄성계수와 압축탄성계수간의 차이가 상대적으로 작은 Polyester-rubber는  $Znx$ 의 이동량이 감소하나,  $Zny$ 의 이동량은 증가하였음이 보여진다. 그러나 종횡비( $a/b$ )가 증가하면 중립면의 이동량이 감소하는 경향을 보이는 것은 같았다.

Table 4는 섬유방향 압축탄성계수가 인장탄성계수의 5배가 되는 가상재료사각형판의 종횡비에 따른 중립면의 이동량을 수록하였다. Table 3과는 반대로  $Zny$ 의 상향이동량이  $Znx$ 의 하향이동량보다 컸으며, 종횡비 1.5~1.8을 경계로 감소 또는

**Table 2** Elastic properties of an orthotropic material<sup>(12,14,15)</sup>

Properties and Unit(MPa)	Tensile	Compressive
$E_{11}$	$25E_2^t$	$25E_2^c$
$E_{22}$	$E_2^t/E_2^c$	1000
$E_{33}$	$E_2^t$	$E_2^c$
$E_{12}$	$0.5E_2^t$	$0.5E_2^c$
$G_{23}^{(1)}$	$0.2E_2^t$	$0.2E_2^c$
$\nu_{12}^{(2)}$	0.25	0.25

<sup>(1)</sup> $G_{13}=G_{12}$  is assumed.

<sup>(2)</sup> $\nu_{23}=\nu_{13}=\nu_{12}$  is assumed.

증가하였다. 본 연구절차에 의한 중립면 계산시 종횡비 0.3과 3.0에서의 중립면의 위치는 발산 또는 2 값사이를 진동하였는데, 이것은 식(27)에서의 계수행렬  $[G]$ 의 특이성에 기인한 것으로 추정된다.

Table 5는 섬유방향 인장탄성계수와 압축탄성계수의 변화에 따른 중립면의 이동량을 계산한 것이며, 섬유방향 인장탄성계수와 압축탄성계수의 비가 증가할수록  $Znx$ 의 하향이동량은 증가하고,  $Zny$ 의

**Table 3** Neutral surface positions for rectangular two-layer, cross-ply(90.0) laminates( $h/b=0.1$ )

a/b	Papazoglou <sup>(14)</sup>		Reddy <sup>(15)</sup>		Present	
	$Znx$	$Zny$	$Znx$	$Zny$	$Znx$	$Zny$
	Aramid-rubber					
0.5	0.4484	-0.0024	0.4439	-0.1141	0.4434	-0.0672
0.7	0.4423	-0.1064	0.4422	-0.0615	0.4402	-0.0458
1.0	0.4333	-0.0415	0.4387	-0.0379	0.4336	-0.0315
1.4	0.4238	-0.0311	0.4323	-0.0253	0.4221	-0.0223
2.0	0.4057	-0.0227	0.4174	-0.0164	0.3999	-0.0153
	Polyester-rubber					
0.5	0.3768	-0.1464	0.3659	-0.1904	0.3658	-0.1966
0.7	0.3701	-0.1209	0.3639	-0.1216	0.3622	-0.1355
1.0	0.3639	-0.1015	0.3612	-0.0971	0.3558	-0.1054
1.4	0.3567	-0.0915	0.3564	-0.0865	0.3446	-0.0907
2.0	0.3462	-0.0859	0.3445	-0.0804	0.3215	-0.0826



상향이동량은 감소하였다. 특히 섬유방향 인장탄성계수와 압축탄성계수가 동일한 즉, 단일탄성계수재료에 대하여도 중립면의 이동량은 이중탄성계수재료인 경우와 같은 수준이었으며, 이것은 적층구조가 역대칭이므로 적층구조 자체에 의한 이중탄성계수효과 때문인 것으로 해석된다.

Table 6은 세장비(side-thickness ratio)의 변화

에 따른 중립면의 이동량을 계산한 것인데, 세장비의 변화에 따른 중립면이동량의 변화는 거의 무시할 수 있었다.

Table 7, 8 및 9는 각각 고려된 이중탄성계수재료의 적층구조에 따른 중립면의 이동량을 계산한 것이다. 섬유방향 인장탄성계수와 압축탄성계수의 차이가 큰 Aramid-rubber의 중립면 이동량이 가장

**Table 4** Neutral surface positions for rectangular two-layer, cross-ply (90/0) laminates ( $E_2^t/E_2^c=0.2$ ,  $h/a=0.1$ )

a/b	Papazoglou <sup>(14)</sup>		Doong <sup>(12)</sup>		Present	
	Znx	Zny	Znx	Zny	Znx	Zny
0.3	0.1234	-0.3861	0.1344	-0.3600	-	-
0.6	0.1238	-0.3539	0.1345	-0.3426	0.1360	-0.3447
0.9	0.1255	-0.3485	0.1358	-0.3382	0.1365	-0.3358
1.2	0.1280	-0.3476	0.1375	-0.3377	0.1370	-0.3328
1.5	0.1300	-0.3499	0.1388	-0.3389	0.1370	-0.3313
1.8	0.1314	-0.3530	0.1394	-0.3409	0.1357	-0.3307
2.1	0.1308	-0.3567	0.1390	-0.3436	0.1319	-0.3309
2.4	0.1305	-0.3621	0.1376	-0.3467	0.1222	-0.3327
2.7	0.1278	-0.3669	0.1352	-0.3503	0.0893	-0.3356
3.0	0.1236	-0.3719	0.1335	-0.3530	-	-

**Table 5** Neutral surface positions for square two-layer, cross-ply (90/0) laminates ( $h/a=0.1$ ,  $a/b=1$ )

a/b	Papazoglou <sup>(14)</sup>		Doong <sup>(12)</sup>		Present	
	Znx	Zny	Znx	Zny	Znx	Zny
0.2	0.1263	-0.3478	0.1364	-0.3378	0.1274	-0.3354
0.4	0.1752	-0.3044	0.1777	-0.2965	0.1771	-0.2941
0.6	0.2041	-0.2765	0.2036	-0.2707	0.2024	-0.2687
0.8	0.2243	-0.2560	0.2224	-0.2519	0.2207	-0.2504
1.0	0.2399	-0.2399	0.2372	-0.2372	0.2350	-0.2361
1.2	0.2525	-0.2267	0.2492	-0.2251	0.2467	-0.2244
1.4	0.2630	-0.2156	0.2593	-0.2150	0.2565	-0.2145
1.6	0.2721	-0.2059	0.2680	-0.2063	0.2650	-0.2060
1.8	0.2799	-0.1976	0.2757	-0.1986	0.2725	-0.1986
2.0	0.2809	-0.1900	0.2824	-0.1918	0.2791	-0.1920

켰으나, 각 경우 적층수의 증가에 따른 중립면 이동량변화는 적었으며, 적층구조의 변화(대칭적층 및 역대칭적층)에 의하여  $Z_{nx}$ 와  $Z_{ny}$ 의 값이 서로 바뀌었다. 그러나, 각재료의 섬유방향 인장탄성계수의 단일탄성계수를 가정한 Table 10, 11 및 12의 경우 대칭적층구조에서의 중립면의 이동은 없었으나, Table 5의 경우와 같이 역대칭구조 적층판의 경우 적층구조에 의한 중립면의 이동이 관찰되었다. 또한, 역대칭구조 적층판의 경우에도 적층수가

증가함에 따라 중립면의 이동량은 급격히 감소하였는데, 이것은 적층수의 증가에 의하여 역대칭구조 특성이 감소하기 때문인 것으로 판단된다.

이상의 굽힘해석결과, 이중탄성계수재료 적층판의 경우 섬유방향 인장탄성계수와 압축탄성계수의 비가 클수록 중립면의 이동량은 증가하며, 적층판의 중횡비, 세장비의 변화 및 적층구조의 변화에 따른 중립면 이동량의 변화는 적었다. 특히 단일탄성계수 적층판의 경우에도 역대칭 적층구조에서는

**Table 6** Neutral surface positions for square two-layer, cross-ply (90/0) laminates ( $E_2^t/E_2^c=0.2$ ,  $a/b=1.0$ )

a/b	Papazoglou <sup>(14)</sup>		Doong <sup>(12)</sup>		Present	
	Znx	Zny	Znx	Zny	Znx	Zny
10	0.1263	-0.3479	0.1364	-0.3378	0.1274	-0.3354
20	0.1204	-0.3449	0.1371	-0.3344	0.1274	-0.3351
30	0.1193	-0.3444	0.1372	-0.3337	0.1274	-0.3350
40	0.1190	-0.3442	0.1373	-0.3335	0.1274	-0.3350
50	0.1188	-0.3441	0.1373	-0.3334	0.1274	-0.3350
60	0.1187	-0.3441	0.1373	-0.3333	0.1274	-0.3350
70	0.1186	-0.3440	0.1373	-0.3333	0.1274	-0.3350
80	0.1186	-0.3440	0.1373	-0.3333	0.1274	-0.3350
90	0.1186	-0.3440	0.1373	-0.3333	0.1274	-0.3350
100	0.1186	-0.3440	0.1373	-0.3332	0.1274	-0.3350

**Table 7** Neutral surface positions for the composit structure of polyester-rubber square, cross-ply laminates

No. of Ply	Composite structure	Neutral surface position	
		Znx	Zny
1	0°	0.3027	-0.1889
2	0/90	-0.1044	0.3558
2	90/0	0.3558	-0.1054
3	0/90/0	0.3104	0.0488
4	0/90/90/0	0.3164	0.1081
4	0/90/0/90	0.0945	0.3289
6	0/90/0/0/90/0	0.3002	0.1792
6	0/90/0/90/0/90	0.1635	0.3199

**Table 8** Neutral surface positions for the composit structure of Aramid-rubber square, cross-ply laminates

No. of Ply	Composite structure	Neutral surface position	
		Znx	Zny
1	0°	0.4412	-0.2591
2	0/90	-0.0464	0.4335
2	90/0	0.4336	-0.0471
3	0/90/0	0.4279	0.1044
4	0/90/90/0	0.4249	0.1817
4	0/90/0/90	0.1821	0.4247
6	0/90/0/0/90/0	0.4219	0.2595
6	0/90/0/90/0/90	0.2598	0.4217

**Table 9** Neutral surface positions for the composit structure of square, cross-ply laminates ( $E_2^t/E_2^c=2.0$ )

No. of Ply	Composite structure	Neutral surface position	
		Znx	Zny
1	0°	0.0864	0.1007
2	0/90	-0.1922	0.2827
2	90/0	0.2817	-0.1930
3	0/90/0	0.1133	0.0399
4	0/90/90/0	0.1255	0.0471
4	0/90/0/90	-0.0338	0.2042
6	0/90/0/0/90/0	0.0887	0.0858
6	0/90/0/90/0/90	0.0062	0.1645

**Table 10** Neutral surface positions for the composit structure square, cross-ply laminates ( $E_2^t/E_2^c=1.0$ )

No. of Ply	Composite structure	Neutral surface position	
		Znx	Zny
1	0°	0.0000	0.0000
2	0/90	-0.2384	0.2391
2	90/0	0.2381	-0.2394
3	0/90/0	0.0000	0.0000
4	0/90/90/0	0.0000	0.0000
4	0/90/0/90	-0.1193	0.1197
6	0/90/0/0/90/0	0.0000	0.0000
6	0/90/0/90/0/90	-0.0796	0.0798

중립면이 이동하였으나, 적층수가 증가함에 따라 중립면의 이동량은 급격히 감소함을 알 수 있었다.

굽힘하중을 받는 적층판의 경우, 중립면이동은 판의 굽힘저항의 감소를 의미하며, 특히 이중탄성계수재료 적층판의 굽힘해석은 이러한 중립면 이동을 고려하여야 한다.

**4.2 좌굴임계하중 및 좌굴모드**

식(22) 및 (24)에서  $x$ 방향 내평면압축력만을 받는 적층판의 좌굴을 해석하였으며, 각 Table에 주

**Table 11** Neutral surface positions for the composit structure of olyester-rubber, square cross-ply laminates (Tensile property only)

No. of Ply	Composite structure	Neutral surface position	
		Znx	Zny
1	0°	0.0000	0.0000
2	0/90	-0.2456	0.2461
2	90/0	0.2456	-0.2461
3	0/90/0	0.0000	0.0000
4	0/90/90/0	0.0000	0.0000
4	0/90/0/90	-0.1229	0.1232
6	0/90/0/0/90/0	0.0000	0.0000
6	0/90/0/90/0/90	-0.0819	0.0821

**Table 12** Neutral surface positions for the composit structure of aramid-rubber, square cross-ply laminates (Tensile property only)

No. of Ply	Composite structure	Neutral surface position	
		Znx	Zny
1	0°	0.0000	0.0000
2	0/90	-0.2492	0.2495
2	90/0	0.2492	-0.2496
3	0/90/0	0.0000	0.0000
4	0/90/90/0	0.0000	0.0000
4	0/90/0/90	-0.1247	0.1248
6	0/90/0/0/90/0	0.0000	0.0000
6	0/90/0/90/0/90	0.0831	0.0832

어진 중립면의 이동에 의한 적층강성을 구하여 좌굴지배방정식에 대입하여 Fig. 4에서 Fig. 12까지의 적층판의 종횡비 (Aspect Ratio,  $a/b$ )에 따른 좌굴임계하중 및 좌굴모드의 곡선을 구하였다.

Fig. 4는 섬유방향 인장탄성계수와 압축탄성계수비의 변화에 따른 좌굴임계하중 및 좌굴모드수의 변화를 종횡비에 대하여 구성한 것이다.  $E_{22}^t/E_{22}^c$  비가 증가함에 따라 좌굴임계하중이 증가하였으며,

중횡비에 대한 좌굴모드의 영역이 확대되었다. Fig. 5는 적층판의 세장비(side-thickness ratio) 변화에 따른 좌굴임계하중 및 좌굴모드수의 변화를 나타낸 것이다. Table 6의 결과 고찰에서 예상한 것과 같이 적층판의 세장비 변화에 따른 중립면의 이동량변화는 거의 없었으며, 따라서 적층판 강성의 변화가 없고, 이에 따라 좌굴임계하중 및 좌굴 모드수의 변화도 없는 것이 확인되었다. Fig. 6~8은 각각 고려되는 이중탄성계수재료 적층판의 적층수 및 적층구조의 변화에 따른 좌굴임계하중 및 좌굴모드수의 변화를 중횡비에 대하여 도시한 것이다.

이들 그림에서 보듯이 좌굴임계하중 및 좌굴모드수는 적층구조 및 적층수의 변화에 따라 크게 변하였다. 대칭적층구조보다 역대칭적층구조에서 좌굴임계하중 및 중횡비에 대한 좌굴모드영역이 크게 감소하며, 같은 적층구조에서 적층수가 증가하면 좌굴임계하중이 감소하였다. Fig. 6의 Polyester-rubber의 경우, 0°단일적층의 좌굴임계하중은 0°/

90° 2-ply적층의 좌굴임계하중보다 13.6배, Fig. 7의 Aramid-rubber는 47배, Fig. 8의  $E_2^t/E_2^c=2$ 의 경우, 7.3배에 달했다. 좌굴모드의 중횡비에 대한 영역도 대칭적층구조보다 역대칭적층구조에서 감소하며, 같은 적층구조에서는 적층수가 증가할 때 차이가 감소하였다. 그러나, 적층수가 증가함에 따라 대칭적층구조와 역대칭적층구조사이의 좌굴임계하중 및 좌굴모드수의 중횡비 영역의 크기차이는 점점 감소하는 것이 보여지며, 궁극적으로 적층수를 증가시키면 좌굴임계하중 및 좌굴모드는 수렴할 것이 예상된다.

Fig. 9~11은 각 단일탄성계수 적층판의 적층수 및 적층구조의 변화에 따른 좌굴임계하중 및 좌굴 모드수의 변화를 중횡비에 대하여 도시한 것이다. 역대칭적층판의 각 좌굴모드에서의 최소임계좌굴하중은 정수값(1, 2, ... 등)의 중횡비에서 나타나며, 대칭적층판의 경우, 적층수가 증가할수록 제 1 좌굴 모드에서의 최소임계좌굴하중은 중횡비 1에 근접하

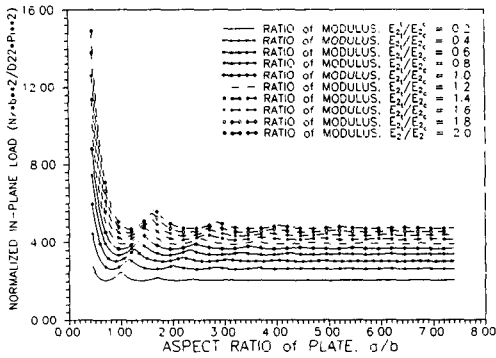


Fig. 4 Buckling loads for rectangular, cross-ply laminated plates (2-Ply: 90/0, h/a=0.1)

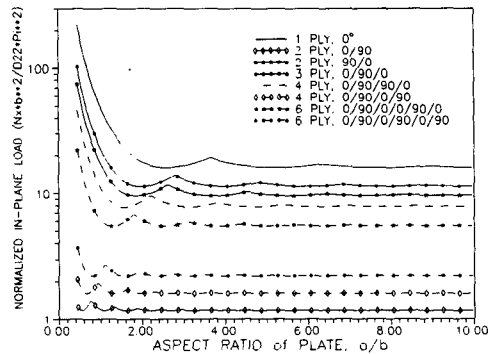


Fig. 6 Buckling loads for polyester-rubber rectangular, cross-ply laminated plates (h/a=0.1)

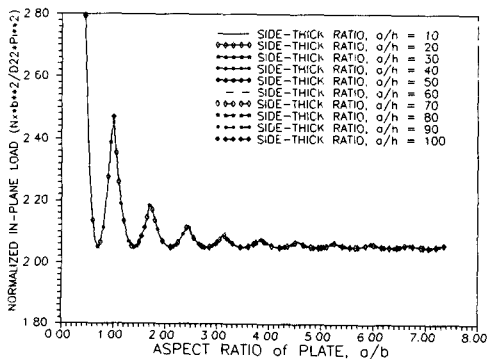


Fig. 5 Buckling loads for rectangular, cross-ply laminated plates (2-Ply: 90/0,  $E_2^t/E_2^c=0.2$ )

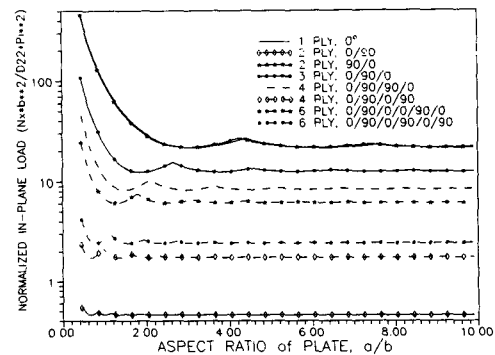


Fig. 7 Buckling loads for aramid-rubber rectangular, cross-ply laminated plates (h/a=0.1)

였다.

적층수가 증가할 때 최소좌굴임계하중은 감소하였으며, 0° 단일적층판의 최소좌굴임계하중은 역대칭 6-ply(0/90/0/90/0/90)적층판의 5.9배, 9.3배 및 19.5배에 각각 달한다. 섬유방향 인장탄성계수와 압축탄성계수비의 값이 클수록 0° 단일적층판의 최소좌굴임계하중의 크기가 증가하나, 기타의 적층구조에 있어서는 크기 차이가 거의 없었다. 적층구조에 관계없이 적층수가 증가할 때, 최소좌굴임계하중의 크기 및 좌굴모드의 중횡비에 대한 영역은 감소하며, 궁극적으로 수렴될 것으로 예상된다.

좌굴해석의 타당성을 보이기 위하여 등방성재료의 적층판에 대하여 본 연구절차에 따라 해석을 수행하여 좌굴해석결과(Fig. 12)를 유도하였으나, 좌굴임계하중 및 좌굴모드는 적층구조 및 적층수에 관계없이 고전판이론(classical plate theory)에 의한 결과와 일치하였으며, 이로써 본 해석절차의 타당성이 입증된 것으로 판단된다.

이상의 좌굴해석에서 고찰된 결과를 다음과 같이 정리할 수 있다. 즉,

(1) 좌굴임계하중 및 좌굴모드의 중횡비에 대한 영역은 섬유방향 인장탄성계수와 압축탄성계수비의

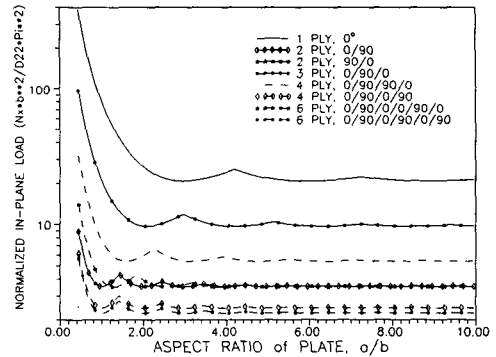


Fig. 10 Buckling loads for polyester-rubber type rectangular, cross-ply laminated plates with only tensile property ( $h/a=0.1$ )

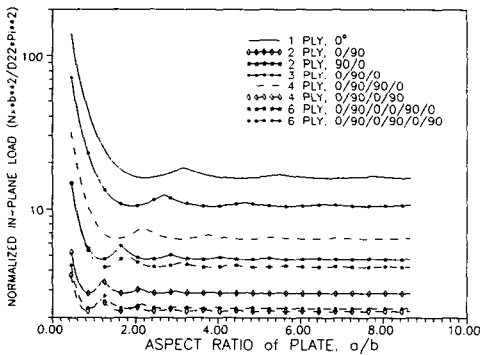


Fig. 8 Buckling loads for rectangular, cross-ply laminated plates ( $E_2^t/E_2^c=2.0$ ,  $h/a=0.1$ )

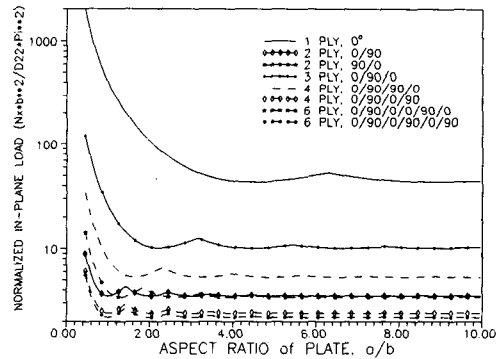


Fig. 11 Buckling loads for aramid-rubber type rectangular, cross-ply laminated plates with only tensile property ( $h/a=0.1$ )

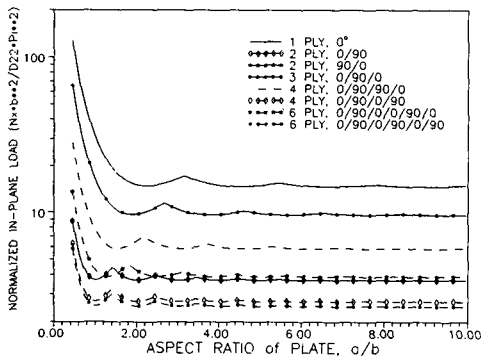


Fig. 9 Buckling loads for rectangular, cross-ply laminated plates ( $E_2^t/E_2^c=1.0$ ,  $h/a=0.1$ )

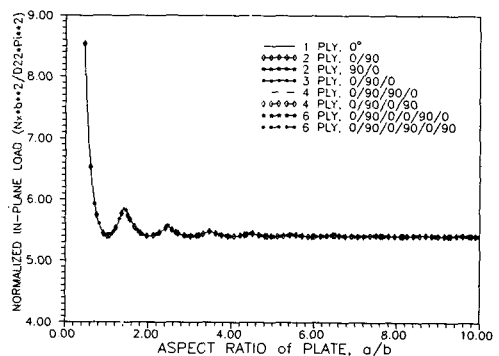


Fig. 12 Buckling loads for rectangular, isotropic plates ( $h/a=0.1$ )

값이 클수록 증가한다.

(2) 적층판의 세장비의 변화에 따른 이중탄성계수 적층판의 좌굴거동의 변화는 무시할 수 있다.

(3) 이중탄성계수 적층판의 좌굴거동의 변화는 적층수의 변화보다 적층구조의 변화, 즉 대칭적층구조와 역대칭 적층구조의 차이에 민감하다.

(4) 단일탄성계수 적층판에서는 적층구조에 따른 적층판 좌굴거동의 변화보다 적층수의 변화에 따른 변화가 훨씬 크다.

(5) 이중탄성계수 및 단일탄성계수 적층판의 좌굴거동변화는 적층수가 증가하면 최소 좌굴임계하중의 크기 및 좌굴모드의 중횡비에 대한 영역은 감소하며, 궁극적으로 수렴될 것으로 예상된다.

## 5. 결 론

이중탄성계수 복합재료적층판의 굽힘 및 좌굴거동해석에 있어서, 적층판의 거동특성을 나타내는 적층강성( $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  및  $D_{ij}$ )의 계산시 이중탄성계수 재료의 적층강성( $Q_{ij}^*$ ), 이동하는 중립면(neutral surface)의 위치를 고려하였으며, 특히 Bert의 'macro fiber-governed model'에 따른 섬유방향 변형률의 부호를 계산하여 2종의 적층강성( $Q_{ij}^*$ ,  $Q_{ij}^c$ )을 각각 적용하였다.

굽힘해석결과,

(1) 이중탄성계수재료 적층판의 경우 섬유방향 인장탄성계수가 압축탄성계수보다 클수록 중립면의 이동량은 증가하며,

(2) 적층판의 중횡비, 세장비의 변화 및 적층구조의 변화에 따른 중립면 이동량의 변화는 적었다.

(3) 특히 단일탄성계수 복합재료적층판의 경우에도 역대칭 적층구조에서는 중립면이 이동하였으나,

(4) 공통적으로 적층수가 증가함에 따라 중립면의 이동량은 급격히 감소함을 알 수 있었다.

그리고, 좌굴해석에서 고찰된 결과를 다음과 같이 정리할 수 있었다. 즉,

(1) 좌굴임계하중 및 좌굴모드의 중횡비에 대한 영역은 섬유방향 인장탄성계수와 압축탄성계수비의 값이 클수록 증가한다.

(2) 적층판의 세장비의 변화에 따른 이중탄성계수 적층판의 좌굴거동의 변화는 무시할 수 있다.

(3) 이중탄성계수 적층판의 좌굴거동의 변화는 적층수의 변화보다 적층구조의 변화, 즉 대칭적층구조와 역대칭 적층구조의 차이에 민감하다.

(4) 단일 탄성계수 적층판에서는 적층구조에 따른 적층판 좌굴거동의 변화보다 적층수의 변화에 따른 변화가 훨씬 크다.

(5) 이중탄성계수 및 단일탄성계수 적층판의 좌굴거동변화는 적층수가 증가하면 최소좌굴임계하중의 크기 및 좌굴모드의 중횡비에 대한 영역은 감소하며, 궁극적으로 수렴될 것으로 예상된다.

지금까지의 연구결과로 이중탄성계수를 가지는 복합재료적층판 등의 경우, 단일탄성계수를 가정한 기존의 해석결과는 굽힘 및 좌굴을 받는 경우 재료 거동예측에 있어서 심각한 오차가 발생할 수 있음이 보여졌다. 이중탄성계수재료 적층판의 경우, 중립면 위치가 판의 중앙면으로부터보다 강한 탄성(압축 또는 인장)을 가지는 적층방향으로 많이 이동하므로 반대방향 부위의 변형이 확대되어 판재는 설계하중이하에서 변형되어 파손될 가능성이 높아진다.

따라서, 이러한 특성을 보이는 재료는 중립면의 변화에 따른 처짐(deflection) 및 좌굴의 보다 정확한 해석을 위하여 본 연구절차와 같은 해석과정을 수행하여야 한다.

그러나, 좌굴해석에 있어서 제1 좌굴모드이상의 경우, 좌굴로 인한 변형의 방향이 변하므로 해석이 어려워지거나, 또는 불가능할 수 있으나, 제1 좌굴모드의 경우 비교적 정확할 것으로 보이며, 판재료 설계의 기준으로 활용할 수 있을 것이다.

이중탄성계수 복합재료적층판의 굽힘해석을 위하여 많은 참고자료를 조사할 수 있었으나, 좌굴해석을 위한 참고자료는 거의 찾을 수 없었다.

앞으로 더욱 정확한 해석 및 적용범위를 넓히기 위하여는 복합재료의 이중탄성계수 특성확인을 위한 다양한 시험 및 제2 좌굴모드이상에서의 타당한 해석과 고차 전단변형이론을 적용한 보다 정확한 거동해석에 대한 연구가 수행되어야 하겠다.

## 참고문헌

- (1) Clark, S. K., 1963, "The Plane Elastic Characteristics of Cord-Rubber Laminates." *Text, Res. J.*, Vol. 33 No. 4, pp. 295~313.
- (2) Patel, H. P., Turner, J. L. and Walter, J.D., 1976, "Radial Tire Cord-Rubber Composite," *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 49, pp. 1095~1110.
- (3) Ambartsumyan, S. A., 1965, "The Symmetric

- Problem of Circular Cylindrical Shell Made of Materials with Different Stiffness in Tension and in Compression." *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekanika*, Vol. 4, pp. 77~85, *English Trans.*, NTIS Report.
- (4) Isabekyan, N. G. and Khachatryan, A. A., 1969, "On the Multimodulus Theory of Elasticity of Anisotropic Bodies in a Plane Stress State," *Izv. Akad. Nauk SSR, Mekanika*, Vol. 5, pp. 25~34.
- (5) Sharpiro, G. S., 1966, "Deformation of Solids with Different Tensile and Compressive Strength." *Mech. Solids*, Vol. 1, pp. 85~86.
- (6) Jones, R. M. and Morgan, H. S., 1988, "Bending and Extension of Cross-Ply Laminates with Different Moduli in Tension and Compression." *Comp. & Struct.*, Vol. 11, No. 3, pp. 181~190.
- (7) Green A. E. and Mkrtychian, J. Z., 1977, "Elastic Solids with Different Moduli in Tension and in Compression," *J. Elasticity*, Vol. 6, pp. 369~386.
- (8) Bert, C. W., 1988, "Models for Fibrous Composites with Different Properties in Tension and Compression," *J. Engng. Mater. Technol. Tran. ASME*, Vol. 99, No. 4, pp. 344~349.
- (9) Sacco, E. and Reddy, J. N., 1990, "Analysis of Thick Bimodular Composite Plates Using an Energy-Based Constitutive Model," *Comp. & Struct.*, Vol. 39, No. 1/2, pp. 149~154.
- (10) Jones, R. M., 1971, "Buckling of Circular Cylindrical Shells with Different Moduli in Tension and Compression." *AIAA J.*, Vol. 9, No. 1
- (11) Jones, R. M., 1971, "Buckling of Stiffened Multilayered Circular Cylindrical Shells with Different Orthogonal Moduli in Tension and Compression." *AIAA J.*, Vol. 9, No. 5.
- (12) Doong, J. L. and Chen, L. W., 1980, "Bending of a Bimodulus Laminated Plate Based on a Higher-Order Shear Deformation Theory," *Composite Structure*, Vol. 10, pp. 121~144.
- (13) Reedy, J. N., 1984, *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, Willey Interscience Publication.
- (14) Papazoglou, V. J. and Tsouvalis, N. G., 1991, "Mechanical Behaviour of Bimodulus Laminated Plates." *Composite Structure*, Vol. 17, No. 1, pp. 1~22.
- (15) Reddy, J. N. and Chao, W. C., 1980, "Finite-Element Analysis of Laminated Bimodulus Composite-Material Plates." *Com. & Struct.*, Vol. 12, pp. 245~251.