

(論 文)

## 열탄소성 구성방정식 적분을 위한 새로운 알고리즘

이동욱\* · 신호철\*\*

(1993년 11월 12일 접수)

### A New Algorithm for the Integration of Thermal-Elasto-Plastic Constitutive Equation

Dong-Wook Lee and Hyo-Chol Sin

**Key Words :** Thermal-Elasto-Plastic Constitutive Equation(열탄소성 구성방정식), Return Mapping Algorithm(복귀사상 알고리즘), 3-Point Approximation(3점 근사화), Combined Hardening(복합경화법칙), Iso-Error Map(등오차선도), Radial Error(반경오차), Angular Error(방향오차)

#### Abstract

A new and efficient algorithm for the integration of the thermal-elasto-plastic constitutive equation is proposed. While it falls into the category of the return mapping method, the algorithm adopts the three point approximation of plastic corrector within one time increment step. The results of its application to a von Mises-type thermal-elasto-plastic model with combined hardening and temperature-dependent material properties show that the accurate iso-error maps are obtained for both angular and radial errors. The accuracy achieved is because the predicted stress increment in a single step calculation follows the exact value closely not only at the end of the step but also through the whole path. Also, the comparison of the computational time for the new and other algorithms shows that the new one is very efficient.

#### 기 호 설 명

$a_{ij}$ : 편차 응력공간에서의 항복곡선의 중심	$\sigma_{ij}, \sigma$ : 응력텐서 및 벡터 ( $\sigma^t = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}$ )
$\beta$ : 경화상수 ( $0 < \beta < 1$ )	$\bar{\sigma}$ : 상당 항복응력
$\epsilon_{ij}, \epsilon$ : 변형률텐서 및 벡터 ( $\epsilon^t = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{31}\}$ )	$\sigma_y$ : 초기 항복응력
$\epsilon^{ep}$ : 탄소성변형률 ( $\epsilon^{ep} = \epsilon^e + \epsilon^p$ )	$\emptyset$ : 항복합수
$\dot{\epsilon}^p$ : 상당 소성변형률	$a_{ij}, a$ : 응력공간에서의 항복곡선의 중심
$\theta$ : 온도	$c$ : 이동경화 비례상수
$\lambda$ : 소성포텐셜의 법선비례계수	$D_{ijkl}, D$ : 등방 탄성응력-변형률텐서 및 행렬
$\eta$ : 이동응력벡터 ( $\eta = \sigma - a$ )	$G$ : 탄성 전단계수
$\nu$ : 푸아송비	$H$ : 소성계수
	$S_{ij}, S$ : 편차 응력텐서 및 벡터
	$(\cdot)^e$ : 탄성변수
	$(\cdot)^p$ : 소성변수

\*서울대학교 대학원 기계설계학과

\*\*정회원, 서울대학교 기계설계학과

- (.)<sup>th</sup> : 열변수
- (.)<sup>E</sup> : 탄성추정자
- (.)<sup>(n)</sup> : 반복변수
- (.) : 시간 미분변수
- "(.)<sup>n+1</sup>(.)<sup>n+2</sup>(.) : 시간  $t, t + \Delta t/2, t + \Delta t$ 에서의 변수

### 1. 서 론

해석적 해법의 한계로 인하여, 탄소성(elasto-plasticity) 특히 열탄소성(thermal-elasto-plasticity) 해석을 요하는 실제 문제에 있어서 유한요소법의 도입은 필연적이라 할 수 있다. 그런데 문제 자체에 내재하는 비선형성은 해법을 복잡하게 만들뿐 아니라, 구한 해의 정확도에도 심각한 영향을 미치게 된다. 특히 탄소성 및 열탄소성문제에 있어서 그 해의 정확도는 접선강성행렬(tangent stiffness matrix)의 계산과 구성방정식을 적분함으로써 구하여지는 응력의 정확도에 크게 의존되는데, 접선강성행렬의 경우는 계산시간 및 비용의 절감을 위하여 그 정확도에 대한 요구가 줄어드는 반면, 응력계산의 경우는 최종 해의 정확도에 지대한 영향을 미치게 되므로 그 정확성이 크게 요구된다.

탄소성 구성방정식의 적분방법에 대한 연구는 오랜 역사를 갖고 있는데, 1964년 Wilkins<sup>(1)</sup>에 의해 처음 제기된 것으로 알려져 있는 법선복귀법(radial return method)이 최근까지 꾸준한 발전을 거치면서 많이 이용되고 있다. 1977년 Krieg 등<sup>(2)</sup>은 법선복귀법과 그외 몇가지 방법들을 이용하여 단순한 탄소성 모델에 대한 그 정확도를 비교하였고, 1979년 Schreyer 등<sup>(3)</sup>은 등방경화(isotropic hardening) 모델에 대하여, Krieg 등이 제시한 방법과 유사한 알고리즘들을 이용하여 정확도를 비교하고, 그 결과를 토대로 재분할(subdivision) 수를 결정하는 지침을 제시하였다.

1986년 Ortiz와 Simo<sup>(4)</sup>는 법선복귀법을 확장하여 일반적인 탄소성문제에 적용할 수 있는 반복계산법을 도입한 복귀사상 알고리즘(return mapping algorithm)을 발표하였고, 같은 해에 Simo와 Taylor<sup>(5)</sup>는 복귀사상 알고리즘을 평면응력(plane stress)문제에 적용하고, 이에 상응하는 일관된 탄소성 접선계수(consistent elastic plastic tangent modulus)를 제시한 바 있다.

이상의 방법들은 모두 탄성추정자(elastic pre-

dicator)와 소성수정자(plastic corrector)를 이용하여, 시간증분간의 특정한 한점에서 항복함수를 만족하도록 함으로써 소성변형률을 구하고, 이를 통하여 최종 응력상태를 결정하는 것이 특징이다. 그런데 소성변형률은 그 크기와 함께 방향성을 갖고 있고, 응력증분 또한 증분간에 비선형적인 경로를 따르게 되므로, 크기의 함수로 표시되는 스칼라함수인 항복함수를 만족시키는 것만으로는 방향성성분을 충분히 기술하지 못하고, 따라서 방향오차(angular error)를 포함하게 된다.

따라서 본 논문에서는 열탄소성문제에 대하여 이상의 방법의 문제점을 보완할 수 있도록 소성수정자를 3점 근사화에 의한 2차 다항식을 이용하는 새로운 알고리즘을 제시하고, 이의 정확도를 다른 방법의 결과와 비교하고자 한다.

### 2. 열탄소성 구성방정식

열탄소성 구성방정식을 구하는데 있어서 von Mises 형태의 항복함수와 연관유동법칙(associated flow rule)을 가정하였고, 등방경화법칙(isotropic hardening rule)과 이동경화법칙(kinematic hardening rule)의 중간형태인 복합경화법칙(combined hardening rule)을 채택하였다. 이들을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl}^e \tag{2}$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \tag{3}$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = c \dot{\epsilon}_{ij}^p \tag{4}$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \tag{5}$$

$$\Phi = \frac{1}{2} (S_{ij} - \alpha_{ij}) (S_{ij} - \alpha_{ij}) - \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2 = 0 \tag{6}$$

이때 다음과 같은 변환행렬 P를 정의하면

$$P \equiv \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

식(1) ~ (6)들은 다음과 같은 벡터식으로 표현될 수

있다.

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^{th} \quad (8)$$

$$\sigma = D\epsilon^e \quad (9)$$

$$\dot{a} = c\lambda\eta \quad (10)$$

$$\dot{\epsilon}^p = P\eta\dot{\lambda} \quad (11)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}\eta^t P\eta} \quad (12)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2}\eta^t P\eta - \frac{1}{3}\bar{\sigma}^2 = 0 \quad (13)$$

여기서, 이동응력 (shifted stress)  $\eta$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\eta \equiv \sigma - a \quad (14)$$

구성방정식을 구하기 위하여 식(9)의 양변을 시간  $t$ 에 대하여 미분을 취하면 다음과 같다.

$$\dot{\sigma} = D(\dot{\epsilon}^{ep} - \dot{\epsilon}^p) + D_{,a}D^{-1}\sigma\dot{\theta} \quad (15)$$

이때 탄소성변형률  $\epsilon^{ep}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon^{ep} \equiv \epsilon^e + \epsilon^p \equiv \epsilon - \epsilon^{th} \quad (16)$$

식(10), (11), (14), (15)을 이용하여  $\dot{\eta}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\dot{\eta} = D\dot{\epsilon}^{ep} - (DP\eta + c\eta)\dot{\lambda} + D_{,a}D^{-1}\sigma\dot{\theta} \quad (17)$$

또한 항복함수 식(13)을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{\phi} = \eta^t P\dot{\eta} - \frac{2}{3}\bar{\sigma}\dot{\sigma} = 0 \quad (18)$$

그런데  $\bar{\sigma}$ 는  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ 와 온도의 함수이고, 항복함수 식(13)을 항상 만족하여야 하므로 다음과 같다.

$$\dot{\sigma} = \bar{\sigma}_{,i\bar{\epsilon}^p}\dot{\bar{\epsilon}}^p + \bar{\sigma}_{,e}\dot{\theta} \quad (19)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}}\bar{\phi} \quad (20)$$

여기서,

$$\bar{\phi} \equiv \sqrt{\eta^t P\eta} \quad (21)$$

식(17)을 식(18)에 대입하여  $\dot{\lambda}$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{\lambda} = \frac{\eta^t PD\dot{\epsilon}^{ep}}{\eta^t PDP\eta(1+\mu)} + \vartheta\dot{\theta} \quad (22)$$

여기서,

$$\mu \equiv \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}c + \bar{\sigma}_{,i\bar{\epsilon}^p}\right)\bar{\phi}^2}{\eta^t PDP\eta} \quad (23)$$

$$\vartheta \equiv \frac{\eta^t PD_{,a}D^{-1}\sigma - \frac{2}{3}\bar{\sigma}\bar{\sigma}_{,e}}{\eta^t PDP\eta(1+\mu)} \quad (24)$$

식(22)을 이용하여 식(15)을 정리하면 다음과 같은 구성 방정식을 구할 수 있다.

$$\dot{\sigma} = C^{ep}\dot{\epsilon}^{ep} + C^\theta\dot{\theta} \quad (25)$$

여기서,

$$C^{ep} \equiv D - \frac{n \otimes n}{1+\mu} \quad (26)$$

$$C^\theta \equiv D_{,a}D^{-1}\sigma - \vartheta DP\eta \quad (27)$$

$$n \equiv \frac{DP\eta}{\sqrt{\eta^t PDP\eta}} \quad (28)$$

### 3. 구성방정식 적분의 정식화

주어진 총 변형률증분과 온도증분에 대하여 최종 응력상태를 구하기 위하여는 구성방정식 (25)을 다음과 같이 시간에 대하여 적분하여야 한다.

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^t\sigma + \int_t^{t+\Delta t} [C^{ep}\dot{\epsilon}^{ep} + C^\theta\dot{\theta}] dt \quad (29)$$

그런데 식(29)의  $C^{ep}$ 와  $C^\theta$ 가 온도와 소성변형률의 식으로, 비선형방정식의 형태이므로 해석적 방법의 적용이 곤란하다. 따라서 근사화가 필요한데, Fig. 1과 같이 어떤 함수  $g$ 를 시간  $t$ 와  $t+\Delta t$ 사이에서 2차 다항식으로 근사화할 수 있다고 가정하면 다음과 같다.

$$g(\tau) = {}^{n+1}g + ({}^{n+2}g - {}^ng)\frac{\tau - \tau_0}{2\Delta\tau} + ({}^{n+2}g - 2{}^{n+1}g + {}^ng)\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\Delta\tau^2} \quad (30)$$

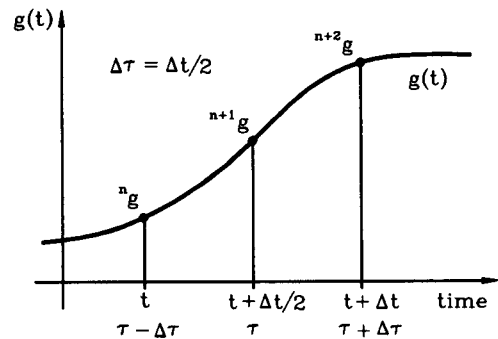


Fig. 1 Approximation of an arbitrary function into the 2nd order polynomial ( $\tau = t + \Delta t/2$ ,  $\Delta\tau = \Delta t/2$ )

$$\begin{aligned} \dot{g}(\tau) &= ({}^{n+2}g + {}^ng) \frac{1}{2\Delta\tau} \\ &+ ({}^{n+2}g - 2{}^{n+1}g + {}^ng) \frac{\tau - \tau_0}{\Delta\tau^2} \end{aligned} \quad (31)$$

식(30), (31)의 관계를 식(10)~(12)에 대입하여  $n+1$ 과  $n+2$ 에서의 식을 구하면 다음과 같다.

$${}^{n+1}\epsilon^p = {}^n\epsilon^p + \frac{3}{4}P^{n+1}\eta\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{4}P^{n+2}\eta\bar{\lambda}_2 \quad (32)$$

$${}^{n+2}\epsilon^p = {}^n\epsilon^p + P^{n+1}\eta\bar{\lambda}_1 \quad (33)$$

$${}^{n+1}a = {}^na + \frac{3}{4}{}^{n+1}c^{n+1}\eta\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{4}{}^{n+2}c^{n+2}\eta\bar{\lambda}_2 \quad (34)$$

$${}^{n+2}a = {}^na + {}^{n+1}c^{n+1}\eta\bar{\lambda}_1 \quad (35)$$

$${}^{n+1}\bar{\epsilon}^p = {}^n\bar{\epsilon}^p + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}{}^{n+1}\bar{\phi}\bar{\lambda}_1 - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}{}^{n+2}\bar{\phi}\bar{\lambda}_2 \quad (36)$$

$${}^{n+2}\bar{\epsilon}^p = {}^n\bar{\epsilon}^p + \sqrt{\frac{2}{3}}{}^{n+1}\bar{\phi}\bar{\lambda}_1 \quad (37)$$

여기서,

$$\bar{\lambda}_1 \equiv {}^{n+2}\lambda - {}^n\lambda \quad (38)$$

$$\bar{\lambda}_2 \equiv 3({}^{n+2}\lambda - {}^{n+1}\lambda) - ({}^{n+1}\lambda - {}^n\lambda) \quad (39)$$

또한,  $n+1$ 과  $n+2$ 에서의 응력은 다음과 같다.

$${}^{n+1}\sigma = {}^{n+1}D({}^{n+1}\epsilon^{ep} - {}^{n+1}\epsilon^p) \quad (40)$$

$${}^{n+2}\sigma = {}^{n+2}D({}^{n+2}\epsilon^{ep} - {}^{n+2}\epsilon^p) \quad (41)$$

따라서 식(40), (41)에 식(32), (33)의 식을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\sigma &= {}^{n+1}D({}^{n+1}\epsilon^{ep} - {}^n\epsilon^p) - \frac{3}{4}{}^{n+1}DP^{n+1}\eta\bar{\lambda}_1 \\ &+ \frac{1}{4}{}^{n+1}DP^{n+2}\eta\bar{\lambda}_2 \end{aligned} \quad (42)$$

$${}^{n+2}\sigma = {}^{n+2}D({}^{n+2}\epsilon^{ep} - {}^n\epsilon^p) - {}^{n+2}DP^{n+1}\eta\bar{\lambda}_1 \quad (43)$$

이때 탄성추정자를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$${}^{n+1}\sigma^E \equiv {}^{n+1}D({}^{n+1}\epsilon^{ep} - {}^n\epsilon^p) \quad (44)$$

$${}^{n+2}\sigma^E \equiv {}^{n+2}D({}^{n+2}\epsilon^{ep} - {}^n\epsilon^p) \quad (45)$$

$${}^{n+1}\eta^E \equiv {}^{n+1}\sigma^E - {}^na \quad (46)$$

$${}^{n+2}\eta^E \equiv {}^{n+2}\sigma^E - {}^na \quad (47)$$

식(14), (34), (35), (42), (43)들을 이용하여  $\eta$ 와  $\eta^E$  간의 관계식을 구하면 다음과 같다.

$$\Xi_1{}^{n+1}\eta - \Xi_2{}^{n+2}\eta = {}^{n+1}\eta^E \quad (48)$$

$$\Xi_3{}^{n+1}\eta + I^{n+2}\eta = {}^{n+2}\eta^E \quad (49)$$

여기서, 식(48), (49) 좌변의 계수들은 다음과 같이 정의된다.

$$\Xi_1 = I + \frac{3}{4}\bar{\lambda}_1({}^{n+1}cI + {}^{n+1}DP) \quad (50)$$

$$\Xi_2 = \frac{1}{4}\bar{\lambda}_2({}^{n+2}cI + {}^{n+1}DP) \quad (51)$$

$$\Xi_3 = \bar{\lambda}_1({}^{n+1}cI + {}^{n+2}DP) \quad (52)$$

그런데 등방성 탄성체를 가정하면 탄성응력-변형률 관계 행렬은 다음과 같다.

$$D = 2G \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (53)$$

식(7)과 식(53)의 형태로부터 다음의 관계

$$P = QA^pQ^t \quad (54)$$

$$D = QA^DQ^t \quad (55)$$

를 동시에 만족시키는 회전변환 행렬  $Q$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$Q = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

이때의  $Q$ 는  $P$ 와  $D$  공통의 고유벡터들로 구성된 고유행렬(eigen matrix)이고 그때의 고유치들로 구성된 대각행렬들은 다음과 같다.

$$\Lambda^P \equiv \text{Diag}[0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2] \quad (57)$$

$$\Lambda^D \equiv \text{Diag}[3K \ 2G \ 2G \ G \ G \ G] \quad (58)$$

따라서 이들의 관계를 식(50)~(52)에 적용하면 다음과 같다.

$$\Xi_i = QA^{\Xi_i}Q^t \quad (i=1-3) \quad (59)$$

여기서, 각 대각행렬들은 다음과 같다.

$$\bar{\Lambda}^{\bar{1}} = I + \frac{3}{4} \bar{\lambda}_1 ({}^{n+1}cI + {}^{n+1}\Lambda^D \Lambda^P) \quad (60)$$

$$\bar{\Lambda}^{\bar{2}} = \frac{1}{4} \bar{\lambda}_2 ({}^{n+2}cI + {}^{n+1}\Lambda^D \Lambda^P) \quad (61)$$

$$\bar{\Lambda}^{\bar{3}} = \bar{\lambda}_1 ({}^{n+1}cI + {}^{n+2}\Lambda^D \Lambda^P) \quad (62)$$

또한  $\eta$ 를 고유벡터들의 방향으로 회전시킨 벡터  $\xi$ 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\xi \equiv Q' \eta \quad (63)$$

따라서, 이상의 관계를 식(48,49)에 대입하고 이들을  ${}^{n+1}\xi$ 과  ${}^{n+2}\xi$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$${}^{n+1}\xi = [\bar{\Lambda}^{\bar{1}} + \bar{\Lambda}^{\bar{2}} \bar{\Lambda}^{\bar{3}}]^{-1} ({}^{n+1}\xi^E + \bar{\Lambda}^{\bar{2}} {}^{n+2}\xi^E) \quad (64)$$

$${}^{n+2}\xi = [\bar{\Lambda}^{\bar{1}} + \bar{\Lambda}^{\bar{2}} \bar{\Lambda}^{\bar{3}}]^{-1} (\bar{\Lambda}^{\bar{1}} {}^{n+2}\xi^E - \bar{\Lambda}^{\bar{3}} {}^{n+1}\xi^E) \quad (65)$$

그런데 식(64), (65)은 미지수  $\bar{\lambda}_1$ 과  $\bar{\lambda}_2$ 를 포함하고 있으므로 이들을 결정하여야 하는데, 이들 미지수는 다음의  $n+1$ 과  $n+2$ 에서의 항복합수를 만족시키도록 함으로써 결정할 수 있다.

$${}^{n+1}\phi = \frac{1}{2} {}^{n+1}\eta' P^{n+1} \eta - \frac{1}{3} {}^{n+1}\bar{\sigma}^2 = 0 \quad (66)$$

$${}^{n+2}\phi = \frac{1}{2} {}^{n+2}\eta' P^{n+2} \eta - \frac{1}{3} {}^{n+2}\bar{\sigma}^2 = 0 \quad (67)$$

여기서,  ${}^{n+1}\eta$ ,  ${}^{n+2}\eta$ ,  ${}^{n+1}\bar{\sigma}$ ,  ${}^{n+2}\bar{\sigma}$ 가 전술한 바와 같이  $\bar{\lambda}_1$ 과  $\bar{\lambda}_2$ 의 함수이므로 (66), (67) 두 식은  $\bar{\lambda}_1$ 과  $\bar{\lambda}_2$ 의 비선형 이원연립방정식이 되고, 따라서 Newton-Raphson법 등을 이용하여  $\bar{\lambda}_1$ 과  $\bar{\lambda}_2$ 를 구하면, (63)~(65)을 이용하여  ${}^{n+1}\eta$ ,  ${}^{n+2}\eta$ 를 구하고, 이들을 식(32)~(37), (40), (41)에 대입하여 최종 상태에서의 소성변형률과 응력상태를 구할 수 있다.

이상의 새로운 알고리즘의 특징은, 소성수정자를 증분과정에서 시간  $t + \Delta t/2$ 와  $t + \Delta t$ 에서 동시에 항복합수를 만족시키는 2차 다항식으로 근사화하여 증분간 비선형적 경로를 따르는 응력증분거동을 비교적 유사하게 기술함으로써, 최종 응력상태의 크기면에서의 오차(radial error)뿐 아니라 방향오차까지도 현저히 줄일 수 있다는 것이다.

#### 4. 알고리즘의 적용

전술한 적분알고리즘을 복합경화(combined hardening) 모델에 대하여 적용하면, 유효 항복응력  $\bar{\sigma}$ 는 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} \equiv \sigma_y + \beta H \bar{\epsilon}^p \quad (68)$$

여기서,  $\beta$ 와  $H$ 는 복합경화모델 가정에 의해 정의

되는 재료상수이다.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}^p} \equiv \beta H \quad (69)$$

$$c \equiv \frac{2}{3} (1 - \beta) H \quad (70)$$

이때  $\beta$ 는 0과 1사이의 상수로서, 전체 경화증 등방경화가 차지하는 비율을 의미한다. 따라서  $\beta$ 가 1인 경우는 등방경화, 0인 경우엔 이등경화가 된다.

식(36), (37)을 식(68)에 대입하면  $n+1$ 과  $n+2$ 에서 유효 항복응력  $\bar{\sigma}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\bar{\sigma} &= ({}^{n+1}\sigma_y + \beta {}^{n+1}H {}^n\bar{\epsilon}^p) \\ &+ \beta {}^{n+1}H \left[ \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\lambda}_1 {}^{n+1}\bar{\phi} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\lambda}_2 {}^{n+2}\bar{\phi} \right] \end{aligned} \quad (71)$$

$${}^{n+2}\bar{\sigma} = ({}^{n+2}\sigma_y + \beta {}^{n+2}H {}^n\bar{\epsilon}^p) + \beta {}^{n+2}H \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\lambda}_1 {}^{n+1}\bar{\phi} \quad (72)$$

이상의 식들을 식(66), (67)에 대입하면 다음과 같이  $\bar{\lambda}_1$ 과  $\bar{\lambda}_2$ 의 연립방정식이 얻어진다.

$${}^{n+1}\phi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) = 0 \quad (73)$$

$${}^{n+2}\phi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) = 0 \quad (74)$$

식(73), (74)의 연립방정식으로부터  $\bar{\lambda}_1$ 과  $\bar{\lambda}_2$ 를 구하기 위하여 Newton-Raphson 반복법을 이용하면 다음과 같다.

$$[K^{(i-1)}] \{\Delta \lambda^{(i)}\} = \{-\phi^{(i-1)}\} \quad (75)$$

$$\bar{\lambda}_1^{(i)} = \bar{\lambda}_1^{(i-1)} + \Delta \bar{\lambda}_1^{(i)} \quad (76)$$

$$\bar{\lambda}_2^{(i)} = \bar{\lambda}_2^{(i-1)} + \Delta \bar{\lambda}_2^{(i)} \quad (77)$$

이때의 각 행렬과 벡터들은 다음과 같다.

$$[K^{(i-1)}] = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial {}^{n+1}\phi}{\partial \bar{\lambda}_1} \right)^{(i-1)} & \left( \frac{\partial {}^{n+1}\phi}{\partial \bar{\lambda}_2} \right)^{(i-1)} \\ \left( \frac{\partial {}^{n+2}\phi}{\partial \bar{\lambda}_1} \right)^{(i-1)} & \left( \frac{\partial {}^{n+2}\phi}{\partial \bar{\lambda}_2} \right)^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\{\Delta \lambda^{(i)}\}^t = \{\Delta \bar{\lambda}_1^{(i)}, \Delta \bar{\lambda}_2^{(i)}\} \quad (79)$$

$$\{-\phi^{(i-1)}\}^t = \{-{}^{n+1}\phi^{(i-1)}, -{}^{n+2}\phi^{(i-1)}\} \quad (80)$$

그런데 이상의 알고리즘은 증분과정을 2차 다항식으로 근사화하므로 증분과정이 탄성역과 소성역이 복합적으로 구성되어있는 경우, 이 두 영역을 한 식으로 근사화시키는 것은 문제가 있다. 따라서 초기의 탄성역은 분리를 하여야 하는데, 이 경우 소성관련 변수들의 변화는 없으므로 다음과 같이 단순한 방법으로 구할 수 있다. 즉,  $r$ 이 0에서 1

까지의 상수이고,  $t+r\Delta t$ 에서 탄성역과 소성역이 경계를 이룬다면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$${}^{n+r}\sigma = {}^{n+r}D({}^{n+r}\epsilon - {}^{n+r}\epsilon^{th} - {}^n\epsilon^p) \quad (81)$$

$${}^{n+r}a = {}^na \quad (82)$$

$${}^{n+r}\bar{\epsilon}^p = {}^n\bar{\epsilon}^p \quad (83)$$

이들 세 식을 (21)과 (68)에 대입하면 다음과 같은 오차함수를 얻을 수 있다.

$$E(r) = \frac{3}{2} {}^{n+r}\bar{\phi}^2 - {}^{n+r}\bar{\sigma}^2 \quad (84)$$

Fig. 2는 탄성역과 소성역이 복합된 경우의 전형적인 오차함수의 형태인데,  $E(r)$ 이 0이 되는 점이 탄성역과 소성역의 경계에 해당하므로 이때의  $r$ 를 구해야 한다. 그 방법으로는 단순한 선형보간법(secant method)을 이용함으로써 쉽게 구할 수 있다.

### 5. 오차의 처리 — 등오차선도

이상에서 기술한 새로운 구성방정식 적분알고리즘의 정확성을 기존의 방법들과 비교하기 위하여, 몇가지 수치실험을 수행하여 Krieg, Schreyer 등이 제시한 방법과 마찬가지로 등오차선도(iso-error map)를 구하였다. 본 수치실험에서 사용한 초기조건은 Fig. 3에서 보는 바와 같이 1축 및 2축 인장, 그리고 순수 전단의 조건하에서 최초의 항복이 일어난 상태를 취하였고, 변형률증분은 초기 변형률과의 비를 0에서 5까지  $x, y$  양방향에 대하여 변화시켰으며, 증분 초기 및 끝에서의 온도는 각각 250°C와 350°C를 가정하였다.

사용된 재료의 성질은 현실성을 고려하여 실제 연강의 값들을 취하였는데, 이는 Table 1<sup>(6)</sup>과 같다. Fig. 4에서 6은 Simo의 방법<sup>(6)</sup>과 새로운 알고

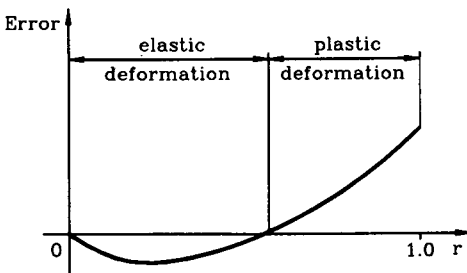


Fig. 2 Schematic diagram of typical error function

리즘을 적용하여, Fig. 3의 세가지 초기상태에 대한 등방경화조건하에서의 결과인데, 이때의 재료상수들은 Table 1의 250°C에서 350°C까지 선형적으로 변화한다고 가정하였다. 이때의 엄밀해는 해석적으로 구할 수 없으므로, Simo의 방법에 충분히 많은 수의 재분할(subdivision)을 적용하여 계산하였고, 이때의 각 오차들은 다음의 식을 이용하여 계산하였다.

Angular error

$$\equiv \cos^{-1} \left[ \frac{(S-a):(S^*-a^*)}{\sqrt{(S-a):(S-a)} \sqrt{(S^*-a^*):(S^*-a^*)}} \right] \quad (85)$$

Radial error

$$\equiv \frac{\sqrt{(S-a):(S-a)} - \sqrt{(S^*-a^*):(S^*-a^*)}}{\sqrt{(S^*-a^*):(S^*-a^*)}} \times 100 \quad (86)$$

Total error

$$\equiv \frac{\sqrt{[(S-a) - (S^*-a^*)][(S-a) - (S^*-a^*)]}}{\sqrt{(S^*-a^*):(S^*-a^*)}} \times 100 \quad (87)$$

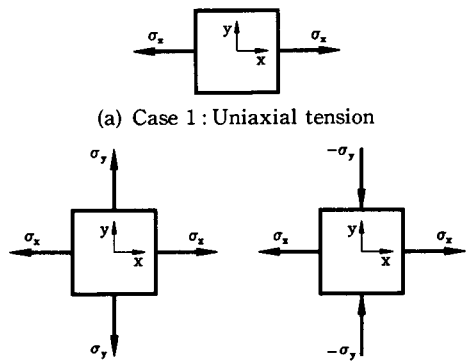


Fig. 3 Initial state of stresses in plane strain condition

Table 1 Material properties of mild steel<sup>(6)</sup>

Temperature	250°C	350°C
Young's modulus (GPa)	200.0	182.5
Plastic modulus (GPa)	22.20	20.25
Poisson ratio	0.34	0.36
Thermal expansion coef.	12.5E-6	13.1E-6
Initial yield stress (MPa)	222.5	188.0
Shear modulus (GPa)	74.6	67.1

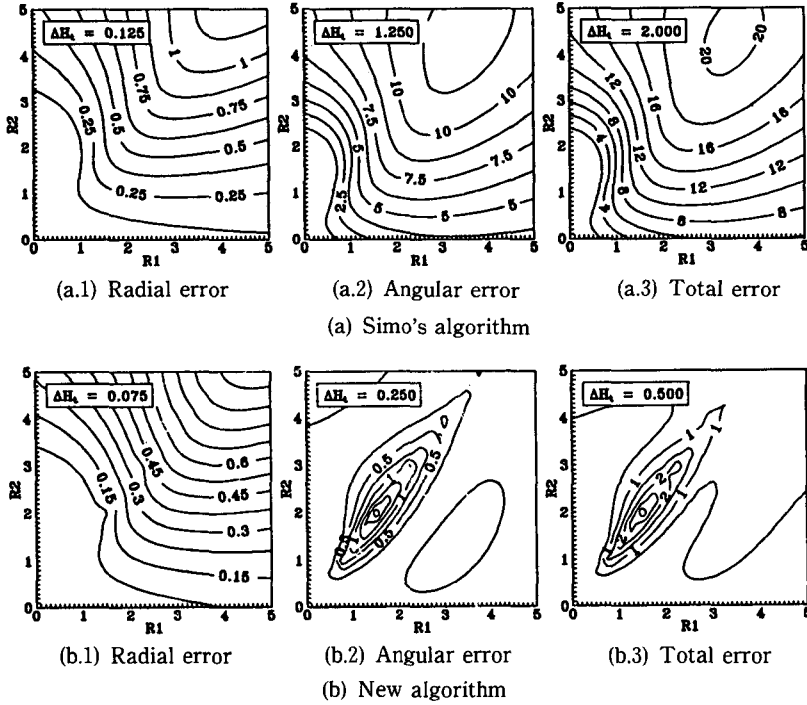


Fig. 4 Iso-error maps of Simo's and new algorithm for initial uniaxial tension case ( $\Delta H_1$ =contour interval)

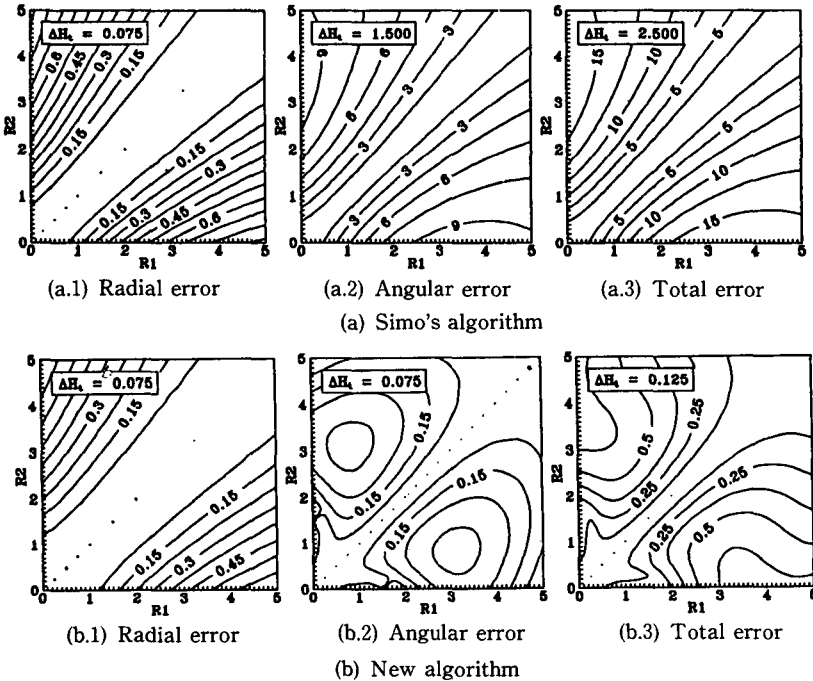


Fig. 5 Iso-error maps of Simo's and new algorithm for initial biaxial tension case ( $\Delta H_1$ =contour interval)

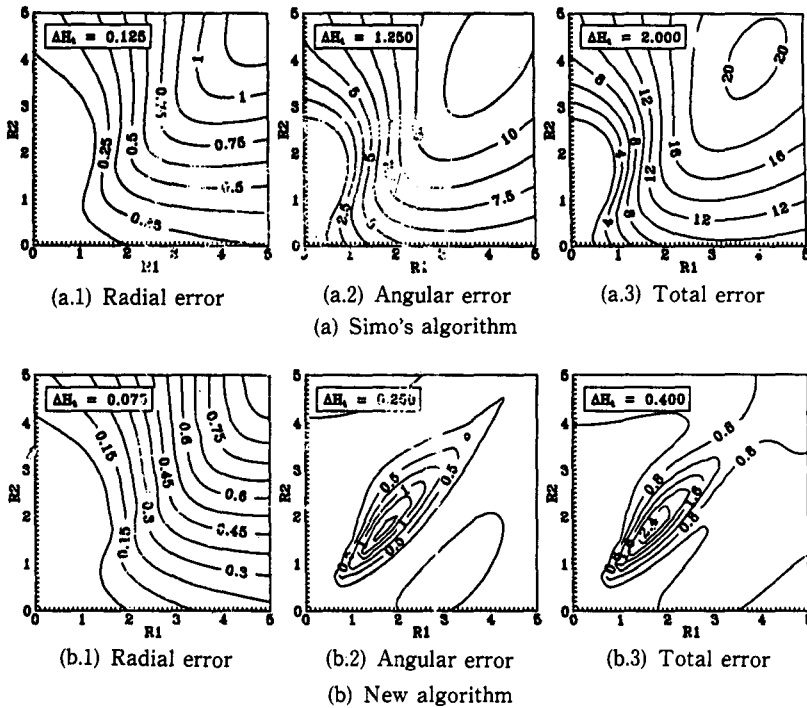


Fig. 6 Iso-error maps of Simo's and new algorithm for initial pure shear case ( $\Delta H_1$ =contour interval)

여기서, (·)는 텐서의 스칼라적(scalar product)을 뜻하며, 우측 상첨자 \*는 엄밀해를 의미한다.

그림에서 R1과 R2는 각각 x축과 y축으로의 변형을 증분과 초기의 항복변형률과의 비를 뜻한다.

결과에서 보는 바와 같이 Simo의 방법은 반경오차(radial error)의 경우 주어진 범위내에서 최대 약 10도의 오차를 보인다. 따라서 총 오차에서는 최대 15에서 20%의 오차를 보인다. 그런데 소성거동은 이전의 거동에 밀접하게 의존(history dependent)하는 성질이 있으므로 방향오차는 계속되는 증분과정에서 그 크기가 누적되어 전혀 예기치 않은 결과를 초래할 수도 있다.

이에 반하여 새로운 알고리즘의 경우는 방향오차 2도 미만, 총 오차 3% 미만으로 매우 정확한 결과를 보인다. 이처럼 새로운 알고리즘이 Simo의 방법에 비해 정확한 결과를 보이는 이유는 시간증분  $\Delta t$ 간의 실제 응력증분 경로와 Simo의 방법 및 새로운 알고리즘의 결과를 파이평면( $\pi$ -plane)에 투영시킨 Fig. 7에서 극명하게 나타난다. 즉, 증분간 실제 응력의 변화는 그림에서 보는 바와 같이 곡선의 경로를 보이는데, Simo의 방법은 이를 직선으로 근사화하는데서 방향오차를 갖게 되는 것이다.

Simo의 방법에 재분할을 적용함으로써 오차의 크기는 줄일 수 있으나, 그 수렴속도는 비교적 느리다. 이에 반하여 새로운 알고리즘은 증분간의 거동을 2차 다항식으로 표현함으로써 재분할없이도 실제의 경로를 비교적 유사하게 근사화할 수 있으므로 방향오차를 현격히 줄일 수 있다.

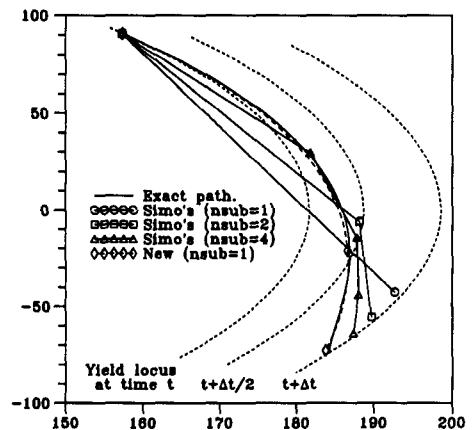


Fig. 7 Comparison of stress increment path between new and Simo's algorithm with some subdivisions



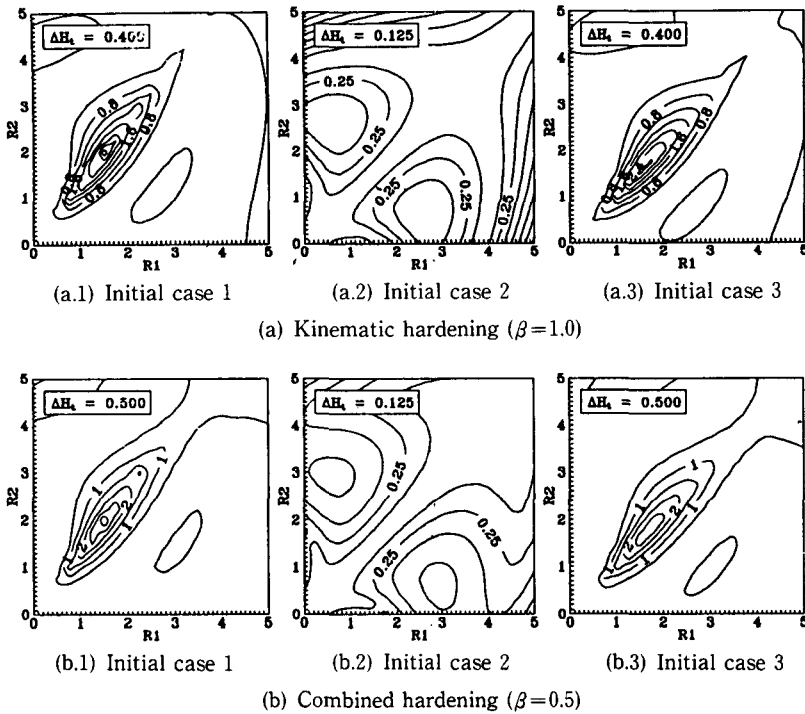


Fig. 8 Total iso-error maps for kinematic and combined hardening ( $\Delta H_1$ =contour interval)

특이한 점은 새로운 알고리즘의 오차분포가 초기 1축 인장의 경우와 순수 전단인 경우 특정한 방향성을 갖는다는 것인데, 이들은 그 증분과정에서 항복면(yield surface)의 접선방향, 즉 중립하중(neutral loading)의 경로를 쫓는 경우로서, 이 같은 현상이 수치적인 오차를 유발시키는 것이다. 초기 2축 인장의 결과가 특이한 분포없이 1% 이하의 오차만을 보이는 것은 등오차선도내에 중립하중경로가 없기 때문이다. 그러나 전반적으로 그 오차의 크기가 비교적 작으므로 수용할 수 있다고 판단된다.

Fig. 8은 이동경화( $\beta=1.0$ )와 복합경화( $\beta=0.5$ )의 조건하에서 구한 등오차선도(iso-error map)인데, 등방경화의 경우와 거의 비슷한 결과를 보인다. 따라서 본 새로운 알고리즘은 등방경화뿐 아니라 이동경화 및 복합경화의 경우에도 적용할 수 있다고 판단된다.

Fig. 9은 기존의 방법과 새로운 알고리즘의 계산 시간 비교를 위하여 비슷한 수준의 정확도를 얻을 수 있도록 Simo의 방법에 재분할을 도입한 것으로, 2축 인장의 초기조건에서 약 30개의 재분할을 사용한 결과를 새로운 알고리즘의 한 단계 결과와

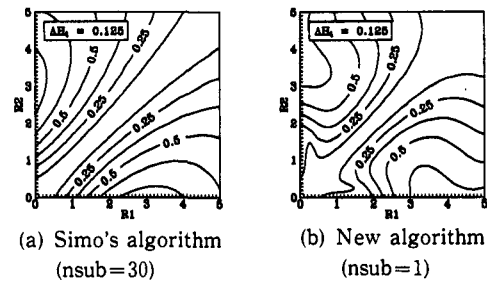


Fig. 9 Comparison of Simo's and new algorithm with subdivisions (nsub=no. of subdivisions,  $\Delta H_1$ =contour interval)

Table 2 Comparison of computing time for iso-error map

Simo's algorithm						New
N=1	N=10	N=20	N=30	N=40	N=50	N=1
2.69	3.58	4.77	5.77	6.76	7.69	3.40

Unit : second

N : Number of subdivisions.

CPU : Intel 80486DX2-66 MHz.

Computing points=441 points.

비교한 것이다.

이 경우 비록 그 형태는 다소간 차이가 있으나 전체적으로 비슷한 오차의 분포를 보이는데, 등오차선도를 구하기 위하여 소요된 계산시간을 몇가지 재분할수에 대해 측정한 결과를 아래 Table 2에 표기하였다.

Table 2의 결과는 계산과정상 필요한 디스크 입출력 시간이 포함되어 있으므로 순수 계산시간만을 측정한 것은 아니지만, 표에서 보는 바와 같이 새로운 알고리즘은 그 정확도를 고려할 때 계산시간 면에서도 비교적 합리적임을 알 수 있다.

## 5. 결 론

이상의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 기존의 증분간 선형 근사화에 의한 적분법은 최종의 응력상태에서 반경오차(radial error)는 작으나 방향오차(angular error)는 무시할 수 없을 만큼 큰 결과를 보였다. 이는 증분간 비선형적 경로를 갖는 응력증분을 선형으로 근사화한데서 비롯되는 것이다.

(2) 이에 반하여 증분간 2차 다항식으로의 근사화를 도입한 새로운 적분알고리즘은 실제의 증분간 경로를 비교적 정확히 기술할 수 있으므로, 반경오차뿐만 아니라 방향오차까지도 정확한 결과를 보였다.

(3) 새로운 알고리즘은 등방경화뿐만 아니라, 이동경화 및 복합경화의 경우에도 역시 정확도를 유지함을 보였다.

(4) 새로운 알고리즘은 중립하중의 경로를 쫓는 경우, 그렇지 않은 경우에 비해 다소 큰 오차를 보이는데, 그 오차의 크기가 3% 미만이므로 기존의 방법에 비하여는 우수한 것으로 판단된다.

(5) 비슷한 수준의 오차분포를 얻을 수 있는 계

산시간의 비교에 있어서도 새로운 알고리즘의 적용은 비교적 합리적임을 알 수 있었다.

## 후 기

본 연구는 대우중공업(주)의 연구비 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Wilkins, M. L., 1964, "Calculation of Elastic-Plastic Flow," *Method of Computational Physics*, Vol. 3(B. Alder et al. Eds.), Academic Press.
- (2) Krieg, R. D. and Krieg, D. B., 1977, "Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model," *ASME J. Pressure Vessel Tech.*, 99, 510~515.
- (3) Schreyer, H. L., Kulak, R. F. and J. M. Kramer, Aug. 1979, "Accurate Numerical Solutions for Elastic Plastic Model," *ASME J. Pressure Vessel Tech.*, 101, 226~234.
- (4) Ortiz, M. and Simo, J. C., 1986, "An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 23, 353~366.
- (5) Simo, J. C. and Taylor, R. L., 1986, "A Return Mapping Algorithm for Plan Stress Elastoplasticity," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 22, 649~670.
- (6) Patel, B., 1985, *Thermo-Elasto-Plastic Finite Element Formulation and Residual Stress Due to Welds*, Ph. D. Thesis, Carleton Univ., Ottawa, Ontario, Canada.