

〈論 文〉

균질화기법을 이용한 복합재료의 등가 열전도계수의 계산

이진희* · 이봉래*

(1993년 7월 20일 접수)

Determination of Equivalent Thermal Conductivities of Composite Materials Using Homogenization Technique

Jinhee Lee and Bong-Rae Lee

Key Words : Composite Material(복합재료), Equivalent Thermal Conductivity(등가 열전도계수), Homogenization Technique(균질화기법), Microscale Expansion(미세좌표계 확장)

Abstract

A solution of heat transfer problems of composite materials has been tried using homogenization technique. Homogenization technique, which was derived by applying asymptotic expansion to the standard finite element method, helped compute the equivalent thermal conductivity matrices of base cells which constituted the composite material with repeated patterns. The homogenization technique made it possible to compute the solution of the heat transfer problem of composite materials with lower degrees of freedom compared to those of other numerical methods. The equivalent thermal conductivities computed by homogenization technique are also applicable to other numerical methods such as finite difference method.

기 호 설 명

- C^H : 균질화된 열용량
- k_A : 물질 A의 열전도계수 행렬
- $(k_A)_{ij}$: 물질 A의 열전도계수 행렬요소
- k_{ij} : 열전도계수 행렬요소
- k^H : 균질화된 열전도계수 행렬
- \dot{q}^H : 균질화된 열발생량
- T : 온도
- T_o : Macroscale 온도
- T_1 : Microscale 온도
- v : 비중합수
- v_o : Macroscale 비중합수
- v_1 : Microscale 비중합수
- x_i, \underline{x} : Macroscale 좌표계
- y_i, \underline{y} : Microscale 좌표계

- Y : 단위구조물의 크기
- χ_i : Microscale 변수

1. 서 론

복합재료에서의 경계치문제는 엄밀해를 구하기가 어렵고 수치해석을 통하여 얻을 수 있는 근사해도 복합재료를 구성하고 있는 각각의 요소들의 특성을 고려하기 위해서는 매우 많은 자유도를 요구하게 된다. 이러한 문제의 해결을 위한 대표적인 접근방법의 하나로 복합재료를 대표하는 등가의 물성치를 산출하고, 이 균질화된 물성치를 사용하여 단순화된 경계치문제의 해를 해석적 또는 수치적 방법을 통하여 구하는 방식을 들 수가 있다. Hashin⁽¹⁾은 복합재료의 탄성계수, 열팽창계수, 열전도계수 등 다양한 등가 물성치를 산출하는 방법으로 Varia-

*정회원, 홍익대학교 기계설계학과

tional bounding method 등의 소개와 함께 여러 연구자들의 결과를 비교하고 있는데, 예시된 방법들은 CSA(composite sphere assemblage)나 CCA(composite cylinder assemblage)처럼 복합재료를 이루는 각 요소들의 기하학적 구성이 비교적 간단한 경우외에는 적용이 어렵다는 단점을 갖고 있다. Sanchez de Palencia⁽²⁾는 복합재료의 동적해석을 위하여 asymptotic expansion을 이용하여 균질화된 등가 탄성계수를 산출하였고, Guedes⁽³⁾는 유한요소법에 균질화기법을 도입하여 복합재료의 응력 해석문제에 대한 해석을 시도하였다. 본 연구에서는 복합재료에서의 열전달해석에서 복합재료를 이루는 각 요소들의 기하학적 구성이 복잡하여 기존의 방법을 적용하기가 곤란한 경우 Guedes가 제시한 균질화기법의 유사성을 이용하여 등가 열전도계수를 산출함으로써 수치해석에 필요한 자유도를 현저히 줄이면서 적절한 근사해를 얻을 수 있는 방법을 제시하고자 한다. Kikuchi⁽⁴⁾는 전도 열전달에서의 열전달률을

$$q_i = -k_{ij}T_{,j} \quad (1)$$

로 표현하였는데, 일반적인 등방성 매질에서 열전도계수 k_{ij} 는 $k\delta_{ij}$ 로 표현된다. 복합재료의 열전달 해석에 균질화기법을 적용하기 위해서는 먼저 복합재료를 구성하고 있는 각 요소들의 기하학적 구성이 정의되어야 한다. 이 기하학적 구성에 따라서 전체로서의 복합재료 물성치가 변하게 되며, 각 요소들의 열전도계수가 등방성인 경우에도 복합재료의 열전도계수는 비등방성이 되기도 한다. 복합재료의 각 요소들이 불규칙적으로 분포되어 있는 경우의 균질화기법의 적용은 비경제적이며, 효율적으로 균질화기법을 적용시키기 위해서는 규칙적으로 반복되는 일정 패턴이 있어야 한다. (Fig. 1 참조) 복합재료에서 규칙적으로 반복되는 기하학적 형상의 기본단위가 정의되면 다음과 같이 균질화기법을 적용하여 기본단위의 열전도계수를 산출한다.

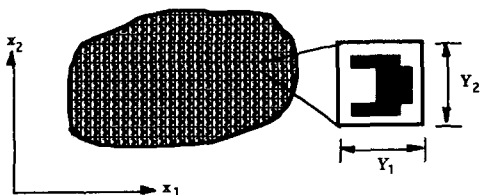


Fig. 1 Composite material with repeated pattern and base cell

2. 열전달에 있어서의 균질화기법

전도 열전달식과 그 유한요소 weakform은 다음과 같다.

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = \dot{q} \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} (v \rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla^T v k \nabla T) d\Omega = \int_{\Omega} v \dot{q} d\Omega \quad (3)$$

식(3)의 복합재료 온도 T 와 비중함수 v 는 충분히 작은 양의 실수 ϵ 를 이용하여 macroscale의 T_o , v_o 와 microscale의 T_1 , v_1 로서 다음과 같이 확장할 수 있다.

$$T = T_o(\underline{x}) + \epsilon T_1(\underline{x}, \underline{y}) \quad (4)$$

$$v = v_o(\underline{x}) + \epsilon v_1(\underline{x}, \underline{y}) \quad (5)$$

식(4)와 식(5)에서 $\underline{y} = \frac{\underline{x}}{\epsilon}$ 는 미세구조에서의 좌표계를 뜻하고 있으며 T 와 v 의 구별은 다음과 같이 구해진다.

$$\nabla T = \nabla_{\underline{x}} T_o + \epsilon \nabla_{\underline{x}} T_1 + \nabla_{\underline{y}} T_1 \quad (6)$$

$$\nabla v = \nabla_{\underline{x}} v_o + \epsilon \nabla_{\underline{x}} v_1 + \nabla_{\underline{y}} v_1 \quad (7)$$

식(6)과 식(7)을 식(3)에 대입하면 ϵ 에 관한 항과 ϵ^2 에 관한 항, ϵ 에 무관한 항들의 합으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho C (v_o \frac{\partial T_o}{\partial t} + \epsilon (v_1 \frac{\partial T_o}{\partial t} + v_o \frac{\partial T_1}{\partial t}) + \epsilon^2 v_1 \frac{\partial T_1}{\partial t}) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\nabla_{\underline{x}} v_o + \nabla_{\underline{y}} v_1)^T k (\nabla_{\underline{x}} T_o + \nabla_{\underline{y}} T_1) d\Omega \\ & + \epsilon \int_{\Omega} (\nabla_{\underline{x}}^T v_o k \nabla_{\underline{x}} T_1 + \nabla_{\underline{x}}^T v_1 k \nabla_{\underline{x}} T_o) d\Omega \\ & + \epsilon^2 \int_{\Omega} \nabla_{\underline{x}}^T v_1 k \nabla_{\underline{x}} T_1 d\Omega = \int_{\Omega} (v_o + \epsilon v_1) \dot{q} d\Omega \quad (8) \end{aligned}$$

여기에서, ϵ 을 0에 접근시키면 ϵ 에 관한 항들과 ϵ^2 에 관한 항들은 없어지고 ϵ 에 무관한 항들만 남게 된다.

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} [v_o \rho C \frac{\partial T_o}{\partial t} + (\nabla_{\underline{x}} v_o + \nabla_{\underline{y}} v_1)^T k \\ & (\nabla_{\underline{x}} T_o + \nabla_{\underline{y}} T_1) - v_o \dot{q}] d\Omega = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

또한 비중함수 $v = v_o + \epsilon v_1$ 은 임의적이므로 v_o 와 v_1 도 임의적이게 되어 식(9)는 macroscale과 microscale에 관한 두개의 식으로 분리된다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} [v_o \rho C \frac{\partial T_o}{\partial t} + \nabla_{\underline{x}}^T v_o k$$

$$(\nabla_x T_o + \nabla_y T_i) - v_o \dot{q} \Big] d\Omega = 0 \quad (10)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla_y^T v_1 k (\nabla_x T_o + \nabla_y T_i) d\Omega = 0 \quad (11)$$

식(10)과 식(11)은 서로 독립적이 아니고, $(\nabla_x T_o + \nabla_y T_i)$ 을 통하여 결합되어 있음을 알 수 있다. 반복되는 작은 단위구조체로 이루어진 일반적인 Y -주기함수 $\Phi(\underline{y}) = \Phi(\underline{y} + \underline{Y})$ 에 대한 적분은 아래와 같이 미세구조에서의 평균화된 크기로 나타낼 수 있는 점을 고려하여

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Phi(\underline{x}, \underline{y}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \Phi(\underline{x}, \underline{y}) dY d\Omega + O(\epsilon^n) \end{aligned} \quad (12)$$

식(10)과 식(11)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y [v_o \rho C \frac{\partial T_o}{\partial t} + \nabla_x^T v_o k (\nabla_x T_o + \nabla_y T_i) - v_o \dot{q}] dY d\Omega = 0 \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \nabla_y^T v_1 k (\nabla_x T_o + \nabla_y T_i) dY d\Omega = 0 \quad (14)$$

식(14)에서 나타나는 $T_o(\underline{x})$ 와 $T_i(\underline{x}, \underline{y})$ 의 선형적 특성을 고려하여 $T_i(\underline{x}, \underline{y})$ 를 변수분리형으로 나타내면

$$T_i(\underline{x}, \underline{y}) = -\chi_i(\underline{y}) \frac{\partial T_o(\underline{x})}{\partial x_i} \quad (15)$$

이 되고, 이것을 다시 식(14)에 대입하면

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial v_1}{\partial y_i} k_{ij}(\underline{x}, \underline{y}) \left(\frac{\partial T_o}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial T_i}{\partial y_j} dY d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_i} k_{ij} - \frac{\partial v_1}{\partial y_i} k_{ik} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_k} \right) dY \frac{\partial T_o}{\partial x_j} d\Omega \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

을 얻는다. 다음의 식(17)은 식(16)을 만족시키는 충분조건이므로 식(17)과 경계조건식(18)로부터 microscale 변수 χ 를 산출한다.

$$\int_Y \frac{\partial v_1}{\partial y_i} k_{ij}(\underline{x}, \underline{y}) dY = \int_Y \frac{\partial v_1}{\partial y_i} k_{ik}(\underline{x}, \underline{y}) \frac{\partial \chi_k}{\partial y_k} dY \quad (17)$$

$$\chi_i(\underline{y}) = \chi_i(\underline{y} + \underline{Y}) \quad (18)$$

일단 χ_i 가 결정되면 microscale과 macroscale이 공존하는 원래의 열전달 Weakform 식(3)은 macroscale만의 weakform을 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [v_o \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho C dY \frac{\partial T_o}{\partial t} + \frac{\partial v_o}{\partial x_i} \frac{1}{|Y|} \\ & \int_Y (k_{ij} - k_{ik} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_k}) dY \frac{\partial T_o}{\partial x_j}] d\Omega \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \int_Y v_o \dot{q} dY d\Omega \quad (19)$$

여기에서, 균질화된 열용량 C^H 와 열전도계수 k^H , 단위열발생량 \dot{q}^H 를 도입하여 식(19)는 다음과 같이 간략하게 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega} (v_o C^H \frac{\partial T_o}{\partial t} + \nabla_x^T v_o k^H \nabla_x T_o) d\Omega = \int_{\Omega} v_o \dot{q}^H d\Omega \quad (20)$$

$$C^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho C dY \quad (21)$$

$$(k^H)_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y (k_{ij} - k_{ik} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_k}) dY \quad (22)$$

$$\dot{q}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \dot{q} dY \quad (23)$$

3. 복합재료에서의 열전도계수 산출

먼저 각각의 열전도계수 행렬이 k_A, k_B 인 등방성의 두 물질 A와 B가 교대로 반복되는 간단한 층상구조물의 경우를 생각해 보자. (Fig. 2 참조) 표준적인 Galerkin법을 사용한 적분식(17)은 아래의 미분방정식으로 변환이 가능하며

$$\frac{\partial}{\partial y_i} (k_{ij} - k_{ik} \frac{\partial \chi_k}{\partial y_k}) = 0 \quad (24)$$

Fig. 2와 같은 단순 층상구조물의 경우 χ_i 는 식(24)으로부터 다음과 같이 해석적으로 구할 수 있다.

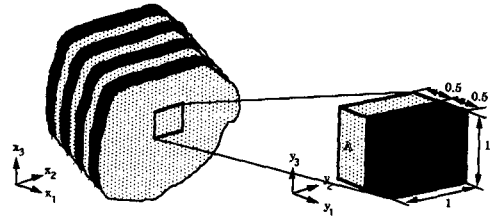


Fig. 2 Simple laminar structure

Table 1 Homogenized thermal conductivity matrices

| Base material | Base material | Homogenized | Homogenized |
|---|--|---|---|
| A | B | (analytic) | (numerical) |
| $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.818 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 5.5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.818 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 5.5 \end{bmatrix}$ |

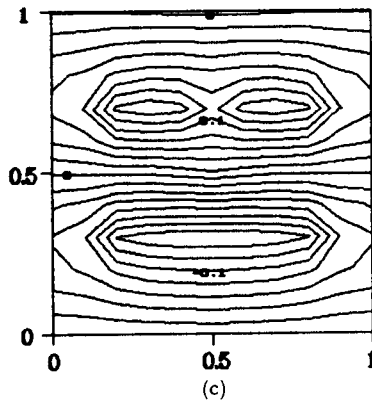
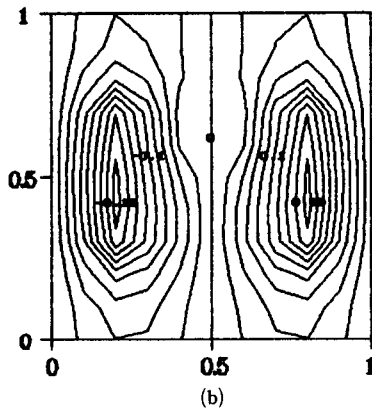
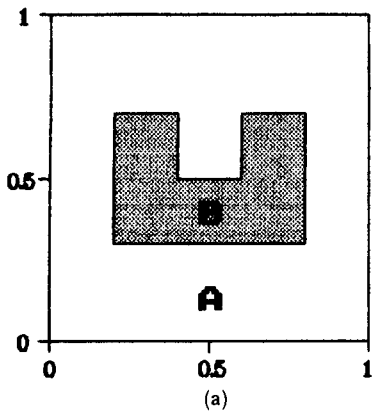


Fig. 3 (a) Base cell with 凹 shaped B
 (b) χ_1 for base cell with 凹 shaped B
 (c) χ_2 for base cell with 凹 shaped B

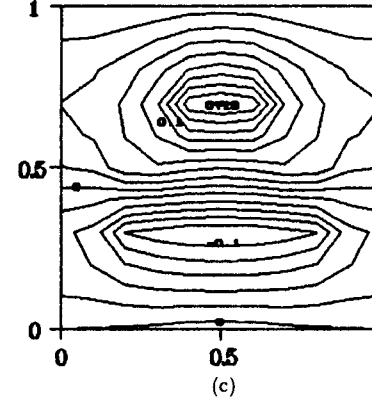
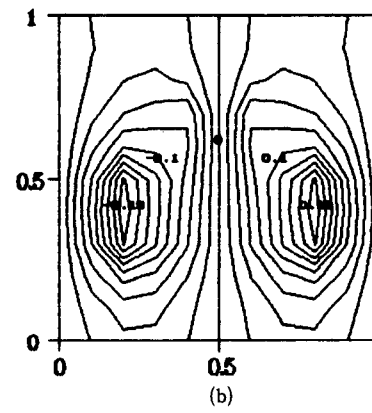
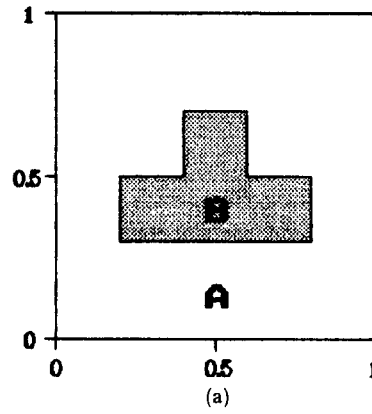


Fig. 4 (a) Base cell with 凸 shaped B
 (b) χ_1 for base cell with 凸 shaped B
 (c) χ_2 for base cell with 凸 shaped B

$$\chi_1 = \begin{cases} \left(1 - \frac{2(k_B)_{11}}{(k_A)_{11} + (k_B)_{11}}\right) y_1 + C_1 & (0 < y_1 < 0.5) \\ \left(1 - \frac{2(k_A)_{11}}{(k_A)_{11} + (k_B)_{11}}\right) (y_1 - 1) + C_1 & (0.5 < y_1 < 1) \end{cases}$$

$$\chi_2 = C_2$$

$$\chi_3 = C_3 \tag{25}$$

$(k_A)_{ij} = \delta_{ij}$, $(k_B)_{ij} = 10\delta_{ij}$ 로 하여 Fig. 2의 층상구조물의 균질화된 열전도계수 행렬을 해석적으로, 또 수치적으로 산출한 결과가 Table 1에 주어져 있다. 수치적으로 계산된 균질화된 행렬요소 k^H 값이 식 (25)로부터 계산된 해석적인 결과와 잘 일치

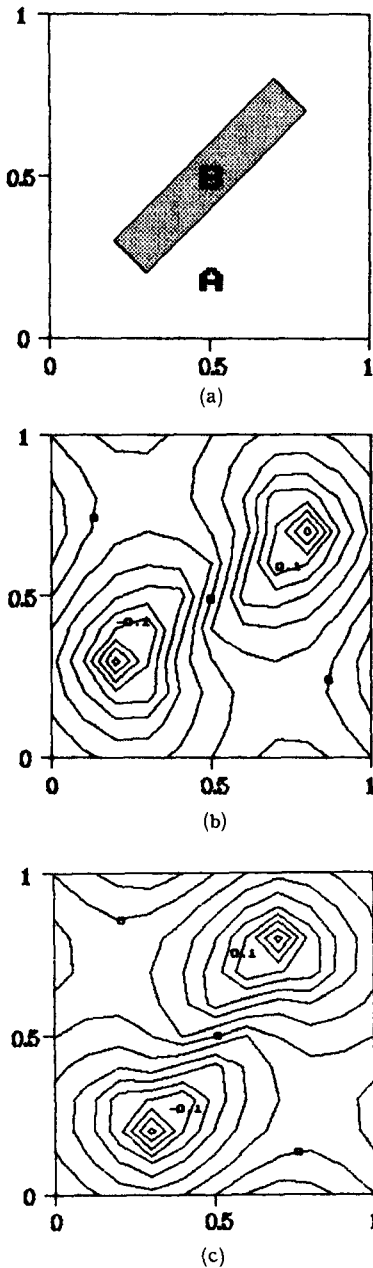


Fig. 5 (a) Base cell with inclined bar shaped B
 (b) χ_1 for base cell with bar shaped B
 (c) χ_2 for base cell with bar shaped B

하고 있음을 알 수 있다. k_{11}^{H} 은 1차원 조합벽의 전기적 유사성을 이용하여 계산한 등가 열전도계수와 일치하며, k_{22}^{H} 와 k_{33}^{H} 은 단위구조구성요소인 A와 B의 체적 평균값임을 알 수가 있다.

두번째 예로서 Fig. 2보다 복잡한 형태의 복합재

Table 2 Shape of B and homogenized thermal conductivity k^H

| 凹 Shape(Fig. 3) | 凸 Shape(Fig. 4) | Bar shape(Fig. 5) |
|--|--|--|
| $\begin{bmatrix} 1.5910 & 0 \\ 0 & 1.4168 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.4793 & 0 \\ 0 & 1.3155 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1.2805 & 0.1508 \\ 0.1508 & 1.2805 \end{bmatrix}$ |

료의 경우를 생각해보자. 열전도계수 $(k_A)_{ij} = \delta_{ij}$ 인 물질 A와 열전도계수 $(k_B)_{ij} = 10\delta_{ij}$ 인 물질 B가 y_1, y_2 방향으로 각각 크기가 1인 정사각형의 2차원 단위구조를 이루고 있다. 단위구조내에서 물질 A에 둘러싸인 물질 B의 형상은凹형(Fig. 3(a)),凸형(Fig. 4(a))과 45°방향의 막대형(Fig. 5(a))으로 각각 주어져 있다. 단위구조내 각 구성요소들의 분포가 조금만 복잡해져도 미분방정식(24)의 해를 구하는 것은 사실상 불가능하며, 식(17)과 이에 상응하는 수치적분법을 이용하여 미세구조 변수 χ_i 를, 식(22)을 사용하여 균질화된 물성치 k^H 을 구할 수 있다. Fig. 3(b), (c)에는 Fig. 3(a)의 단위구조에 대한 χ_1, χ_2 가, Fig. 4(b), (c)에는 Fig. 4(a)의 단위구조에 대한 χ_1, χ_2 가, Fig. 5(b), (c)에는 Fig. 5(a)의 단위구조에 대한 χ_1, χ_2 가 각각 주어져 있다. 또 이들로부터 계산된 k^H 값이 Table 2에 주어져 있다.

Fig. 3, 4, 5에 나타난 값을 살펴보면 단위구조내에서 구성물질 A, B의 분포가 좌우대칭인 Fig. 3(b), (c)과 Fig. 4(b), (c)의 경우 $y_1=0.5$ 인 선을 중심으로 하여 χ_1 이 skew-symmetric, χ_2 이 symmetric한 것을 알 수 있다. Fig. 5(b), (c)에 나타난 χ_1 과 χ_2 의 관계는 $\chi_1(y_1, y_2) = \chi_2(y_2, y_1)$ 으로 표시되는, 일종의 transpose에 해당된다고 할 수 있다. Table 2의 결과는 복합재료를 구성하는 모든 구성요소들의 물성치가 등방성인 경우에도 그 기하학적 구성에 따라 단위구조를 대표하는 물성치가 등방성이 아닐 수도 있음을 보여주고 있다. 특히 Fig. 5(a)에 해당되는, 물질 B의 형상이 막대형인 경우의 열전도계수 행렬에서 non-zero off-diagonal항들이 나타나고 있음을 볼 수가 있는데 이는 온도구배가 y_1 또는 y_2 방향중 어느 한쪽에만 존재할 경우 열전달은 y_1 방향과 y_2 방향 모두에 일어남을 뜻한다. Fig. 5의 단위구조에 해당되는 k^H 에 대하여 특이치 분석을 하면 $\lambda_1 = 1.1297, \lambda_2 = 1.4313$ 인 특이치와 $\{0.7071 \ -0.7071\}^T, \{0.7071 \ 0.7071\}^T$ 인 특이벡터를 얻게 된다. 이는 만약에 $z_1 = 0.7071y_1 - 0.7071y_2$,

$z_2 = 0.7071y_1 + 0.7071y_2$ 가 되도록 새로운 미세구조 좌표계 z_1, z_2 를 설정하여 균질화기법을 적용시켰을 경우 산출될 k^H 는 off-diagonal 항들의 값이 0이고, $k^H_{11} = 1.1297$, $k^H_{22} = 1.4313$ 이 됨을 뜻한다.

실제 응용예로서 다음과 같은 2차원 정상상태 열전달문제를 고려해 보자. $1\text{m} \times 1\text{m}$ 크기의 철-콘크리트 복합체가 있고 이 복합체에 Fig. 6의 경계조건이 주어져 있다고 가정하자. ($(k_{\text{concrete}})_{ij} = 1.4\delta_{ij} \text{ W/mK}$, $(k_{\text{steel}})_{ij} = 72.7\delta_{ij} \text{ W/mK}$) 이 철-콘크리트 복합체에는 45° 각도로 기울어진 $1.414 \text{ cm} \times 7.07 \text{ cm}$ 크기의 철편 100개가 콘크리트 속에 일정한 간격을 유지하며 분포해 있다. Fig. 6에 주어진 복합재료 열전달문제의 해를 표준적인 유한요소법으로 구하기 위해서는 Fig. 7(a) (459개의 QUAD4 요소, 520 자유도)나 Fig. 7(b) (1234개의 QUAD4 요소, 1330 자유도)에서 보는 것과 같이 상당히 많은 자유도를 갖는 mesh를 필요로 한다. Fig. 6의 경계조건과 Fig. 7(a)와 Fig. 7(b)의 mesh를 이용하여 구한 복합재료의 온도분포가 Fig. 8(a)와 Fig. 8(b)에 각각 주어져 있다.

균질화기법을 사용하여 같은 문제의 해를 구하고자 할 경우 Fig. 7(c)에서 보는 것과 같이 주어진 복합재료를 microscale model과 macroscale model로 나누어 생각한다. 이 철-콘크리트 복합체는 $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ 크기의 단위구조를 기본으로 하여 같은 패턴이 상하좌우로 반복되는 것을 알 수가 있는데, 이러한 기하학적 특성을 이용하여 기본단위를 46개의 삼각형 요소로 이루어진 32 자유도의 microscale model과 등가 열전도계수를 이용하여 실제로 복합재료의 온도분포를 구하는 macroscale model

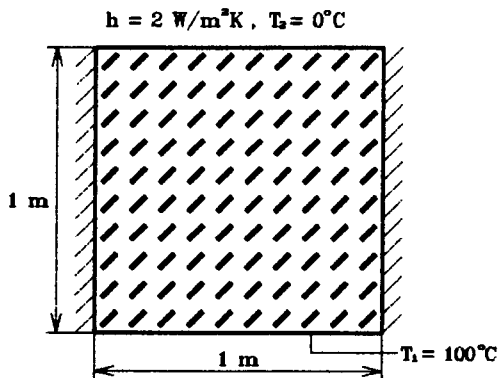


Fig. 6 Concrete-steel composite and boundary condition

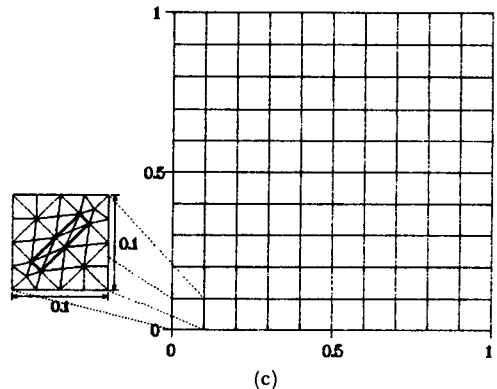
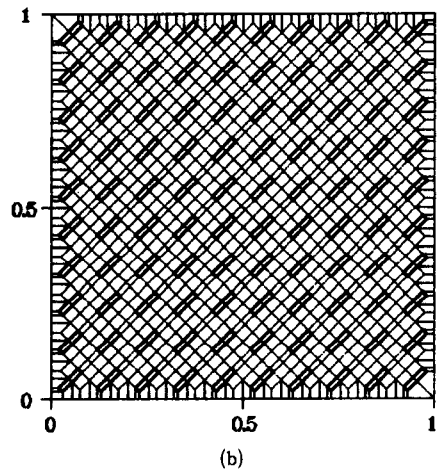
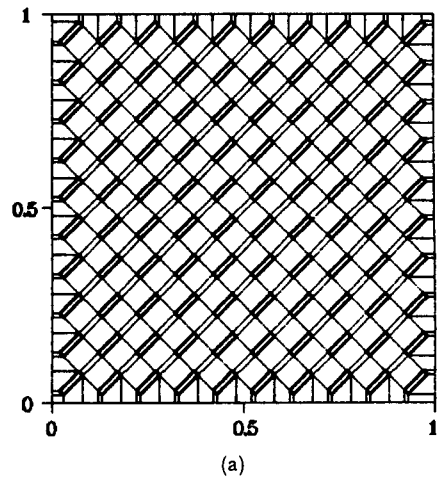


Fig. 7 (a) Finite element mesh (conventional method, 459 QUAD4 elements, 520 DOF), (m)
 (b) Finite element mesh (conventional method, 1234 QUAD4 elements, 1330 DOF), (m)
 (c) Finite element mesh (homogenization technique, 32 DOF for microscale model, 121 DOF for macroscale model), (m)

Table 3 Concrete-steel composite and thermal conductivity matrices(W/mK)

| Concrete | Steel | Homogenized |
|--|--|--|
| $\begin{bmatrix} 1.4 & 0. \\ 0. & 1.4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 72.7 & 0. \\ 0. & 72.7 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2.0069 & 0.3972 \\ 0.3972 & 2.0069 \end{bmatrix}$ |

(100개의 QUAD4 요소, 121 자유도)을 Fig. 7(c)에서 보는 것과 같이 설정하였다. 복합재료의 단위 구조가 Fig. 7(c)의 microscale model에서와 같이 설정되었을 때 식(22)를 사용하여 계산된 2차원 열전도계수 행렬 k^H 가 Table 3에 주어져 있다. Table 3에 주어진 k^H 의 특이치는 1.6097, 2.4041 (W/mK)로, 특이벡터는 $\{0.7071 \ -0.7071\}^T$ 와 $\{0.7071 \ 0.7071\}^T$ 로 각각 구해졌다. Fig. 6에서 주어진 경계 조건을 사용하고 Fig. 7(c)의 micro-macroscale model을 사용하여 철-콘크리트 복합체의 정상상태 온도분포를 구한 결과가 Fig.8(c)에 주어져 있다.

복합재료의 열전도계수 행렬값이 등방성 요건인 $k_{ij} = k\delta_{ij}$ 을 만족시키지 않더라도 k^H 의 특이벡터의 방향이 좌표계 x_1, x_2 방향과 일치할 때에는 Fig. 6의 좌우대칭적인 경계조건때문에 x_1 방향을 따라서 온도가 일정하리라는 것을 예측할 수가 있는데, 실제 Fig. 8(a)~(c)에 나타난 온도분포에서는 일정높이(x_2)에서 x_1 축방향을 따라서 온도가 상승하고 있음을 볼 수 있다. 이는 복합재료에 포함된 철의 열전도계수가 콘크리트의 열전도계수보다 월등히 크기때문에 단위구조내에서 일종의 열의 통로 역할을 하기 때문이라는 것을 짐작할 수가 있다. Fig. 8(a)~(c)에 나타난 온도분포를 보면 서로 약간씩의 차이를 보이고 있는 것을 알 수 있다. 복합재료를 표준적인 방법으로 분할한 mesh를 사용하여 온도분포를 구한 Fig. 8(a), (b)의 결과를 비교할 때, 일반적으로 full integration이 적용된 QUAD4 요소를 사용할 경우 Laplace 방정식의 해의 오차가 $O(h^2)$ 임을 고려하여 Fig. 8(b)의 결과가 Fig. 8(a)의 결과보다 실제값에 가까울 것으로 판단된다. 또 균질화기법을 사용하여 얻은 Fig. 8(c)의 결과를 앞의 두 결과와 비교해 보면, 520 자유도의 Fig. 8(a)의 결과보다 microscale model과 macroscale model을 합쳐 153 자유도밖에 되지않는 Fig. 8(c)의 결과가 1330 자유도의 Fig. 8(b)의 결과에 더 접근함을 볼 수가 있다. 복합재료의 열전달해석에 균질화기법을 적용하여 얻을 수 있는 잇점으로

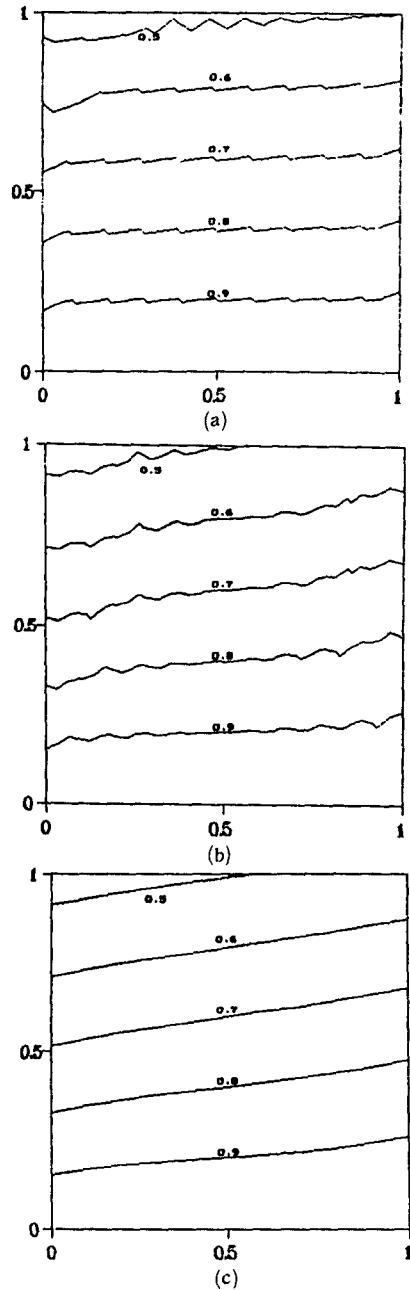


Fig. 8 (a) $(T - T_2)/(T_1 - T_2)$ resulted from the mesh of Fig. 7(a) (conventional method, 520 DOF)
 (b) $(T - T_2)/(T_1 - T_2)$ resulted from the mesh of Fig. 7(b) (conventional method, 1330 DOF)
 (c) $(T - T_2)/(T_1 - T_2)$ resulted from the mesh of Fig. 7(c) using homogenization technique (32 DOF for microscale model, 121 DOF for macroscale model)

는 Fig. 8(a)~(c)의 비교를 통해서 알 수 있듯이 적절한 근사해의 획득을 위해 필요한 계산량을 현저히 줄일 수 있을 뿐더러 복합재료를 Fig. 7(a)~(b)의 mesh와 같이 복잡하게 분할하는데 필요한 시간과 수고를 줄일 수 있는 점을 들 수가 있다. 또한 microscale model을 통해 계산된 등가 열전도계수는 유한요소법뿐 아니라 유한차분법 등 다른 수치해석법에서도 적용이 가능하기 때문에 균질화 기법은 폭넓게 응용될 수 있다. 일반적으로 Fig. 6에서 나타난 것과 같은 유형의 복합재료 열전달 해석을 위하여 균질화기법을 사용할 경우 다른 방식의 수치해석법 또는 표준적인 유한요소법을 사용할 경우보다 현저하게 작은 계산량으로 적절한 근사해를 얻을 수 있다. 물론 균질화된 열전도계수 행렬의 산출을 위해서는 별도의 계산과정이 필요하지만 기본단위의 반복도가 심한 복합재료의 계산에서는 충분히 보상되리라고 생각된다.

4. 결 론

복합재료에서의 열전달해석에 균질화기법이 사용되었다. 유한요소법에 미소좌표계 확장을 도입한 균질화기법을 사용하여 등가 열전도계수를 산출함으로써 기본단위의 반복도가 심한 복합재료의 열전달해석시 필요한 자유도를 현저히 줄이면서 적절한

근사해를 얻을 수 있었으며 복합재료 매질을 유한요소로 분할하는데 필요한 시간과 수고를 줄일 수 있었다. 균질화된 열전도계수의 산출을 위해서는 별도의 계산과정이 필요하지만 기본단위의 반복도가 심한 복합재료의 계산에서는 충분히 보상될 수 있으며, 균질화기법을 사용하여 일단 계산된 등가 열전도계수는 유한차분법 등의 다른 수치해석법에 폭넓게 적용될 수 있다.

참고문헌

- (1) Hashin, Z. , 1983, "Analysis of Composite Materials-A Survey," *Trans. ASME, J. of Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 481~505
- (2) Sanchez de Palencia, E. , 1980, *Non-homogeneous Media and Vibration Theory, Lecture Notes in Physics*, Nb. 127, Springer Verlag, Berlin
- (3) Guedes, J. M., 1990, *Nonlinear Computational Models for Composite Materials Using Homogenization*, Ph. D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor
- (4) Kikuchi, N. , 1985, *Ch. 2.1 Heat Conduction Problems, Finite Element Methods in Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge