

〈論 文〉

## 반대칭하중을 받는 적층재 중앙균열의 응력세기계수

이강용\* · 박문복\* · 김성호\*\*

(1993년 8월 27일 접수)

### Stress Intensity Factor for Layered Material under Anti-Symmetric Loading

Kang Yong Lee, Moon-Bok Park and Sung-Ho Kim

**Key Words :** Stress Intensity Factor(응력세기계수), Layered Material(적층재료), Center Crack(중앙균열), Integral Equation(적분방정식), Anti-Symmetric Loading(반대칭하중)

#### Abstract

A model is constructed to evaluate the stress intensity factors for a center crack subjected to anti-symmetric loading in a layered material. A Fredholm integral equation is derived using the Fourier integral transform method. The integral equation is numerically analyzed to evaluate the effects of stress intensity factor on the ratios of shear modulus, Poisson's ratio and crack length to layer thickness. In case of the isotropic homogeneous material, the values of stress intensity factor derived in the present study agree with the previous solutions.

#### 1. 서 론

적층재료는 경량화, 고강도, 고강성 등이 요구되는 여러 분야에서 광범위하게 사용되고 있다. 이러한 적층재의 균열면에 작용하는 하중은 대칭하중(symmetric loading)과 반대칭하중(antisymmetric loading)으로 대별할 수 있다.

적층재의 균열면에 대칭하중이 작용하는 경우의 응력세기계수에 관한 연구로서, Hilton과 Sih<sup>(1,2)</sup>는 2개의 반무한체에 접착된 이중탄성층 내부의 중앙균열면에 적층면과 수직 또는 평행한 인장하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Fredholm 적분방정식을 유도하였으며 모드 I 응력세기계수를 산출하였다. Delale과 Erdogan<sup>(3)</sup>은 2개의 반무한체 사이에 접착된 비균질 접합층(nonhomogeneous interlayer)의 중앙균열면에 임의의 인장하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용

하여 Cauchy 특이적분방정식(Cauchy singular integral equation)을 유도하였으며 이로부터 모드 I 응력세기계수를 산출하였다. 김성호<sup>(4,5)</sup> 등은 2개의 반무한체에 접착된 3개의 탄성층 내부 중앙균열면에 인장 및 전단하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Fredholm 적분방정식을 유도하였으며 모드 I, 모드 II 응력세기계수를 산출하였다.

균열면에 반대칭하중이 작용하는 경우의 응력세기계수에 관한 연구로서, Isida<sup>(6,7)</sup>는 무한체 중앙균열면에 대칭 및 반대칭하중을 포함하는 멱급수 인장하중(polynomial tensile loading)이 작용하는 경우에 대하여 각각 Laurent 복소응력장 전개법(Laurent expansions of complex stress potentials)을 이용하여 응력세기계수를 산출하였다. Chen<sup>(8)</sup>은 무한체 중앙균열면에 반대칭 인장하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Abel 적분방정식을 유도하였으며 이로부터 응력세기계수의 엄밀해를 얻었다. Chen과 Chang<sup>(9)</sup>은 무한체 내부에 존재하는 다수의 경사균열(multiple inclined cracks)

\*정회원, 연세대학교 기계공학과

\*\*정회원, 국방과학연구소

면에 역급수 인장 및 전단하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 응력 및 변위성분을 산출하였으며 FEM에 의해 모드 I, 모드 II 응력세기계수를 계산하였다. Buchalet과 Bamford<sup>(10)</sup>는 압력용기 표면 가장자리 균열에 임의의 하중이 작용할 때 FEM에 의하여 응력세기계수를 구하였다. Grandt와 Kullgren<sup>(11)</sup>는 무한체내 구멍에 1/4모서리 균열면에 3차 역급수 하중이 작용할 때 대칭 및 반대칭 부분으로 구분하여 각각에 대하여 응력세기계수를 구한 후 중첩하였다.

그러나, 적층재의 중앙균열면에 반대칭하중이 작용하는 경우에 대한 응력세기계수에 관한 연구는 찾아보기 힘들다. 따라서, 본 연구에서는 이의 일환으로서 2개의 탄성층에 접합된 이중탄성층 내부 중앙균열면에 반대칭하중이 작용하는 경우에 대하여 적분변환법을 이용하여 Fredholm 적분방정식을 유도하고 이로부터 수치해석적인 방법에 의하여 응력세기계수를 산출하고자 한다.

## 2. 본 론

### 2.1 기본방정식

균열모델은 Fig. 1과 같다. 두께  $2h_1$ 의 제1탄성층은 길이  $2a$ 의 균열을 내재하며 두께  $h_2 - h_1$ 을 갖는 제2탄성층과 평행하게 경계를 이룬다. 제1탄성층과 제2탄성층은 완전히 접착되었으며 제1탄성층의 균열면에는 반대칭하중이 작용한다.

선형탄성이론에 의하여 응력과 변위성분은 다음과 같이 Airy 응력함수  $U_j$ 를 Fourier sine 적분변환한 함수  $G_j$ 의 적분형으로 표시된다.<sup>(9,12,13)</sup>

$$\sigma_{xx(j)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\partial^2 G_j}{\partial y^2} \sin \xi x d\xi \quad (1)$$

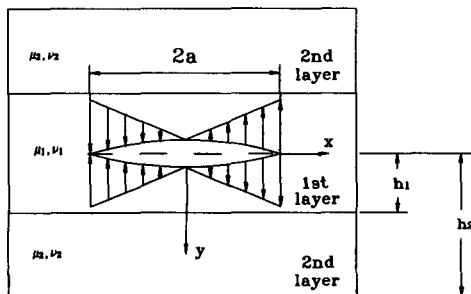


Fig. 1 Geometry and configuration of the model

$$\sigma_{yy(j)} = \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \xi^2 G_j \sin \xi x d\xi \quad (2)$$

$$\sigma_{xy(j)} = \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \xi \frac{\partial G_j}{\partial y} \cos \xi x d\xi \quad (3)$$

$$u_j = \frac{-(1+\nu_j)}{\pi E_j} \int_0^\infty \left[ (1-\nu_j) \frac{\partial^2 G_j}{\partial y^2} + \nu_j \xi^2 G_j \right] \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi \quad (4)$$

$$v_j = \frac{+(1+\nu_j)}{\pi E_j} i \int_0^\infty \left[ (1-\nu_j) \frac{\partial^2 G_j}{\partial y^2} - (2-\nu_j) \xi^2 \frac{\partial G_j}{\partial y} \right] \frac{\sin \xi x}{\xi^2} d\xi \quad (5)$$

여기서,

$$G_j(\xi, y) = (A_j + B_j \xi y) \cosh(\xi y) + (C_j + D_j \xi y) \sinh(\xi y) \quad (6)$$

$j=1$ 은 제1탄성층,  $j=2$ 는 제2탄성층을 뜻하며  $\sigma_{xx(j)}$ ,  $\sigma_{yy(j)}$ ,  $\sigma_{xy(j)}$ 와  $u_j$ ,  $v_j$ 는 각각 응력과 변위성분이고  $E_j$ 는 탄성계수,  $\nu_j$ 는 푸아송비,  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $D_j$ 는 결정해야 할 미지수이다.

### 2.2 경계조건

Fig. 1의 직교좌표계에서 경계조건은 다음과 같다.

$$\sigma_{yy(1)} = -g(x) \quad |x| \leq a, \quad y=0 \quad (7)$$

$$v_1 = 0 \quad |x| > a, \quad y=0 \quad (8)$$

$$\sigma_{xy(1)} = 0 \quad |x| < \infty, \quad y=0 \quad (9)$$

$$\sigma_{yy(1)} = \sigma_{yy(2)} \quad |x| < \infty, \quad y=h_1 \quad (10)$$

$$\sigma_{xy(1)} = \sigma_{xy(2)} \quad |x| < \infty, \quad y=h_1 \quad (11)$$

$$u_1 = u_2 \quad |x| > \infty, \quad y=h_1 \quad (12)$$

$$v_1 = v_2 \quad |x| > \infty, \quad y=h_1 \quad (13)$$

$$\sigma_{yy(2)} = 0 \quad |x| < \infty, \quad y=h_2 \quad (14)$$

$$\sigma_{xy(2)} = 0 \quad |x| < \infty, \quad y=h_2 \quad (15)$$

여기서,  $g(x)$ 는 균열면에 작용하는 반대칭응력이다. 식(7)~(15)의 경계조건과 식(1)~(6)으로부터 다음과 같은 두개의 적분방정식(dual integral equations)을 구할 수 있다.

$$\int_0^\infty \xi F(\xi) M(\xi) \sin \xi x d\xi = -\pi g(x) \quad |x| \leq a \quad (16)$$

$$\int_0^\infty M(\xi) \sin \xi x d\xi = 0 \quad |x| > a \quad (17)$$

여기서,  $F(\xi)$ 와  $M(\xi)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$F(\xi) \equiv \xi A_1 / M(\xi) \quad (18)$$

$$M(\xi) \equiv \xi B_1 \quad (19)$$

여기서,

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \frac{M(\xi)}{\xi} Q \begin{bmatrix} Thz_1 - z_1 \\ -z_1 Thz_1 \\ -(Thz_1(1-2\nu_1) + z_1) \\ z_1 Thz_1 - 2(1-\nu_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = C_1 \quad (20)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & z_1 Thz_1 & -1 & -z_1 & -Thz_1 & -z_1 Thz_1 \\ Thz_1 & Thz_1 + z_1 & -Thz_1 & -z_1 Thz_1 - 1 & -1 & -Thz_1 - z_1 \\ 1 & z_1 Thz_1 + 2(1-\nu_1) & -\Gamma & \Gamma[2(\nu_2-1)Thz_1 - z_1] & -\Gamma Thz_1 & -\Gamma[2(1-\nu_2) + z_1 Thz_1] \\ -Thz_1 & Thz_1(1-2\nu_1) - z_1 & \Gamma Thz_1 & \Gamma[(-1+\nu_2) + z_1 Thz_1] & \Gamma & \Gamma[(2\nu_2-1)Thz_1 + z_1] \\ 0 & 0 & 1 & z_2 & Thz_2 & z_2 Thz_2 \\ 0 & 0 & Thz_2 & z_2 Thz_2 + 1 & 1 & Thz_2 + z_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} z_1 &\equiv \xi h_1, \quad z_2 \equiv \xi h_2, \quad Thz_1 \equiv \tanh(z_1), \\ Thz_2 &\equiv \tanh(z_2), \quad \Gamma \equiv \mu_1/\mu_2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$K(\tau, \sigma) \equiv \sqrt{\tau\sigma} \int_0^\infty a[F(a)-1]J_1(a\tau)J_1(a\sigma)da \quad (28)$$

여기서,  $\mu_1$ 와  $\mu_2$ 는 각각 제1탄성층, 제2탄성층의 전단 탄성계수이다.

2.3 Fredholm 적분방정식

$M(\xi)$ 를 다음과 같이 가정한다. (14)

$$M(\xi) = \int_0^a \phi(t)J_1(\xi t)dt \quad (24)$$

여기서,  $J_1(\xi t)$ 는 제1종 1차 Bessel함수이며  $\phi(t)$ 는 결정될 함수이다.

식(24)는 식(17)을 자동적으로 만족하며 식(24)를 식(16)에 적용하면 다음의 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(s) + s \int_0^a \phi(t) \int_0^\infty \xi[F(\xi)-1]J_1(\xi t)J_1(\xi s)d\xi dt \\ = -2s \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{g(x)xdx}{\sqrt{s^2-x^2}} \end{aligned} \quad (25)$$

$g(x) \equiv p_1 x/a$ 일 때 다음과 같은 무차원변수를 정의한다.

$$\begin{aligned} \chi &\equiv x/a, \quad \sigma \equiv s/a, \quad \tau \equiv t/a, \quad \alpha \equiv \xi a, \\ \Phi(\sigma) &\equiv \pi \phi(s)/p_1 a \sqrt{\sigma} \end{aligned} \quad (26)$$

식(26)을 식(25)에 대입하면 아래와 같은 제2종 Fredholm 적분방정식(Fredholm integral equation of a second kind)이 된다.

$$\Phi(\sigma) + \int_0^1 \Phi(\tau)K(\tau, \sigma)d\tau = \sigma \frac{\sqrt{\sigma}}{2} \quad (27)$$

여기서,

2.4 수치해석 절차

식(27)에 Gaussian-Laguerre 적분법을 사용하였는데 이는 Simpson적분법에 비하여 작은 적분점 갯수로 수렴가능하므로 효과적인 수치해석이며 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_n) + \sum_{m=1}^{N_G} \Phi(\tau_m)K(\tau_m, \sigma_n)W(\tau_m) \\ = \sigma_n \sqrt{\sigma_n}/2, \quad (n=1, \dots, N_G) \end{aligned} \quad (29)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K(\tau_m, \sigma_n) &\equiv \sqrt{\tau_m \sigma_n} \sum_{k=1}^{N_L} a_k [F(a_k)-1] \\ &J_1(a_k \tau_m)J_1(a_k \sigma_n)W(a_k) \end{aligned} \quad (30)$$

$N_G$ 는 Gaussian적분점 개수,  $N_L$ 는 Laguerre적분점 개수,  $W(\tau)$ 는 Gaussian적분 Weight함수,  $W(a)$ 는 Laguerre적분 Weight함수이며, 본 연구에서 수렴성을 검토한 후 수치해석에 사용된 적분점 갯수는  $N_G=110$ ,  $N_L=30$ 이다.

식(29)를 정방행렬로 만들기 위하여 적분점(integration point)인  $\tau_m$ 과 병치점(collocation)인  $\sigma_n$ 을  $\tau_n = \sigma_n (n=1, \dots, N_G)$ 으로 하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N_G} [\delta_{mn} + K(\tau_m, \tau_n)W(\tau_m)]\Phi(\tau_n) \\ = \tau_n \sqrt{\tau_n}/2, \quad (n=1, \dots, N_G) \end{aligned} \quad (31)$$

여기서,  $\delta_{mn}$ 는 Kronecker Delta이다.

따라서 식(31)에서  $\Phi(\tau_m)$ 을 수치해석적으로 산출할 수 있으며 식(20)~(22)에 의하여 미지수  $A_j, B_j, C_j, D_j$ 를 각각 구할 수 있다.

2.5 응력세기계수

균열우측 선단의 응력세기계수  $K_{IR}$ 은 다음식에 의하여 구하여진다.<sup>(12)</sup>

$$K_{IR} = \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2(x-a)} \pi \sigma_{yy(1)}(x, 0) \quad (32)$$

식(6), 식(26)을 식(2)에 대입하면 식(32)는 아래와 같이 된다.

$$K_{IR} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2a(x-1)} \pi \left[ \frac{-1}{\pi a^3} \int_0^\infty A_1(\alpha) \alpha^2 \sin \alpha x d\alpha \right] \quad (33)$$

식(24)를 식(20)에 대입하면  $A_1(\alpha)$ 는 다음과 같게 된다.

$$A_1(\alpha) = \frac{F(\alpha) p_1 \alpha^2}{\alpha} \int_0^1 \sqrt{\tau} \Phi(\tau) J_1(\alpha \tau) d\tau \quad (34)$$

식(34)를 부분적분한 후 식(33)에 대입하면 아래와 같다.

$$K_{IR} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2a\pi} \sqrt{x-1} p_1 \left[ \frac{\Phi(1)}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} + \int_0^1 \left\{ \frac{d}{d\tau} \left[ \sqrt{\tau} \Phi(\tau) \int_0^\infty [F(\alpha) - 1] J_0(\alpha) \sin \alpha x d\alpha + \frac{1}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \right] d\tau \right\} \right] \quad (35)$$

식(35)에서 우변의 2번째 항은 특이성(singularity)을 포함하지 않으므로 균열우측 선단에서 응력세기계수는 다음과 같다.

$$K_{IR} = \Phi(1) p_1 \sqrt{\pi a} \quad (36)$$

이와 유사한 방법으로 균열좌측의 응력세기계수  $K_{IL}$ 을 산출한 결과는 다음과 같다.

$$K_{IL} = -\Phi(1) p_1 \sqrt{\pi a} \quad (37)$$

여기에서, 함수  $\Phi(1)$ 은 재료물성  $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$  및 기하학적 변수  $h_1, h_2, a$ 에 의해 결정되는 형상계수이다.

3. 수치해석 및 고찰

3.1 균질재료의 경우 ( $\mu_1/\mu_2=1.0, \nu_1=\nu_2$ )

균질재료인 경우, 균열길이 대 제2탄성층의 두께

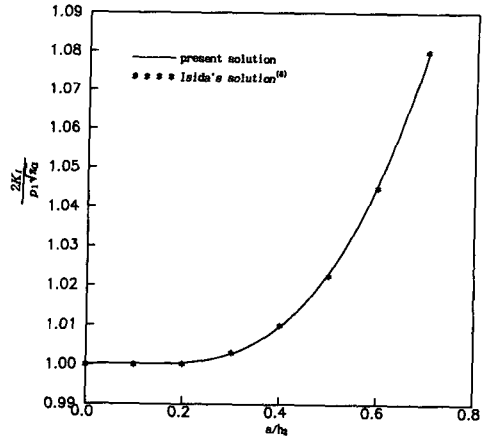


Fig. 2 Comparison of the present numerical results with the previous solutions<sup>(6)</sup>

비 ( $a/h_2$ )만이 응력세기계수에 영향을 준다. Fig. 2는 무차원 응력세기계수를  $a/h_2$ 의 함수로 산출한 것으로서 Isida<sup>(6)</sup>의 결과와 오차 0.2%내에서 일치한다. 특히, 제2탄성층이 무한히 두꺼운 경우,  $F(\alpha) = 1.0$ 이므로 식(28)에서  $K(\tau, \sigma) = 0$ 가 되어  $\Phi(\sigma) = \sigma\sqrt{\sigma}/2$ 가 된다. 따라서 식(36)과 식(37)에 의하여 균열좌우측 선단의 응력세기계수는 아래와 같이 되며 이는 Isida<sup>(7)</sup>의 결과와 일치한다.

$$K_{IR} = p_1 \sqrt{\pi a} / 2 \quad (38)$$

$$K_{IL} = -p_1 \sqrt{\pi a} / 2 \quad (39)$$

3.2 이종재료의 경우 ( $\mu_1/\mu_2 \neq 1.0, \nu_1 \neq \nu_2$ )

제2탄성층의 물성치가 제1탄성층과 다른 경우,

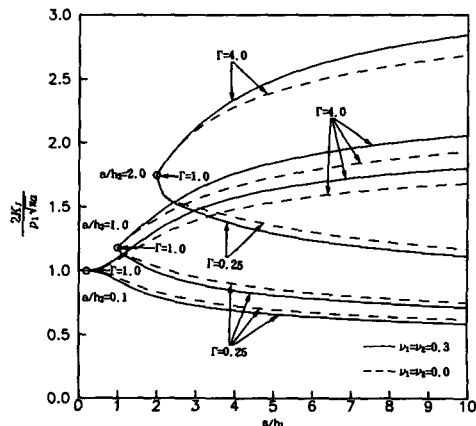


Fig. 3 Dimensionless stress intensity factor as a function of  $a/h_1$

무차원 응력세기계수는  $a/h_1$ ,  $a/h_2$ ,  $\Gamma$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ 에 영향을 받는다. Fig. 3에서  $a/h_2$ 가 일정한 경우, 균열우측 선단의 무차원 응력세기계수를 산출한 결과로서 제1탄성층이 제2탄성층에 비하여 전단탄성계수가 큰 경우( $\Gamma > 1.0$ )에는  $a/h_1$ 이 증가함에 따라 무차원 응력세기계수는 증가한다는 것을 알 수 있다. 이와 반대로 제1탄성층이 제2탄성층에 비하여 전단탄성계수가 작은 경우( $\Gamma < 1.0$ )에  $a/h_1$ 이 증가함에 따라 무차원 응력세기계수는 감소한다. Fig. 4에서  $a/h_1$ 이 일정한 경우, 균열우측 선단의 무차원 응력세기계수를 나타낸 것으로서  $a/h_2$ 가 증가함에 따라 무차원 응력세기계수는 증가한다는 것을 알 수 있다. 특히,  $\Gamma = 1.0$ 일 때에는 단일재료의 경우가 되며 무차원 응력세기계수는  $Isida^{(7)}$

의 결과와 일치하며  $\Gamma > 1.0$ 이면 무차원 응력세기계수는 균질재료의 경우보다 크고  $\Gamma < 1.0$ 이면 그와 반대이다는 것을 알 수 있다. 제1탄성층과 제2탄성층의 푸아송비는  $a/h_1$ 이 클수록 더 큰 영향을 준다는 것도 알 수 있다. 이는 Keer와 Guo<sup>(15)</sup>의 연구 경향과 일치한다. Fig. 5는 제1탄성층과 제2탄성층의 푸아송비의 영향을 분석하기 위한 것으로 제1탄성층이 얇은 경우, 푸아송비는 무차원 응력세기계수에 영향을 줌을 알 수 있다.

### 4. 결 론

이종재료 적층재내부 중앙균열면에 반대칭하중이 작용하는 모델에 대하여 파괴역학적 해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 적분변환법을 사용하여 제2종 Fredholm 적분방정식을 유도하였으며 수치해석적 방법에 의해 응력세기계수를 산출하였다.

(2) 균질재료의 경우 산출된 응력세기계수는 기존결과와 일치하였다.

(3) 제1탄성층의 두께가 일정한 경우, 제1탄성층이 제2탄성층에 비하여 전단탄성계수가 크면 무차원 응력세기계수는 균질재료의 경우보다 크다. 이와 반대로 제1탄성층이 제2탄성층에 비하여 전단탄성계수가 작으면 무차원 응력세기계수는 균질재료의 경우보다 작다.

(4) 제1탄성층과 제2탄성층의 두께의 합이 일정한 경우, 제1탄성층이 제2탄성층에 비하여 전단탄성계수가 크면 무차원 응력세기계수는 제1탄성층의 두께가 감소함에 따라 증가한다. 이와 반대로 제1탄성층이 제2탄성층에 비하여 전단탄성계수가 작으면 무차원 응력세기계수는 제1탄성층의 두께가 감소함에 따라 감소한다.

(5) 제1탄성층과 제2탄성층의 푸아송비는 제1탄성층이 얇아질수록 무차원 응력세기계수에 더 큰 영향을 준다.

### 참고문헌

(1) Hilton, P. D. and Sih, G. C., 1970, "A Sandwiched Layer of Dissimilar Material Weakened by Crack Like Imperfections," *Proceedings of the Fifth South-Eastern Conference on the Theoretical and Applied Mechanics*, Edited by G. L.,

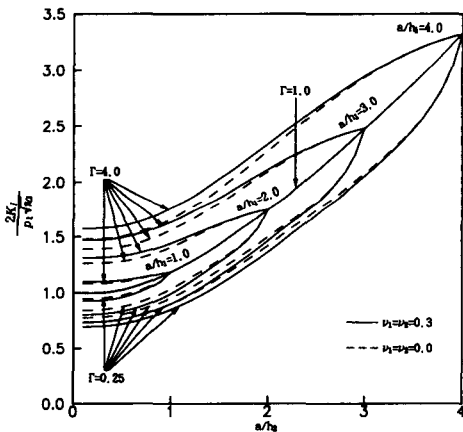


Fig. 4 Dimensionless stress intensity factor as a function of  $a/h_2$

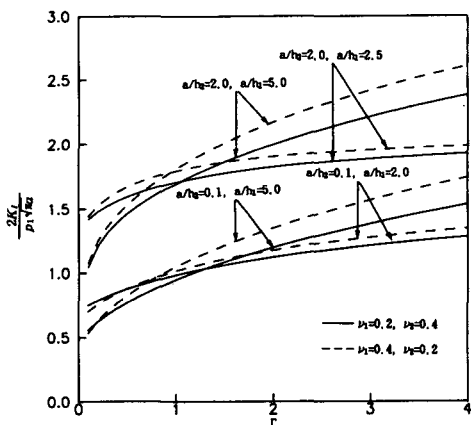


Fig. 5 Dimensionless stress intensity factor as a function of  $\Gamma$

- Rogers, S. C. Kranc and E.G.Henneke, Vol. 5, pp. 123~149.
- (2) Hilton, P. D. and Sih, G. C., 1970, "A Laminated Composite with a Crack Normal to the Interface," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 7, pp. 913~930.
- (3) Delale, F. and Erdogan, F., 1988, "On the Mechanical Modeling of the Interfacial Region in Bonded Half-Planes," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 317~324.
- (4) 김성호, 오재협, 용장우, 1991, "단순인장 하중을 받는 복합적층재의 응력확대계수," 대한기계학회, 제15권 제5호, pp. 1611~1619.
- (5) 김성호, 오재협, 용장우, 1992, "전단하중 하중을 받는 복합적층재의 응력확대계수," 대한기계학회, 제16권 제5호, pp. 838~848.
- (6) Isida, M., 1971, "Effect of Width and Length on Stress Intensity Factors of Internally Cracked Plates under Various Boundary Conditions," *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 17, pp. 301~316.
- (7) Isida, M., 1976, "Elastic Analysis of Cracks and Stress Intensity Factors," (in Japanese), *Fracture Mechanics and Strength of Materials 2*, Baifuukan, p. 128.
- (8) Chen, Y. Z., 1989, "Crack Problem in Plane Elasticity under Antisymmetric Loading," *International Journal of Fracture*, Vol. 41, pp. R29~R34.
- (9) Chen, W. H. and Chang, C. S., 1989, "Analysis of Two Dimensional Fracture Problems with Multiple Cracks under Mixed Boundary Conditions," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 34, No. 4, pp. 921~934.
- (10) Buchalet, C. B. and Bamford, W. H., 1976, "Stress Intensity Factor Solutions for Continuous Surface Flaws in Reactor Pressure Vessels," *Mechanics of Crack Growth, ASTM STP 590*, pp. 385~402.
- (11) Grandt, A. F. and Kullgren, T. E., 1981, "Stress Intensity Factors for Corner Cracked Holes under General Loading Conditions," *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 103, pp. 171~176.
- (12) Sneddon, I. N. and Lowengrub, M., 1969, *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, John Wiley and Sons Inc., U.S.A.
- (13) Sneddon, I. N., 1975, *Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity*, Springer, Wien.
- (14) Copson, E. T., 1961, "On Certain Dual Integral Equations," *Proceeding of Glasgow Mathematical Association*, Vol. 5, pp. 19~24.
- (15) Keer, L. M. and Guo, Quanxin., 1990, "Stress Analysis for Symmetrically Loaded Bonded Layers," *International Journal of Fracture*, Vol. 43, pp. 69~81.