

〈技術論文〉

## 순간주파수 분석기법의 응용(2) — 주파수의 부호를 결정하는 조건 —

김정태\* · 임병덕\*\*  
(1993년 7월 21일 접수)

### Application of Instantaneous Frequency Analysis(II) — Conditions of Existing Negative Frequency Components —

Jeung-tae Kim and Byung-duk Lim

**Key Words :** Instantaneous Frequency Analysis(순간주파수 분석), Conditions of Negative Frequency(음의 주파수값), Narrow Band Pass Filtering(협대역 통과 주파수 분석) Pump Vibration Analysis(펌프진동해석)

#### Abstract

An instantaneous frequency analysis is a technique to examine a signature for the rotating machinery if the signal has several transitions within a cycle. This paper discusses the conditions of existing negative frequency components in the instantaneous frequency. By using a signal consisted of two frequency components, the instantaneous frequency analysis is conducted while the amplitude ratio between two frequency components has been changed. The analysis shows that, depending on the amplitude ratio, the instantaneous frequencies have averaged, zero-valued, or negative components. It turns out that the negative-valued instantaneous frequencies, which have been regarded as the noise effect, are the consequence of the calculation process for the multisignal components. The criteria of existing the negative values in instantaneous frequencies is given in terms of the relative amplitude ratio and the frequency difference. Especially when the amplitude ratio approaches to 1, the instantaneous frequency fluctuates  $\pm\infty$  in theory, which implies that instantaneous frequency has unstable region around the amplitude ratio, 1. Also, as the frequency difference between major signal components is increased, the region of existing negative instantaneous becomes broader. In an instantaneous frequency analysis, therefore, a narrow band analysis is suggested, with extreme care if the amplitude ratio approaches to 1. In this paper, a vibration signal monitored from a rotating machinery is also examined as an application example in order to show the existence of negative instantaneous frequencies components.

---

#### 기 호 설 명

A : 진폭

$f(t)$  : 순간주파수

$b(t)$  : 해석신호

$\psi(t)$  : 위상

$\omega(t)$  : 각속도

$\Delta$  :  $\omega_2 - \omega_1$

---

\*정회원, 홍익대학교, 기계공학과

\*\*영남대학교

### 1. 서 론

일정한 주기를 가지고 반복되는 신호의 분석은 FFT분석을 통하여 주파수 대역별로 에너지(또는 파워)의 분포를 알 수 있으므로 회전하는 기계에서 발생하는 신호분석에 유용하게 쓰이는 장점을 가지고 있다. 이에 반해 FFT분석이 가지고 있는 단점은 에너지의 분포를 일정한 주기별로 평균치를 구한 결과로 파악되기 때문에 한 주기내에 위치한 특정순간에 대한 주파수 분석정보는 나타내지 못하게 된다.

본 연구는 FFT 주파수 해석방법의 보완으로 쓰일 수 있는 순간주파수 분석기법(instantaneous frequency analysis)의 적용시 나타나는 부호특성에 대한 원인규명과 조건에 관한 분석이 시도되었다.

주기성을 가지고 과도현상을 나타내는 시스템으로부터 발생하는 신호에 대하여 순간주파수를 분석해 보면, 많은 경우 음의 주파수 성분이 나타나게 된다. 음의 주파수는 물리적으로 존재할 수 없는 값이다. 본 연구는 이와 같은 음의 순간주파수(negative instantaneous frequency)가 왜 나타나며, 또 존재하는 조건을 해석적인 방법으로 증명하였다. 이와 함께 순간주파수 분석의 적용사례로 펌프의 운전시 나타나는 진동신호를 분석하여 실제의 신호처리 과정에 존재하게 되는 음의 주파수 성분을 보여주었다.

### 2. 두가지 신호에 대한 순간주파수의 해석적 방법

알고리즘을 이용하여 순간주파수를 계산하게되면 물리적으로는 발생할 수 없는 음의 주파수성분(negative frequency component)이 나타나게 된다. 음의 주파수 성분이 나타나는 원인은 단순히 미분치의 계산에 의한 수치해석상의 오차가 아니고 각도를 계산하기 위한 삼각함수의 계산 과정으로부터 발생된다.<sup>(1)</sup>

음의 주파수 성분이 발생하는 원인을 이해하기 위하여 주파수 및 가진 두가지 신호를 이용하여 순간주파수에 미치는 조건을 고려하였다. 해석하고자 하는 신호  $b(t)$ 는

$$b(t) = \sin\omega_1 t + A \sin\omega_2 t \tag{1}$$

두가지 주파수 성분을 가지고 있다고 보자. 여기서, 우변의 첫번째 항은  $b_1(t)$ , 두번째 항은  $b_2(t)$ 이며  $\omega_2$ 는  $\omega_1$ 보다 큰 값이라 가정한다. 또 각 항간의 진폭비는 1 : A이다.

위상을 구하기 위하여 두가지 주파수 성분을 합성시키면

$$b(t) \sqrt{1+A^2+2A\cos(\Delta t)} \cdot \sin[\omega_1 t + \psi(t)] \tag{2}$$

가 된다. 여기서  $\Delta$ 는  $(\omega_2 - \omega_1)$ 를, 위상  $\psi(t)$ 는

$$\psi(t) = \tan^{-1} \left\{ \frac{A \sin \Delta t}{1 + A \cos \Delta t} \right\} \tag{3}$$

로 표현된다. 그러므로 순간주파수  $f(t)$ 는

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \omega_1 + \Delta \cdot \frac{A(\cos \Delta t + A)}{1 + A^2 + 2A \cos \Delta t} \right\} \tag{4}$$

로 나타내어 진다.

### 3. 순간주파수의 부호결정 조건

식(4)에서 표현되어 있는 순간주파수  $f(t)$ 는 신호의 주파수 성분  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ 와 진폭 A의 함수로 나타나 있다.

이와 같은 순간주파수  $f(t)$ 의 부호를 알아보기 위해 식(4)에 표현되어 있는 순간주파수를 다음과 같이 해석에 편리한 무차원 변수로 바꿀 수 있다. 즉,

$$\omega^*(t) = 1 + \frac{\Delta}{\omega_1} \cdot g^*(\Delta t) \tag{5}$$

여기서,  $\omega^*(t)$ 는  $\omega(t)$ 를  $\omega_1$ 으로 나누어 무차원화시킨 값이다.

식(5)의 오른쪽항 중  $g^*(x)$ 는 다음과 같이 나타난다.

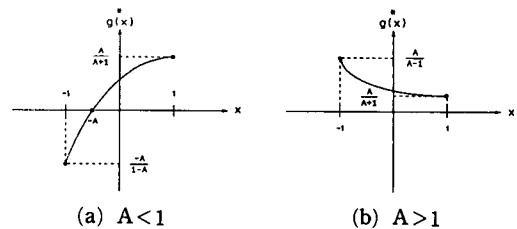


Fig. 1 Characteristics of function  $g(x)$ . Depending on the amplitude ratio, the function is monotonically increased or decreased

**Table 1** Maximum and minimum values of function  $g(t)$ , depending on the amplitude ratio,  $A$

	Max	Min
$A < 1$	$\frac{A}{A+1}$	$-\frac{A}{1-A}$
$A > 1$	$\frac{A}{A-1}$	$\frac{A}{1+A}$

$$g^*(x) = \frac{A[\cos(x) + A]}{1 + A^2 + 2A\cos(x)} \quad (6)$$

$g^*(x)$ 는 Fig. 1과 같이 단순증가(또는 감소) 함수의 특성을 가지고 있으며 이의 최대·최소값은 Table 1에 정리되어 있다.

이와 같이 진폭비  $A$ 값이 1보다 크고 작음에 따라 해당되는  $g^*(x)$ 의 값의 최대·최소값이 달라지므로, 무차원화된 순간주파수  $\omega^*(t)$ 의 최대·최소값은 다음과 같이 두가지 경우의 수를 가진다.

(i)  $A < 1$ 인 경우,

$$\omega_{\max}^*(t) = 1 + \left(\frac{A}{\omega_1}\right) \cdot \frac{A}{1+A} \quad (7)$$

$$\omega_{\min}^*(t) = 1 - \left(\frac{A}{\omega_1}\right) \cdot \frac{A}{1-A} \quad (8)$$

(ii)  $A > 1$ 인 경우,

$$\omega_{\max}^*(t) = 1 + \left(\frac{A}{\omega_1}\right) \cdot \frac{A}{A-1} \quad (9)$$

$$\omega_{\min}^*(t) = 1 + \left(\frac{A}{\omega_1}\right) \cdot \frac{A}{1+A} \quad (10)$$

따라서  $A < 1$ 인 조건에서는  $\omega_{\min}^*(t)$ 가 0보다 작은 경우가 존재한다. 순간주파수가 음(-)을 가지기 위한 조건은 식(8)로부터

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} < A < 1 \quad (11)$$

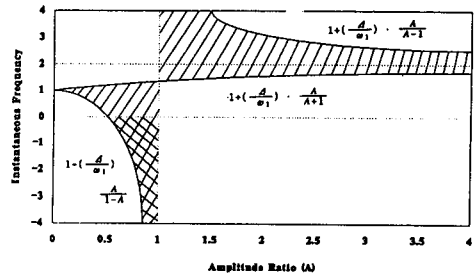
구간이 된다.

한편, 진폭비  $A$ 가 1인 조건에서의 순간주파수는 다음과 같다.

(iii)  $A = 1$ 인 경우,

$$\omega(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = const \quad (12)$$

즉, 입력된 두개 주파수 성분의 산술평균이 되어 시간변화에 관계없이 일정한 값을 가지게 된다.



**Fig. 2** Existing region of instantaneous frequencies as a function of the amplitude ratio

진폭비  $A$ 가 1보다 큰 조건에서는  $\omega_{\min}^*(t)$ 가 항상 0보다 큰 값을 가지므로 식(10)에 보여져 있는 것과 같이 순간주파수가 항상 양(+)의 값을 가지게 된다.

식(7)에서 부터 식(10)까지의 무차원화된 순간주파수를 그림으로 나타내면 Fig. 2과 같다. 그림에서 순간주파수가 존재하는 영역은 빗금친 구간에 해당된다.

특히,  $A$ 값이  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  보다 크고 1보다 작은 구간에서는 음(-)의 순간주파수가 나타난다. 따라서 분석대상신호  $\omega_1$ 과  $\omega_2$ 가 멀리 떨어져 있어 광대역 주파수 해석을 하게 되는 경우  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 가 0에 접근하므로 음의 성분을 가지는 순간주파수 범위는 넓게 된다.

한편, 진폭비  $A$ 값이 1.0 근처에서는 순간주파수의 변화가 크게 나타나므로 해석하고자 하는 주파수대역에서 유사한 크기의 진폭이 같이 존재하면 순간주파수가 심한 변화를 하게 되는 불안정한 구간이 된다. 반면에,  $A$ 값이 1로부터 멀어질수록 순간주파수의 변화폭은 제한을 받게 되어  $A \ll 1$  경우에는 순간주파수가  $\omega_1$ 을 중심으로,  $A \gg 1$ 인 경우에는  $\omega_2$ 를 중심으로 좁은 폭에서 움직이게 되므로 안정된 순간주파수 경향을 보여주게 된다.

#### 4. 하모닉 신호의 적용

앞절에서 해석된 결과와 같이 순간주파수  $f(t)$ 는 진폭비  $A$ 값의 조건에 따라 다양한 결과를 가지게 된다. 가장 간단한 예로 기본주파수  $\omega_1$ 과 이의 하모닉 성분  $2\omega_1$ 을 고려해 보자.

본 연구에서는 100 Hz와 200 Hz인 두가지 주파수 성분을 가진 신호가 진폭비  $A$  0.2, 0.5, 0.8, 1.0 및 1.5 등 다섯가지 조건을 가진 경우에 대한

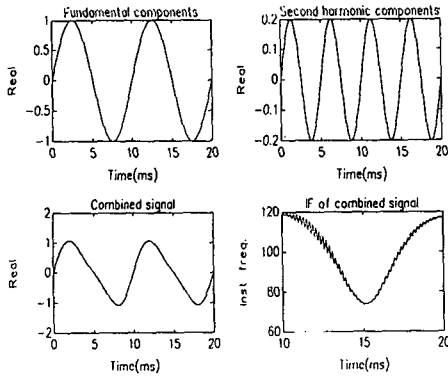


Fig. 3 Instantaneous frequencies when the amplitude ratio  $A=0.2$ . The IF has positive values only

순간주파수가 분석되었다.

각각의 진폭비에 해당되는 순간주파수의 계산 결과는 Fig. 3에서 부터 Fig. 7까지 보여져 있다. 순간주파수는 직접미분방식으로 계산되었다.<sup>(2)</sup> 각각의 그림은 기본주파수를 가진 신호, 이의 하모닉 성분, 기본과 하모닉이 합성된 신호 및 순간주파수 등 4개의 신호를 보여주고 있다.

Fig. 3의 경우와 같이 진폭비가  $A$ 가 0.2인 조건에서는 Fig. 2의 조건으로부터 예상되듯이 100 Hz (무차원 주파수에서는 1.0)를 중심으로 20 Hz폭의 제한된 범위를 가지고 변화하고 있음을 볼 수 있다.

진폭비가 점차 증가하면서 음(-)의 성분을 가진 순간주파수가 나타나는 조건은  $A$ 값이 식 (11)을 만족시킬 때이다. 사용된 주파수는  $\omega_1=100/2\pi$ 와  $\omega_2=200/2\pi$ 인 신호였으므로 순간주파수가 음이 되는 구간은

$$0.5 < A < 1 \tag{13}$$

임을 알 수 있다. 즉, 식 (13)의 조건을 만족시키는 진폭비  $A$ 인 경우에 계산 알고리즘의 성능에 관계없이 0보다 작은 음의 순간주파수값이 나타난다.

Fig. 4는 음의 주파수가 나타나는 경계에 있는 진폭비  $A=0.5$ 의 경우를 보여주고 있다. 이때에는 Fig. 2에서 보여진 것과 같이 순간주파수가 0이 될 수 있음을 볼 수 있다. 또, Fig. 5는  $A=0.8$ 인 경우로서 음(-)의 주파수에 해당되는 구간이다.  $A=1.0$ 인 영역에 접근하므로 순간주파수가 0보다 낮은 값을 가질뿐 아니라, 주파수의 변화폭이 큰 범위에 걸쳐 나타난다. 이와 같이  $A$ 값이 0.5보다 크

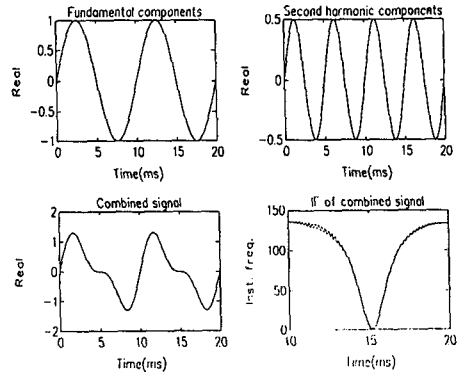


Fig. 4 Instantaneous frequencies when  $A=0.5$ . The IF crosses the zero

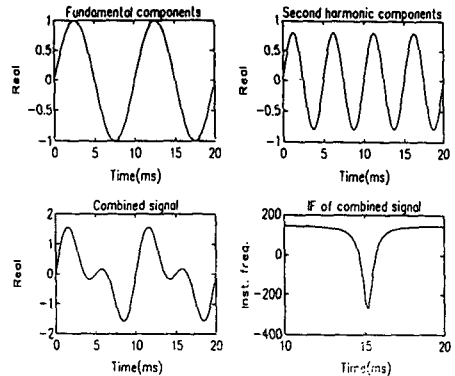


Fig. 5 Instantaneous frequencies when  $A=0.8$ . The IF has negative values

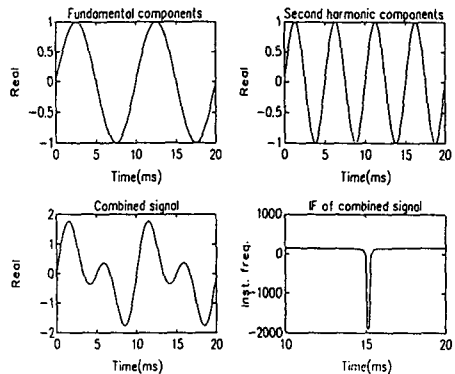


Fig. 6 Instantaneous frequencies when  $A=1.0$ . The IF is averaged

고 1.0미만 사이의 조건일 때에는 음의 부호를 가진 순간주파수 성분이 나타남을 볼 수 있다.

한편, Fig. 6의  $A=1$ 인 경우와 같이  $\omega_1$ 과  $\omega_2$  성

분의 진폭이 동일한 크기를 가지고 있을 때에는 식 (12)에서와 같이 순간주파수는  $\omega_1$ 과  $\omega_2$ 의 산술평균된 값인 150 Hz를 가진다. 그림의 특정구간에서 음의 성분이 나타난 것은  $A=1$ 인 불안정 구간에서의 수치오차에 기인된다.

이에 반해 Fig. 7에 보여져 있는 것과 같이 진폭비가 1.0보다 큰 구간인  $A=1.5$ 의 경우에는 항상 양(+)의 순간주파수만을 가지게 된다.

이와 같이 기본주파수와 이의 1차 하모닉 성분으로 이루어진 신호에 대하여 다양한 진폭변화에 따른 순간주파수 분석결과를 종합하면 Fig. 8과 같이 나타날 수 있다. Fig. 8의 결과들은 순간주파수를 단순한 직접미분방식으로 구하지 않고 식(5)에 보여져 있는 것과 같이 해석적으로 정리한 후 위상값으로 도출된 결과이다. 따라서 Fig. 6의 경우와 같이 진폭비  $A$ 가 1일 때 나타나는 불안정 값과 같은 수치계산의 오차는 포함되지 않게 되며  $A=1$ 에서

두개의 주파수 성분의 평균값을 분명히 보여주고 있다. 또 앞의 Fig. 3에서 부터 Fig. 7까지 보여져 있는 순간주파수 분석결과보다는 깨끗한 신호특성을 보여 주고 있으며 이 방법을 통해서도 순간주파수는 음의 값은 존재함을 알 수 있다.

따라서 순간주파수의 신호분석 과정에서 나타나는 음의 주파수 성분을 피하기 위해서는 분석하고자 하는 주파수 대역의 폭을 줄여야 한다. 즉, 식 (1)에서 보여져 있는 것과 같이  $\omega_1$ 과  $\omega_2$ 가 동시에 나타날 수 없도록 협대역 통과필터(narrow band pass filter)를 사용하여 순간주파수 분석 이전에 신호의 분리를 수행하게 되면 물리적으로 나타나는 안될 음의 주파수를 피하게 된다. 특히  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ 와 같이 하모닉 성분이 존재하는 신호의 경우, 각 주파수 성분이 가지고 있는 진폭의 크기가 6 dB이 내로 인접하게 되면 음의 부호가 나타나는 조건을 피할 수 없을 뿐만 아니라, 순간주파수의 변화폭이 크게 증가하므로 신호의 의미있는 분석이 어렵게 된다. 따라서 신호처리 과정 이전에 협대역 통과필터의 사용이 선행되어야 한다. 관련 문헌에서 제안되고 있는 협대역 통과 신호처리의 조건이 제시되는 이유도 이와 같은 음의 주파수 성분을 피하기 위한 방법과 연계되기 때문이다. (3-5)

결론적으로, 순간주파수의 성분을 해석함에 있어 0보다 작은 순간주파수 값의 존재는 각각의 성분별 신호의 크기에 따라 발생할 수 있으며 단순히 미분과정으로 인해 나타나는 수치 오차만은 아닌 것을 볼 수 있다.

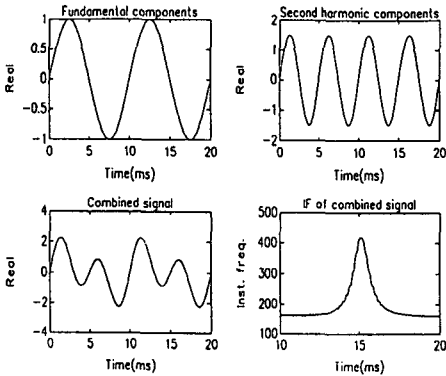


Fig. 7 Instantaneous frequencies when  $A=1.5$ . The IF has positive only

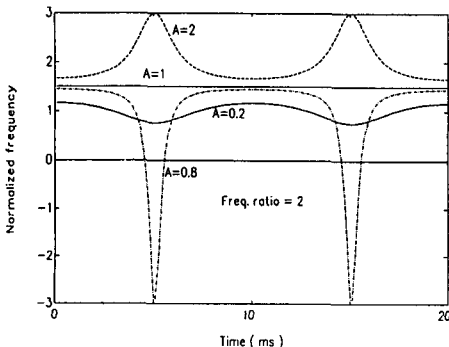
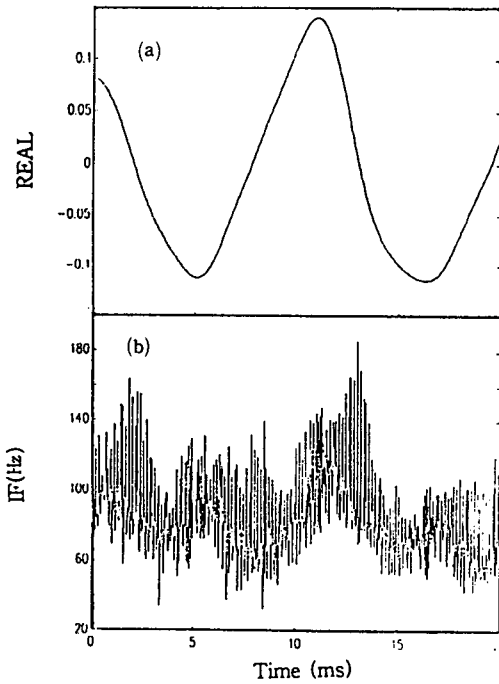


Fig. 8 Summary of Instantaneous frequency for various amplitude ratios

### 5. 펌프의 신호분석 사례

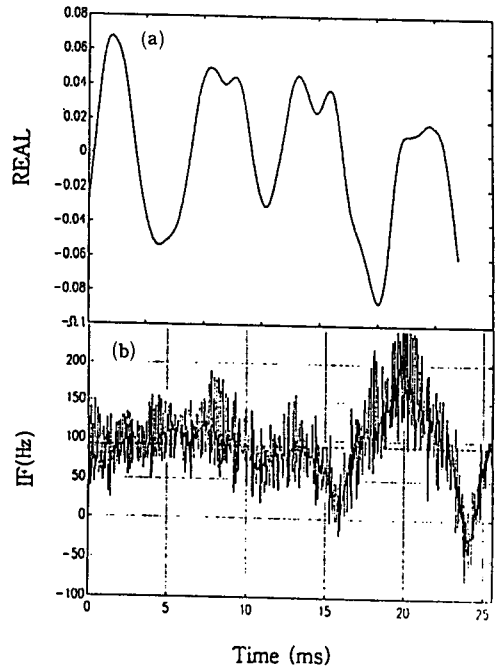
본 연구에서 검토된 순간주파수 분석기법은 회전기계의 일종인 펌프의 진동신호 분석에 적용되었다. 대상 시스템은 전기모터를 가지고 있는 펌프이다. 1800 RPM (30 Hz)으로 회전하고 모터의 구동은 속도변환장치(coupling)를 통해 펌프축을 구동시키도록 되어 있다. 시스템 모터 베어링축의 진동이 과도한 관계로 그 진동원인의 규명이 요구되었으며 원인규명의 일환으로 순간주파수 분석이 시도되었다. (6,7)

문제 펌프의 진동신호는 Fig. 9에 보여져 있다. (a)는 모터가 1회전하는 기간동안 측정된 진동신호를 시간축에 대해 표시한 것이다. 모터의 회전주기(30 msec)에 비해 이보다 훨씬 높은 주파수 성



(a) Time signal  
(b) Instantaneous frequency

Fig. 9 Application of pump signal: One major frequency components



(a) Time signal  
(b) Instantaneous frequency

Fig. 10 Application example of pump signal: Multi frequency components

분이 강한 에너지 신호임을 볼 수 있다. (b)는 이의 순간주파수 분석결과로, 모터 회전수의 3배 근처(92.5 Hz)에서 주된 에너지 성분을 가지고 있다. 그림에 보여져 있는 점선은 순간주파수의 평균값을 나타내고 있으며 회전주기 동안 92 Hz를 중심으로 일정한 폭을 가지고 변화하고 있다. 이와 같이 회전주기 동안 92 Hz의 진동신호가 연속적으로 발생되고 있음은 회전축을 통해 진동에너지가 전달되고 있음을 유추할 수 있으므로 진동신호의 전달 경로에 대한 시나리오 작성에 유용한 정보를 제공해 주게 된다.

한편, 신호의 성분중 모터의 진동신호 30 Hz에 비해 미지의 가진주파수 92 Hz에 의한 진폭은 상대적으로 큰 관계로 진폭비가 1보다 충분히 큰 구간에 해당된다. 따라서 Fig. 2에서 예상할 수 있듯이 항상 양의 순간주파수를 가지며 순간주파수의 변화폭도 제한된다.

이와 같은 펌프진동문제의 원인을 분석한 결과 펌프시스템은 단순한 과도충격이나 가진에 의한 것

이 아니라 축의 회전기간 동안 항상 92 Hz 진동에너지가 발생되며 이러한 진동에너지는 연결축의 속도가변기에서 의해 발생하는 것으로 확인되었다.<sup>(6)</sup>

Fig. 10의 신호는 축의 가진원인을 제거시킨후 측정된 결과를 보여주고 있다. (a)의 시간신호로부터, 진동신호 92 Hz는 더 이상 주된 진동에너지가 아님을 볼 수 있다. 그 결과, (b)에 보여진 결과와 같이 순간주파수 신호를 분석하게 되면 여러 개의 조화함수가 복합적으로 영향을 주게 되며 92 Hz신호는 더 이상 진동의 주된 에너지원이 아니기 때문에 음의 주파수 성분이 나타남을 알 수 있다.

이와 같이 순간주파수의 분석은 신호의 다양한 처리기법중 진동에너지의 전달매체에 대한 시나리오를 작성하는데 유용하게 쓰임을 알 수 있다.

### 6. 결 론

순간주파수의 계산시 수시로 발생하는 0보다 작은 음의 순간주파수가 나타나는 조건에 대한 연구

가 수행되었다.

연구결과, 음의 순간주파수는 알고리즘의 계산과정중 단순히 나타나는 수치적인 오차가 아니라, 신호에 존재하는 각각의 주파수 성분의 진폭비에 의해 필연적으로 나타나는 것을 확인하였고 2개의 주파수 성분을 가진 간단한 신호를 이용하여 음의 순간주파수가 나타나는 조건을 규명하였다.

규명과정에서, 순간주파수는 신호의 주파수  $\omega$  간의 차이가 진폭의 크기에 따라 영향을 받음을 밝혔다. 순간주파수의 계산 알고리즘은 대상신호가 가지고 있는 주에너지 성분간의 주파수가 떨어져 있을수록(즉, 광대역분석 일수록), 또 주에너지 성분을 이루는 진폭간의 비가 1에 접근할수록 음(-)의 값을 가지는 조건을 만족시키며, 특히 진폭비가 1에 인접하게 되면 순간주파수의 변화폭이 확장되어 해석결과가 의미가 없을 정도로 불안정하게 됨을 볼 수 있었다.

따라서 물리적으로 존재할 수 없는 음의 순간주파수를 배제시키기 위해서는 분석하고자 하는 신호를 여러개의 주파수 밴드별로 분리시킨후, 협대역별로 순간주파수의 분석을 수행하는 것이 바람직하며, 특히 진폭비가 1에 접근하는 경우에는 순간주파수 분석시 면밀한 검토가 요망된다.

이와 함께 순간주파수 분석기법의 적용예로 펌프 시스템의 진동신호를 분석하여 실제 측정된 신호에 대하여 음의 순간주파수가 나타나는 사례를 검토하였다.

## 후 기

본 연구는 저자(김정태)가 한국표준과학연구원 재직시 수행된 결과임을 밝힌다.

## 참고문헌

- (1) Kim, J. T., Lim, B. D., 1993, "Conditions of Existing Negative Components in Instantaneous Frequency Analysis," *125th Meeting of ASA*, Vol. 93. No. 4, pp. 2280, Ottawa, Canada.
- (2) Mark, W. D. 1972, "Characteristics of Stochastic Transients and Transmission Media: the Method of Power-Moments Spectra," *J. of Sound and Vibration*, 22, pp. 249~295.
- (3) Boashash, B. etc, 1990, "Algorithms for Instantaneous Frequency Estimation," *SPIE*, Vol. 1948, pp. 126~148.
- (4) Mendel, L., 1974, *Interpretation of Instantaneous Frequencies*, *AJP*, Vol. 42, pp. 840~846.
- (5) 김정태, 1992, 지하발전소 진동 및 소음의 원인 규명과 감소방안에 관한 연구, KRC-89G-J04, 한전기술원.
- (7) Aki, L. and Richards, P., 1980, *Quantitative Seismology : Theory and Methods*, Vol. 1, pp. 167~185.