

〈論 文〉

원관내 층류 왕복유동에 의한 열적발달영역에서의 열전달

이대영* · 박상진* · 노승탁**

(1993년 10월 29일 접수)

Heat Transfer by Laminar Oscillating Pipe Flow in Thermally Developing Region

Dea-Young Lee, Sang-Jin Park and Sung Tack Ro

Key Words: Oscillating Flow(왕복유동), Heat Transfer(열전달), Thermally Developing Region(열적발달영역), Length of the Thermally Developing Region(열적발달길이), Oscillation Frequency(왕복유동 주파수)

Abstract

Heat transfer by laminar oscillating flow in a circular pipe has been studied analytically. The general solution with respect to the arbitrary wall boundary condition is obtained by superposing the fluid temperatures with the sinusoidal wall temperature distributions. The fluid temperature distributions are two dimensional, but uniform flow assumption is used to simplify the velocity distribution. The heat transfer characteristics in the thermally developing regions are analyzed by applying the general solution to the two cases of thermal boundary conditions in which the wall temperature and wall heat flux distributions have a square-wave form, respectively. The results show that the length of the thermally developing region becomes larger in proportion to the oscillation frequency at slow oscillation and eventually approaches to the value comparable to the swept distance as the frequency increases. The time and cross-section averaged Nusselt number in the developing region is inversely proportional to the square root of the distance from the position where the wall boundary condition is changed suddenly. In the developed region, Nusselt number is only determined by the oscillation frequency.

기 호 설 명

a, b, c : 상수

$C_{n,k}$: 식(7)로 정의되는 S 의 함수

C_r : 식(A. 12)로 정의되는 유체에 대한 벽의 열용량비

c_p : 비열 [J/kg°C]

D : 원관의 지름 [m]

F : 무차원화된 왕복유동 주파수, $F=R\sqrt{\omega/\alpha}$

$G_{m,n}$: 식(11)로 정의되는 r 과 S_0 의 함수

g_k : 식(6)으로 정의되는 온도분포 함수

g_r : 식(A. 2)으로 정의되는 온도분포 함수

g_w : 식(A. 3)으로 정의되는 온도분포 함수

i : $\sqrt{-1}$

l : 유체의 왕복유동 거리 [m]

l_w : 벽온도의 길이방향 분포의 분포주기 [m]

l_{ws} : 정현파 형태 벽온도 분포의 분포주기 [m]

Nu : 원관반경을 특성길이로 한 Nusselt수

Nu_0 : 벽온도분포가 정현파이고 $S \rightarrow 0$ 일 때의 Nu

Nu_m : 벽온도분포가 정현파이고 $S = mS_0$ 일 때의

*정회원, 서울대학교 대학원

**정회원, 서울대학교 기계공학과

- Nu
- Pr : Prandtl수
- q_w : 무차원 벽면열유속, $q_w = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1}$
- Re_D : 원관 지름을 특성길이로 한 Reynolds 수
- R : 원관의 안쪽 반지름 [m]
- R_o : 원관의 바깥쪽 반지름 [m]
- r : 무차원 반경방향, 좌표, $r = r^+ / R$
- r^+ : 반경방향좌표 [m]
- S : 정현파 벽온도분포 주기에 대한 왕복거리의 비, $S = \pi l / 2l_w$
- S_0 : 일정한 F 에 대하여 S 를 증가시킬 때 Nu 의 비례형태가 달라지는 지점의 S
- S_c : 벽온도분포 주기에 대한 왕복거리의 비
- T : 무차원온도, $T = T^+ / T_a^+$
- T^+ : 온도 [°C]
- T_a^+ : 벽온도의 길이방향 변화진폭 [°C]
- $\Delta \bar{T}$: 시간 단면평균 무차원 온도차
- t : 시간 [s]
- u : 유속 [m/s]
- W : Womersley 수, $W = R\sqrt{\omega/\nu}$
- x : 무차원길이 방향좌표, $x = 2\pi x^+ / l_w$ 또는 $x = 2\pi x^+ / l_w$
- x^+ : 원관의 길이 방향좌표 [m]
- α : 열확산계수 [m^2/s]
- δ : 관안 반지름에 대한 두께의 비
- γ : 벽온도의 길이 방향 기울기 [°C/m]
- λ : S_0 에 대한 S_c 의 비, $\lambda = S_c / S_0$
- μ : 벽에 대한 유체의 열전도율 비
- ν : 동점성계수 [m^2/s]
- ρ : 밀도 [kg/m^3]
- σ : 벽에 대한 유체의 열확산계수 비
- τ : 무차원시간, $\tau = \omega t$
- ω : 왕복유동 각속도 [rad/s]
- $Re[z]$: 복소수 z 의 실수부
- $\langle \rangle$: 단면평균,
유체에 대하여는 $\langle g \rangle = 2 \int_0^1 g r dr$,
벽에 대하여는 $\langle g \rangle = \frac{2}{(1+\delta)^2 - 1} \int_1^{1+\delta} g r dr$
- $\bar{}$: 시간평균, $\bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g d\tau$
- $\bar{}$: 길이방향평균, $\bar{g} = \frac{1}{x} \int_0^x g dx^*$

- e : 열적발달길이
- f : 유체
- m : 벽온도분포의 m 번째 주파수 성분
- n : 시간에 따른 온도변동의 n 번째 주파수 성분
- T : 온도
- q : 벽면열유속
- w : 벽

1. 서 론

스터링기관은 외부 열원과의 열교환을 통해 출력을 발생시키는 외연기관의 일종으로 열교환기의 성능이 전체기관의 성능을 좌우할 정도로 큰 비중을 차지한다. 스테링기관의 열교환기는 가열기, 재생기, 냉각기로 구성이 되는데 이 열교환기가 차지하는 공간은 작동유체의 압축과 팽창에 기여하지 않는 불용체적으로서 기관의 비출력을 감소시키는 요인이 되므로 이러한 열교환기의 체적은 필요한 도의 최소크기로 유지하여야 한다.

스터링기관의 열교환기에서의 유동형태는 주기적으로 유동방향이 바뀌는 왕복유동으로서, 현재까지 이 경우의 유동 및 열전달에 대한 명확한 해석이나 실험결과가 알려져 있지 않다. 현재 스테링기관의 설계 및 성능해석에 있어서는 왕복유동을 준정상상태로 가정하여 일방향 유동에 대한 기존의 자료를 이용하고 있는데 이러한 성능해석결과는 많은 경우에 있어서 실제 제작된 기기의 성능과 큰 차이를 나타낸다.^(1,2) 또한 특정기관의 성능과 잘 일치하도록 제반손실에 대한 보정을 한 성능해석 프로그램이라 하더라도 다른 기기에 대하여는 성능 예측에 있어서 큰 차이를 나타내기도 한다.^(3,4) 이러한 차이에는 여러가지 원인이 있으나 대부분 일방향 정상유동과 왕복유동에서의 유동 및 열전달이 상이하기 때문이며, 스테링기관의 성능향상을 위해서는 왕복유동에서의 유동 및 열전달에 대한 연구가 필수적이다.

왕복유동에서의 유동현상에 대하여는, Uchida⁽⁵⁾가 완전발달된 층류 왕복유동에서의 유동장울 해석한 이래 Hino⁽⁶⁾와 Seume⁽⁷⁾ 등이 왕복유동에서의 층류 난류 천이조건에 대하여 연구하였으며, Simon 등⁽⁸⁾은 왕복유동상태에서의 난류구조에 대한 연구를 수행하고 있다.

그러나 열전달에 대하여는, Hwang⁽⁹⁾이 스테링

기기의 열교환기와 유사한 형태의 장치에 대하여 왕복유동의 주기 및 진폭을 변화시키며 실험한 바 있으나 각 변수에 대한 의존성을 명확히 보여주지는 못하였다. 실질적으로 왕복유동에 있어서의 열전달에 영향을 미치는 인자에는 작동유체의 물성을 제외하더라도 열교환기의 형태 및 크기, 운전조건 등이 있으며, 또한 열교환기 내에서의 온도장은 위상각 및 위치에 따라 변화하므로 이러한 복잡한 현상을 실험을 통하여 명확하게 해석하기란 거의 불가능하다.

한편 Kurzweg,⁽¹⁰⁾ Gedeon⁽¹¹⁾ 등은 벽 온도구배가 축방향에 대하여 일정하고 유동장 및 온도장이 완전발달된 경우에 대한 해석을 통하여 왕복유동이 있을 때의 열전달 특성이 일방향 유동의 경우와 차이가 있음을 보인 바 있다. 그러나 스테어링기의 열교환기에서는 열교환기 외벽면을 통한 열의 출입으로 열교환기 벽면의 축방향 온도 기울기가 일정하지 않으며, 열교환기의 길이에 대한 왕복유동 진폭의 비가 대략 1~3 정도가 되어 대부분의 운전조건에서 열교환기 내부의 유동 및 온도장은 발달영역(developing region)에 속하게 되므로 Kurzweg 등의 연구결과를 직접 적용하기에는 무리가 따르게 된다.

따라서 스테어링 열교환기에서의 유동 및 열전달을 해석하기 위해서는 열교환기 벽면의 온도분포가 선형적이지 않은 경우에 대한 해석 및 벽경계조건의 급작스런 변화에 따른 발달 영역에 대한 연구가 필요하다.

본 연구에서는 벽경계조건, 즉 벽온도 또는 벽열유속분포가 임의의 형태인 경우에 유체의 온도장에 대한 해석해를 구하였다. 또한 이 해석해를 이용하여 열적발달영역에서의 Nusselt수를 위치에 대한 함수의 형태로 구하였다.

2. 해 석

2.1 벽온도분포가 정현파인 경우

벽온도분포의 기울기가 일정하지 않은 경우에 대한 열전달과정 해석을 위하여 Fig. 1에 나타난 바와 같이 원관내부에 왕복유동이 존재하고 원관의 벽온도가 길이방향에 대하여 정현파로 분포하고 있는 경우에 대하여 해를 구한다. 일반적인 경우 열교환기의 특성길이가 반경에 비해 상당히 크므로 축방향 전도의 영향을 무시할 수 있으며, 해석의

편의를 위하여 모든 물성치는 온도에 무관하게 일정하다고 놓으면 에너지 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T^+}{\partial t} + u \frac{\partial T^+}{\partial x^+} = \alpha \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \right),$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial r^+} \Big|_{r^+=0} = 0, \quad T^+ \Big|_{r^+=R} = T_a^+ \sin(2\pi x^+ / l_{ws}) \quad (1)$$

위의 식에서 R 은 원관의 반지름이고, l_{ws} 는 정현파 벽온도분포의 주기이며, Fig. 1에 나타난 바와 같다. 해석의 편의를 위하여 유체의 축방향 속도분포는 시간에 대하여 정현파 형태로 변화하고 반경방향에 대해서는 균일하다고 가정하여 유체의 속도는 다음식과 같이 놓는다. 균일한 속도분포 가정에 대한 타당성 여부는 부록에서 논의하였다.

$$u = \frac{l\omega}{2} \cos \omega t \quad (2)$$

여기서, l 은 유체입자의 길이방향 왕복유동 거리이고 ω 는 각속도이다.

다음의 무차원변수

$$T = \frac{T^+}{T_a^+}, \quad \tau = \omega t, \quad x = 2\pi \frac{x^+}{l_{ws}}, \quad r = \frac{r^+}{R} \quad (3)$$

를 도입하여 지배방정식을 무차원화하면 아래와 같이 된다.

$$F^2 \frac{\partial T}{\partial r} + 2F^2 S \cos \tau \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$

$$T \Big|_{r=1} = T_w = \sin x$$

$$F \equiv R \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}$$

$$S \equiv \frac{\pi l}{2 l_{ws}} \quad (4)$$

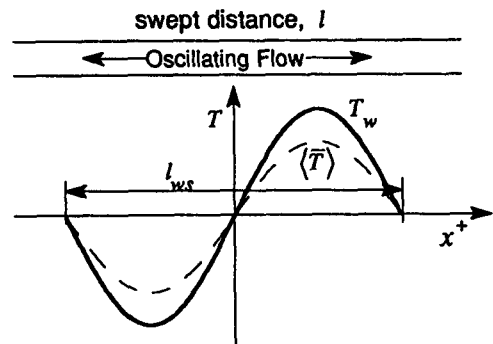


Fig. 1 Model for analysis of the fluid temperature with the sinusoidal distribution of the wall temperature

여기에서, F 는 Stokes의 열경계층 두께에 대한 반경의 비를 나타내는 무차원수이고, S 는 정현파 벽온도분포의 특성길이에 대한 왕복유동 거리의 비를 의미한다. 개념적으로 F 와 S 는 각각 왕복유동의 두가지 주요 인자인 주파수와 유동거리에 해당하는 무차원수이다. 식(4)에 대한 해는 이대영 등⁽¹²⁾이 구한 바 있으며 그 결과만을 나타내면 다음식과 같다.

$$T = \sin x + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k}(S) g_k \sin x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1, k \neq 0}^{\infty} C_{2n,k}(S) g_k e^{2ni\tau} \sin x + i \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n-1,k}(S) g_k e^{(2n-1)i\tau} \cos x \right\} \right] \quad (5)$$

$$g_k \equiv 1 - \frac{I_0(F\sqrt{ik}r)}{I_0(F\sqrt{ik}r)} \quad (6)$$

$$C_{n,k}(S) \equiv (-1)^{k+1} 2J_k(2S)J_{n-k}(2S) \quad (7)$$

J_n : Bessel function of first kind of order n
 I_n : Modified Bessel function of first kind of order n

2.2 일반적인 경계조건의 경우

지배방정식이 선형 제차미분방정식이므로 위의 해를 중첩하여 좀 더 복잡한 벽온도분포에 대한 해를 얻을 수 있다. 벽온도분포가 일반적인 주기적 형태를 가질 때 길이 방향좌표 x^+ 를

$$x = 2\pi \frac{x^+}{l_w} \quad (8)$$

와 같이 벽온도분포의 분포주기 l_w 로 무차원화하면 벽온도분포를

$$\begin{aligned} T_w &= \sum_{m=1}^{\infty} \{ a_{Tm} \sin mx + b_{Tm} \cos mx \} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{Tm} e^{imx} \\ c_{Tm} &= \frac{1}{2} (b_{Tm} - ia_{Tm}) \\ c_{Tm} &= \frac{1}{2} (b_{Tm} + ia_{Tm}), \quad m > 0 \\ c_{T0} &= \frac{1}{2} b_{T0} \end{aligned} \quad (9)$$

와 같이 무한 푸리에급수로 전개할 수 있으며, 각 항이 $\sin mx$ 의 꼴이므로 식(9)의 각 항에 대한 유체의 온도장을 식(5)를 이용하여 구할 수 있다. 따라서 벽온도분포가 식(9)로 주어질 때의 해는 다음과 같이 중첩된 형태로 구하여진다.

$$T = \operatorname{Re} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{Tm} e^{im\tau} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} G_{m,n}(r, S_0) e^{in\tau} \right\} \right] \quad (10)$$

위식에서 $G_{m,n}$ 은

$$\begin{aligned} G_{m,0}(r, S_0) &\equiv \sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k}(mS_0) g_k(r) \\ G_{m,n}(r, S_0) &\equiv (-1)^n \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{n,k}(mS_0) g_k(r), \\ & \quad n > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

와 같이 정의되는 함수이며, S_0 는 유체의 왕복거리에 대한 식(9)로 나타낸 벽온도의 분포주기의 비를 나타내는 무차원수로서 다음식으로 정의된다.

$$S_0 = \frac{\pi l}{2l_w} \quad (12)$$

식(12)는 식(4)에서 정의한 S 와 유사한데, S 는 순수 정현파 온도분포의 경우에 대한 왕복거리비를 나타내며, S_0 는 임의형태의 벽온도분포의 분포주기에 대한 왕복거리비를 나타낸다.

이 때의 유체의 시간평균 온도분포는 다음과 같다.

$$\bar{T} = T_w + \operatorname{Re} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{Tm} G_{m,0}(r, S_0) e^{imx} \right] \quad (13)$$

스터링기기의 열교환기의 경우에 벽면에서의 경계조건은 온도분포보다는 열유속분포로 주어지는 경우가 많으며, 이 열유속분포는 시간에 관계없이 파이프길이 방향에만 의존하는 형태로 주어진다. 그러나 파이프 벽의 열용량이 0이 아닐 경우, 즉 파이프 벽두께가 0이 아닐 경우에는 파이프 벽이 순간적으로 열을 흡수방출하는 효과에 의하여 관내벽면에서의 열유속은 왕복유동의 한주기 안에서 시간에 따라 변동하게 된다. 이때 온도장이 주기 정상상태를 만족한다면 내벽면에서 열유속분포의 시간평균값은 외벽면에서의 열유속과 같아야 한다. 따라서 경계조건을 외벽면에서의 열유속분포로 주는 대신 내벽면에서 열유속분포의 시간평균값으로 줄 수 있다.

$$\bar{q}_w = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{qm} e^{imx}, \quad c_{q0} = 0 \quad (14)$$

위 식에서 c_{q0} 는 열유속의 파이프길이 방향 평균값으로 이 값이 0이 아니면 주기 정상상태에 도달할 수 없으므로, 이 경우의 해는 식(5)와 다른 형태가 된다.

열유속이 경계조건으로 주어질 때, 벽과 유체의

열용량 비에 따라서는 벽면을 통한 열의 출입으로 파이프 내벽면의 온도가 시간에 따라 변동하게 될 수도 있는데, 이런 경우에는 식(5)를 구할 때 적용한 벽온도가 시간에 관계없이 일정하다는 가정에 위배되므로 식(10)의 형태로 해를 구할 수 없다. 그러나 일반적인 경우 파이프의 열용량은 유체에 비하여 상당히 크며, 이 때 벽온도의 진동정도는 부록에 밝힌 바와 같이 무시할 수 있으므로 열유속 분포가 경계조건으로 주어질 경우에도 식(10)의 형태로 해를 구할 수 있다.

유체의 온도분포를 식(10)의 형태로 나타낼 수 있다면 벽면 열유속분포는 다음의 관계식을 만족시켜야함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{q}_w &= \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right|_{r=1} \\ &= \text{Re} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{7m} G'_{m,0} e^{imx} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

위에서 '은 벽면에서의 반경방향 기울기를 나타내며 $G'_{m,0}$ 은 다음식으로 정의된다.

$$\begin{aligned} G'_{m,0} &\equiv \left. \frac{\partial G_{m,0}}{\partial r} \right|_{r=1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k}(mS_0) g'_k \end{aligned} \quad (16)$$

따라서 벽면열유속분포의 푸리에 계수 c_{7m} 과 벽 온도분포의 푸리에 계수 c_{7m} 사이에는 다음의 관계식이 성립한다.

$$c_{7m} = \frac{C_{qm}}{\text{Re}[G'_{m,0}]} \quad (17)$$

위의 관계식을 식(10)에 대입하면 벽면열유속분포가 경계조건으로 주어질 때의 유체의 온도분포를 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{C_{qm}}{\text{Re}[G'_{m,0}]} e^{imx} \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\text{Re}[G'_{m,0}]} \text{Re} \left[c_{qm} e^{imx} \sum_{n=0}^{\infty} G_{m,n} e^{inr} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

3. 열적발달영역

식(10)과 식(18)을 이용하면 벽면 경계조건의 파이프 길이방향 분포형태의 급격한 변화에 의한 유체 온도분포 및 열전달과정의 영향을 고찰할 수 있으며 이러한 급격한 경계조건의 변화에 의하여

직접적으로 영향을 받는 과도영역, 즉 열적발달영역의 길이를 구할 수 있다.

열적발달영역에서의 열전달과정을 고찰하기 위하여 벽면에서의 경계조건(벽온도 또는 열유속)이 Fig. 2와 같이 사각파 형태로 분포된 경우에 대하여 해를 구하였다. 벽 경계조건의 계단형태 변화에 의한 열적발달영역에서의 열전달과정을 고찰하기 위해서는 Fig. 2에 나타난 사각파 형태의 경계조건에 대한 해로부터 사각파 온도분포의 분포주기 l_w 가 무한대인 경우의 극한을 취하면 된다. 그러나 온도장에 대한 해 자체가 상당히 복잡하므로 이론적으로 그 극한에서의 함수 형태를 구하기는 쉽지 않다. 따라서 본 연구에서는 단순히 Fig. 2에 나타난 사각파 형태 경계조건의 분포주기 l_w 가 왕복유동거리 l 보다 충분히 긴 경우에 해당하는

$$S_0 \ll 1 \quad (19)$$

인 경우에 대하여 해를 구하였다. 이러한 근사적 방법이 의미를 가지려면 이 때의 열적발달영역에서의 열전달이 벽면 경계조건의 분포주기와 무관하여야 한다.

3.1 열적발달영역에서의 온도분포

3.1.1 벽온도가 계단형태로 분포된 경우

벽온도가 계단형태로 분포된 경우, 벽온도분포는 다음과 같이 푸리에급수로 나타낼 수 있다.

$$T_w = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin(2m-1)x \quad (20)$$

식(20)과 식(10)을 이용하면 유체의 온도분포는 다음과 같이 구하여 진다.

$$T = T_w + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \text{Re} \left[G_{2m-1,0} \sin(2m-1)x \right]$$

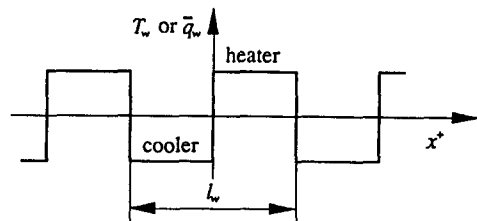


Fig. 2 Wall boundary condition for the analysis of the heat transfer processes in the thermally developing region

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \{G_{2m-1,2n} e^{2nir} \sin(2m-1)x - iG_{2m-1,2n-1} e^{(2n-1)ir} \cos(2m-1)x\} \quad (21)$$

유체의 시간 단면평균온도 $\langle \bar{T} \rangle$ 를 $l \ll l_w$ 인 경우에 대하여 Fig. 3에 나타내었다. 이 그림에서 횡축은 파이프의 길이 방향좌표 x^+ 를 유체의 왕복유동 거리 l 로 규준화한 x^+/l 이다. 그림으로부터 시간 단면평균온도의 파이프 길이방향 분포는 벽온도가 계단형태로 바뀌는 지점으로부터의 무차원 거리 x^+/l 과 주파수 인자 F 에만 의존하는 것을 알 수 있다. 식(21)로 구한 온도분포에서 $G_{m,n}$ 이 S_0 에 의존하므로, 유체의 온도분포는 l_w 에 의존하게 되나 $l \ll l_w$ 일 때 $x^+=l$ 근처에서의 온도분포는 왕복거리에 대한 벽온도분포 주기의 비인 l/l_w 에 관계없이 x^+/l 에 의해서만 결정된다.

온도가 벽온도와 같아지는 거리는 주파수 인자 F 가 커질수록 길어져서 F 가 2보다 큰 경우에는 $x^+/l=1$ 로 일정하게 되고, $x^+/l < 1$ 인 영역에서 벽과 유체의 온도차가 점차 커지며, F 가 더욱 증가하면 이 온도차의 분포는 일정한 형태로 수렴하게 된다. 열적발달길이는 유체의 시간단면평균온도가 벽온도와 같아지게 되는 거리로 취할 수 있다.

왕복유동 주파수가 무한대인 경우에 해당하는 $F \rightarrow \infty$ 일 때 열적발달길이가 유체의 왕복유동 거리 l 로 수렴하게 되는 것은 $x^+ > 1$ 인 지점의 유체는 왕복유동하더라도 $x^+ < 0$ 인 지점에 도달할 수 없어서 벽온도의 변화를 경험할 수 없기 때문에 열적발달길이가 l 보다 커질 수 없음에 기인한다. 즉 벽온도가 Fig. 2와 같이 사각파 형태로 유지될 때 벽온

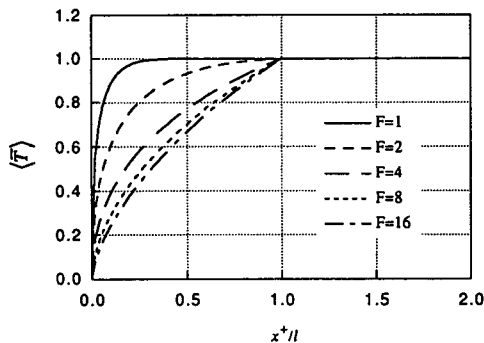


Fig. 3 Distribution of the section-time-averaged fluid temperature in the thermally developing region with the sudden change of the wall temperature

도가 계단형태로 변화하는 경계조건의 영향은 파이프의 길이방향으로 왕복유동의 거리보다 더 멀리 전파될 수는 없다.

이러한 결과는 왕복유동의 주파수가 클 때 속도 분포의 완전발달길이가 왕복유동거리와 같다는 Iguchi⁽¹³⁾의 결과와 일맥 상통한다.

3.1.2 벽면열유속이 계단형태로 분포된 경우

벽면열유속이 Fig. 2와 같이 분포되어 있을 경우의 유체온도분포는 식(18)에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{q}_w &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin(2m-1)x \quad (22) \\ T &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1) \operatorname{Re}[G'_{2m-1,0}]} \operatorname{Re} \\ &\quad \left[(1 + G_{2m-1,0}) \sin(2m-1)x \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \{G_{2m-1,2n} e^{2nir} \sin(2m-1)x \right. \\ &\quad \left. - iG_{2m-1,2n-1} e^{(2n-1)ir} \cos(2m-1)x\} \right] \quad (23) \end{aligned}$$

위 식으로부터 벽온도, T_w 과 유체의 시간 단면 평균온도, $\langle \bar{T} \rangle$ 는 다음과 같이 구하여진다.

$$\begin{aligned} T_w &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1) \operatorname{Re}[G'_{2m-1,0}]} \sin(2m-1)x \quad (24) \\ \langle \bar{T} \rangle &= T_w + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1) \operatorname{Re}[G'_{2m-1,0}]} \operatorname{Re}[G'_{2m-1,0}] \sin(2m-1)x \quad (25) \end{aligned}$$

파이프길이 방향에서의 벽온도와 유체의 시간 단면평균온도 분포를 Fig. 4에 나타내었다. 벽온도 분포가 사각파 형태일 때와는 달리 $x^+=l$ 근처에서의 온도분포가 왕복거리에 대한 벽온도분포 주기의 비에 따라 달라지며, 파이프길이 방향에 대한 기울기도 일정하지 않으므로 벽온도나 시간단면평균온도의 분포형태로부터 열적발달길이를 구할 수는 없다. 그러나 $l \ll l_w$ 일 때 $x^+=l$ 근처에서의 벽온도와 유체의 시간 단면평균온도 차이의 분포를 나타낸 Fig. 5에서 볼 수 있는 바와 같이, 이 온도차는 l/l_w 에 관계없이 x^+/l 에 의해서만 결정되며 따라서 이 온도차의 분포형태로부터 열적발달길이를 구할 수 있다. 또한 Fig. 5로부터 벽온도가 사각파 형태로 유지될 경우와 마찬가지로, 온도차가 일정한 크기로 수렴하게 되는 거리는 주파수 인자 F 가 커질수록 길어지다가 F 가 어느정도 커지면 일정한 값에 수렴하게 되는 것을 알 수 있다. 그러

나 F 가 클 때의 열적발달길이는 벽온도분포가 사각파인 경우보다는 길어서 대략 왕복유동거리의 2 배 정도가 된다. 이때 파이프 길이방향으로의 온도 차분포는 벽온도분포가 사각파인 경우 $x^+ < 1$ 일 때 x^+ 가 커짐에 따라 단조감소하는데 비하여, $x^+/l \approx 0.6$ 에서 최대값을 가지고 $x^+/l=1$ 에서 국소최소값을 가지며, x^+ 가 커질수록 다시 증가하여 일정한 값에 수렴하게 되는 것을 알 수 있다. 이렇게 열적

발달길이 및 온도차의 분포형태가 다른 것은 벽면 열유속분포가 사각파인 경우 벽온도분포의 발달길이 역시 1정도의 길이가 되기 때문이며, 이에 따라 벽온도분포가 사각파인 경우보다 열적발달길이가 대략 2배가 되고 온도차의 분포 역시 벽온도분포가 사각파인 경우와는 다르게 된다.

3.2 열적발달길이

식(25)로부터 열유속분포가 사각파형태일 때 벽온도와 유체의 시간 단면평균온도의 차이는 이대영 등⁽¹²⁾이 벽온도분포가 정현파인 경우에 대하여 제시한 Nusselt수의 정의를 이용하여

$$\begin{aligned} \Delta \bar{T} &\equiv T_w - \langle \bar{T} \rangle \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)} \frac{\sin(2m-1)x}{Nu_{2m-1}} \end{aligned} \quad (26)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 위 식에서 Nu_m 은 다음의

$$Nu_m = -\text{Re}[G'_{m,0}] / \text{Re}[\langle G_{m,0} \rangle] \quad (27)$$

와 같으며 벽온도가 주기 l_w/m 의 정현파로 유지되고 유체의 왕복유동거리가 l 일 때의 Nusselt수이다.

이대영 등⁽¹²⁾의 결과를 이용하여 주파수 인자 F 와 왕복유동거리비 S 에 따른 Nu 의 개략적인 비례형태를 Fig. 6에 도시하였는데, 각 독립변수의 범위에 따라 Nu 의 비례형태가 다른 것을 알 수 있다. 일정한 F 에 대하여 S 를 증가시킬 때 Nu 의 비례형태가 달라지는 지점의 S 를 S_c 라 정의하면 S 의 크기에 따라 Nu 의 근사값을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S \ll S_c \quad Nu \approx Nu_0, \quad Nu_0 \equiv \lim_{S \rightarrow 0} Nu$$

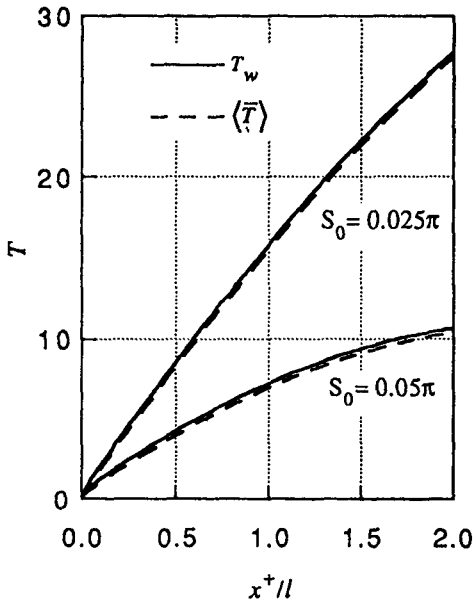


Fig. 4 Wall temperature and section-time-averaged fluid temperature in the thermally developing region with the sudden change of the wall heat flux($F=4$)

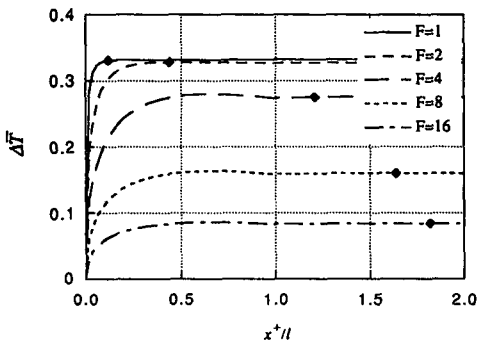


Fig. 5 Section-time-averaged difference between wall and fluid temperatures in the thermally developing region with the sudden change of the wall heat flux

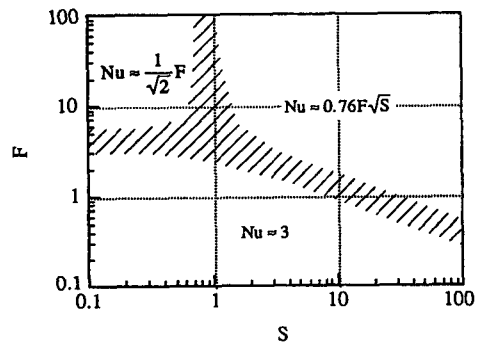


Fig. 6 Variation of Nusselt number with respect to the frequency parameter and the swept distance ratio

$$S \gg S_c \quad Nu \approx 0.76F\sqrt{S}$$

Nu_0 는 S 가 작을 때의 Nu 로서 F 만의 함수가 된다. 위의 관계식을 이용하여 벽온도와 유체의 시간단면평균온도 차이를 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta \bar{T} \approx \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{Nu_0} \sum_{m=1}^{((\lambda+1)/2)} \frac{\sin(2m-1)x}{(2m-1)} + \frac{1}{0.76F\sqrt{S_0}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{(2m-1)^{1.5}} \right\}$$

$$\lambda \equiv \frac{S_c}{S_0} \tag{29}$$

위 식에서 []는 가우스 함수를 나타낸다. 식(29)의 우변 둘째 항의 각 항들은 첫째 항의 각 항들이 m^{-1} 에 비례하는 데 비하여 $m^{-1.5}$ 에 비례하므로 수렴의 속도가 첫째 항보다 훨씬 빠르다. 또한 식(19)와 같이 S_0 를 작은 값으로 취하였으므로 λ 는 상당히 큰 값이 되고 S_0^{-1} 에 비례하므로 둘째 항은 첫째 항에 비하여 무시할 수 있다. 따라서 식(29)는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\Delta \bar{T} \approx \frac{1}{Nu_0} \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{((\lambda+1)/2)} \frac{\sin(2m-1)x}{(2m-1)} \tag{30}$$

위 식의 우변은 사각파를 항의 개수 $[(\lambda+1)/2]$ 인 유한 푸리에 급수의 합으로 근사한 식과 동일하며, 이러한 경우 급수의 합이 $x = \pi/[\lambda]$ 에서 최대값을 가지는 것이 깃스현상(gibbs phenomenon)으로 알려져 있다. 온도차가 $x=0$ 에서 0의 값을 가지고 x 가 커질수록 점차 증가하여 일정한 값에 수렴하게 되는 거리인 열적발달길이를 유한 푸리에 급수의 합이 최대값을 가지는 위치에 비례하는 것으로 정의하면 열적발달길이 x_e 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_e = c_e \frac{\pi}{\lambda} \tag{31}$$

위의 식에서 c_e 는 비례상수인데 열적발달 길이에 대한 위의 정의가 타당하다면 c_e 의 크기는 $O(1)$ 이 되어야 한다. Fig. 6을 참조하면 S_c 는 F 의 범위에 따라 다음식

$$F \rightarrow 0 \quad S_c \approx \frac{9}{0.76^2} F^{-2}$$

$$F \rightarrow \infty \quad S_c \approx \frac{1}{2 \times 0.76^2} \tag{32}$$

과 같이 구하여지며 위의 식과 식(31)을 이용하면 열적발달길이 x_e^* 는 다음과 같다.

$$F \rightarrow 0 \quad x_e^* \approx \frac{1}{18} c_e' F^2 l$$

$$F \rightarrow \infty \quad x_e^* \approx c_e' l \tag{33}$$

$$c_e' = \frac{0.76^2 \pi}{2} c_e \tag{34}$$

위의 식으로부터 열적발달 길이는 열유속분포의 주기와는 관계없음을 확인할 수 있으며 Fig. 5에 보인 바와 같이 x^*/l 는 F 가 작아질 때 F^2 에 비례하여 작아지며 F 가 커지면 일정해지는 것을 알 수 있다. Fig. 5로부터 F 가 무한대로 증가할 때 열적발달길이는 대략 $2l$ 에 수렴하는 것을 알 수 있으므로, 이 관계를 만족하도록 식(33)의 비례상수 c_e' 의 값을

$$c_e' = 2 \tag{35}$$

로 정하면 식(31)을 이용하여 모든 F 의 범위에서 열적발달길이를 구할 수 있다. 식(34)에 의해 $c_e = 2.20$ 이 되는 것을 알 수 있으며, 이로부터 열적발달길이에 대한 식(31)의 정의가 타당함을 알 수 있다. 주파수 인자 F 에 따른 열적발달길이의 변화와 식(33)에 의한 열적발달길이의 근사값을 함께 나타낸 Fig. 7로부터 F 가 대략 2 근처의 값을 가질 때를 제외하고는 식(33)으로 구한 근사식이 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 5에 위에서 구한 열적발달 거리를 \blacklozenge 로 표시하였는데, 열적발달길이를 구하는데 적용한 근사식(식(30)) 및 정의(식(31))가 엄밀하지 않음에도 불구하고 실제와 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

일방향 층류 파이프유동에 있어서 유동장이 완전 발달된 경우에 열적발달길이는 $x_e^*/D \approx 0.05 Re_D Pr$ 로 알려져 있는데, 이 식의 속도에 왕복유동에서의 최대속도 $lw/2$ 를 대입하고 정리하면 다음식으로

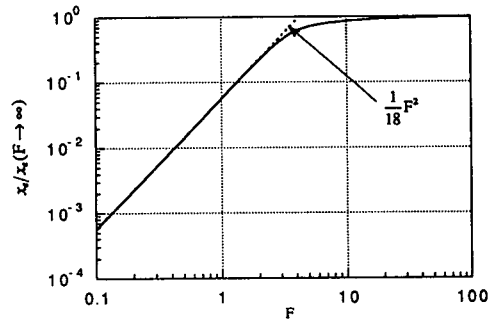


Fig. 7 Variation of the length of thermally developing region with respect to the frequency parameter

나타낼 수 있다.

$$x_e^+ \approx \frac{1}{10} F^2 l \quad (36)$$

이 식은 식(33)과 매우 유사하며 따라서 F 가 작을 때의 열적발달길이는 일방향유동의 경우와 유사하게 됨을 알 수 있다. 왕복유동과 일방향유동에서의 각각의 비례상수 1/9과 1/10의 차이는 열적발달길이 정의의 모호함에서 비롯된 것으로 큰 의미는 없다.

벽온도분포가 사각파형태일 때에는, 열유속분포가 경계조건으로 주어진 경우처럼 F 에 따른 열적발달길이를 현시적으로 구하기는 어려우나 각각의 F 값에 대한 유체온도분포의 고찰을 통하여 $F \rightarrow 0$ 일 때 열적발달길이가 $(1/3)F^2$ 에 비례함을 알 수 있다.

3.3 열적발달영역에서의 열전달

Fig. 5를 참고하면 열유속이 계단형태로 분포된 경우에 완전발달영역에서 온도차는 F 가 작을 때에는 일정하게 유지되다가 F 가 증가할수록 F 에 반비례하여 감소함을 알 수 있다.

F 에 따른 열적발달길이로 무차원화한 파이프 길이방향 거리에 대하여 F 에 따른 완전발달영역에서의 온도차로 무차원화한 온도차분포를 F 가 극소와 극대값을 가지는 경우에 대하여 Fig. 8에 나타내었다. $F \rightarrow 0$ 일 때와 $F \rightarrow \infty$ 일 때의 각각의 경우에 무차원길이 좌표에 대한 무차원 온도차분포는 Fig. 8에 나타낸 형태로 수렴하게 되는데, 각각의 분포 형태가 서로 다름을 알 수 있다.

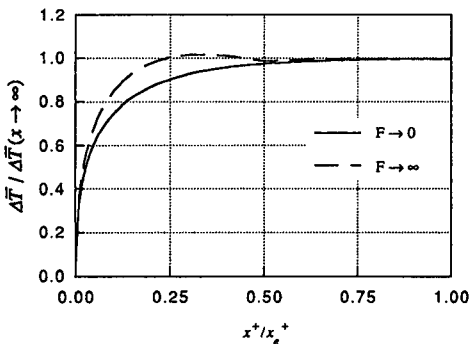


Fig. 8 Distribution of the section-time-averaged difference between wall and fluid temperatures in the thermally developing region when $F \rightarrow 0$ and $F \rightarrow \infty$

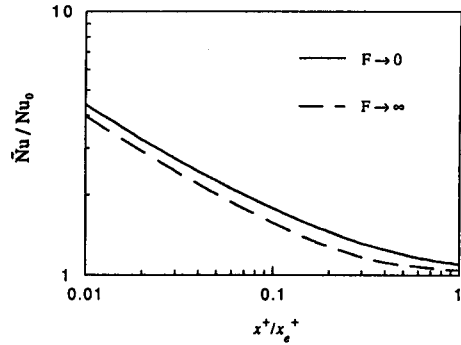


Fig. 9 Distribution of Nusselt number averaged from zero to a certain x in the thermally developing region

벽과 유체의 온도차를 유한 푸리에급수의 합으로 나타낸 식(30)에서 항의 개수에 의한 영향은 열적발달길이 내에서만 나타나며 그외의 영역에서는 영향이 거의 없다. 따라서 완전발달영역에서의 온도차분포는 식(30)과 식(22)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \bar{T} \approx \frac{1}{Nu_0} \bar{q}_w(x) \quad (37)$$

완전발달영역에서 $\bar{q}_w / \Delta \bar{T}$ 즉 Nu 는 Nu_0 로 일정해짐을 알 수 있으며, 열적발달길이 이내에서는 온도차의 감소로 Nu 가 증가하게 된다. 열적발달영역에서의 파이프길이 방향 평균 Nu 를

$$\bar{Nu} = \int_0^x \bar{q}_w dx / \int_0^x \Delta \bar{T} dx \quad (38)$$

와 같이 정의하여 F 가 극소일 때와 극대일 때, \bar{Nu} 의 분포를 나타내면 Fig. 9와 같다. 그림으로부터 발달영역내에서 \bar{Nu} 는 $x^{-1/2}$ 에 비례하며, x^+ / x_e^+ 가 1이 되면 Nu_0 로 거의 일정해지는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

원관 내부에서 유체가 왕복유동하고 벽온도분포가 정현파인 경우의 유체 온도장에 대한 해석해를 중첩하여 임의의 벽온도분포와 열유속분포의 경계조건에 대한 일반해를 구하였다.

벽 경계조건, 즉 벽온도와 열유속이 각각 계단형태로 분포된 경우에 대하여 일반해를 적용하여 열적발달영역에서의 열전달을 연구하였다. 왕복유동

이 있을 때 열적발달길이는 왕복주파수가 작을 때에는 왕복주파수에 비례하여 커지다가 왕복주파수가 커지게 되면 일정해지는데 벽온도분포가 계단형태일 때에는 유체의 왕복거리로, 벽면열유속이 일정한 경우에는 왕복거리의 2배로 수렴한다.

왕복주파수가 작을 때 열적발달길이가 왕복주파수에 비례하는 것은 일방향유동에서 이 거리가 Reynolds수에 비례하는 것과 유사한 것으로 준정상상태 가정이 타당함을 의미한다.

한편 왕복주파수가 커지게 되면 전도항의 크기가 상대적으로 작아져 시간미분항과 대류항이 균형을 이루게 되어 일방향유동의 경우와 차이가 생기게 된다. 이때 열적발달길이가 더이상 왕복주파수에 비례하여 증가하지 않고 유체의 왕복유동거리 정도로 수렴하게 되는 것은 벽 경계조건이 바뀌는 지점으로부터 왕복유동거리보다 더 멀리 떨어진 곳에 위치하는 유체입자들은 왕복유동하더라도 벽 경계조건이 바뀌는 지점에 도달하지 못하여 벽 경계조건의 변화에 영향받지 않기 때문이다. 또한 벽면열유속이 계단형태로 분포된 경우가 벽온도가 계단형태로 분포된 경우보다 열적발달길이가 더 긴 것은 전자의 경우, 벽온도가 완전 발달된 특성을 갖게 되는 데 역시 왕복거리 만큼의 길이가 필요하기 때문이다.

열적발달영역에서 Nu 는 축방향 위치에 의존하는데, 벽 경계조건이 바뀌는 지점으로부터의 거리의 제곱근에 반비례하며, 완전 발달영역에서는 왕복주파수에 의해서 결정되는 일정한 값으로 수렴한다. 이 값은 벽온도가 정현파로 분포되고 유체의 유동거리가 벽온도의 분포주기보다 상당히 작을 때의 Nu 와 같다.

본 연구에서 임의의 벽 경계조건에 대한 일반해를 구하였으므로 스테링기기의 열교환기와 같이 복잡한 경계조건을 가진 경우에도 적용이 가능하리라 생각되며, 특히 Hwang⁽⁹⁾의 실험과 같이 가열기와 냉각기만으로 구성된 열교환기에 대해서는 직접적인 적용이 가능하다. 그러나 실제의 스테링기기의 열교환기에는 가열기와 냉각기 사이에 존재하므로 본 연구에서 취급한 단면적이 일정한 경우에 대한 해를 직접적으로 적용하기는 쉽지 않다. 따라서 스테링기기의 열교환기에서의 열전달 과정을 연구하기 위해서는 관의 수력직경이 길이 방향에 대하여 변화하는 경우에 대한 연구가 수행되어야 하며, 또한 왕복유동과 더불어 압축과 팽창이 있는 경우에

대한 연구가 필요하다.

후 기

본 연구는 서울대학교 터보동력기계 연구센터의 지원에 의하여 수행되었습니다. 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Walker, G., Weiss, M., Fauvel, R. and Reader, G., 1990, "Adventures with Marweiss: A Summary of Experience with Stirling Simulation," *Proc. 25th IECEC*, Vol. 5, pp. 342~345.
- (2) Cairelli, J. E., Diane, M. S., Skupinski, R. C. and Rauch, J. S., 1990, "Update on Results of SPRE Testing at NASA," *Proc. 25th IECEC*, Vol. 5, pp. 237~244.
- (3) Tew, R. C., Thieme, L. G. and Dudenhofer, J. E., 1990, "Recent Stirling Engine Loss-Understanding Results," *Proc. 25th IECEC Proceedings*, Vol. 5, pp. 377~385.
- (4) Tew, R. C. and Geng, S. M., 1992, "Overview of NASA Supported Stirling Thermodynamic Loss Research," *Proc. 27th IECEC*, Vol. 5, pp. 489~494.
- (5) Uchida, S., 1956, "The Pulsating Viscous Flow Superposed on the Steady Laminar Motion of Incompressible Fluid in a Circular Pipe," *Z. angew. Math. Phys.*, Vol. 7, pp. 403~422.
- (6) Hino, M., Sawamoto, M. and Takasu, S., 1976, "Experiments on Transition to Turbulence in an Oscillatory Pipe Flow," *I. Fluid Mech.*, Vol. 75, Part. 2, pp. 193~207.
- (7) Seume, J. R., 1988, *An Experimental Investigation of Transition in Oscillation Pipe Flow*, Ph. D Thesis, Univ. of Minnesota.
- (8) Simon, T. W., Kannapareddy, M., Ibrahim, M., Johnson, T. and Friedman, G., 1992, "Transition of Oscillatory Flow in Tubes: An Empirical Model for Application to Stirling Engines," *Proc. 27th IECEC*, Vol. 5, pp. 495~502.
- (9) Hwang, M. F. and Dybbs, A., 1983, "Heat Transfer in a Tube with Oscillatory Flow,"

ASME Paper 83-WA/HT-90.

- (10) Kurzweg, U. H., 1985, "Enhanced Heat Conduction in Fluids Subjected to Sinusoidal Oscillation," *J. Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 459~462.
- (11) Gedeon, D., 1986, "Mean-Parameter Modeling of Oscillating Flow," *J. Heat Transfer*, Vol. 35, No. 2, pp. 158~164.
- (12) 이대영, 박상진, 노승탁, 1993, "벽온도 분포가 정현파인 원관에서 왕복유동에 의한 열전달 해석," 대한기계학회논문집, 제17권, 제12호, pp. 3208~3216.
- (13) Iguchi, M., Park, G. M., Akao, F. and Yamamoto, F., 1992, "A Study on Velocity Profiles of Developing Laminar Oscillatory Flows in a Square Duct," *JSME Int. J.*, Vol. 35, No. 2, pp. 158~164.
- (14) Kaviany, M., 1990, "Performance of a Heat Exchanger Based on Enhanced Heat Diffusion in Fluids by Oscillation: Analysis," *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 49~55.

부 록

벽면의 길이방향 온도기울기가 일정하게 유지되고 있는 무한원관 안에서 유체가 왕복유동하는 경우의 열전달과정은 Kurzweg,⁽¹⁰⁾ Gedeon,⁽¹¹⁾ Kaviany⁽¹⁴⁾ 등에 의하여 연구된 바 있다. Kaviany가 구한 온도장에 대한 해를 정리하면 다음과 같다.

$$T - T_0 = \begin{cases} \gamma(z + \text{Re}[g_f(\eta) e^{i\tau}]) & \text{for } 0 \leq \eta \leq 1 \\ \gamma(z + \text{Re}[g_w(\eta) e^{i\tau}]) & \text{for } 1 \leq \eta \leq 1 + \delta \end{cases} \quad (\text{A. 1})$$

위 식에서 T_0 는 $z = z_0$ 에서의 단면-시간 평균온도이고, γ 는 길이방향 벽온도 기울기이며, δ 는 관 반지름에 대한 벽두께의 비이다. 온도분포 함수 g_f 와 g_w 는 각각 다음과 같다.

$$g_f = \frac{iW\sqrt{i}I_0(W\sqrt{i})}{(1-Pr)\{W\sqrt{i}I_0(W\sqrt{i}) - 2I_1(W\sqrt{i})\}} \left\{ 1 - Pr + Pr \frac{I_0(W\sqrt{i}\eta)}{I_0(W\sqrt{i})} - A \frac{I_0(F\sqrt{i}\eta)}{I_0(F\sqrt{i})} \right\} \quad (\text{A. 2})$$

$$g_w = \frac{iBW\sqrt{i}I_0(W\sqrt{i})}{(1-Pr)\{W\sqrt{i}I_0(W\sqrt{i}) - 2I_1(W\sqrt{i})\}}$$

$$\left\{ \frac{I_0(F\sqrt{i}\sigma\eta)}{I_1(F\sqrt{i}\sigma(1+\delta))} + \frac{K_0(F\sqrt{i}\sigma\eta)}{K_1(F\sqrt{i}\sigma(1+\delta))} \right\} \quad (\text{A. 3})$$

위에서 W 는 Womersley수로서 $R\sqrt{\omega/\nu}$ 이며, 관 반지름에 대한 Stokes 유동경계층 두께의 비를 의미한다. σ 는 유체와 벽의 열확산계수의 비이며, K_n 은 수정된 제2종 제 n 차 베셀함수이다. 상수 A 와 B 는

$$A = \frac{\mu\sqrt{Pr} \frac{I_1(W\sqrt{i})}{I_0(W\sqrt{i})} - a\sqrt{\sigma}}{\mu \frac{I_1(F\sqrt{i})}{I_0(F\sqrt{i})} - a\sqrt{\sigma}} \quad (\text{A. 4})$$

$$B = b \frac{\mu \frac{F\sqrt{i}}{I_0(F\sqrt{i})} - \mu\sqrt{Pr} \frac{I_1(W\sqrt{i})}{I_0(W\sqrt{i})}}{\mu \frac{I_1(F\sqrt{i})}{I_0(F\sqrt{i})} - a\sqrt{\sigma}} \quad (\text{A. 5})$$

$$a = \frac{I_1(F\sqrt{i}\sigma)K_1(F\sqrt{i}\sigma(1+\delta)) - I_1(F\sqrt{i}\sigma(1+\delta))K_1(F\sqrt{i}\sigma)}{I_0(F\sqrt{i}\sigma)K_1(F\sqrt{i}\sigma(1+\delta)) + I_1(F\sqrt{i}\sigma(1+\delta))K_0(F\sqrt{i}\sigma)} \quad (\text{A. 6})$$

$$b = \frac{I_1(F\sqrt{i}\sigma(1+\delta))K_1(F\sqrt{i}\sigma(1+\delta))}{I_0(F\sqrt{i}\sigma)K_1(F\sqrt{i}\sigma(1+\delta)) + I_1(F\sqrt{i}\sigma(1+\delta))K_0(F\sqrt{i}\sigma)} \quad (\text{A. 7})$$

와 같으며, 위식에서 μ 는 유체와 벽의 열전도율의 비이다. 벽에서의 열유속은 식(A. 1)의 벽에서의 기울기로부터 구할 수 있다.

관 벽재질 및 두께가 열전달에 미치는 영향을 고찰하기 위하여, 주파수 인자 F 가 작을 때와 클 때의 두 극한에서의 단면평균온도와 벽면 열유속의 비례형태를 살펴보기로 한다. 이는 온도분포함수 g_f 와 g_w 의 단면평균과 g_f 의 벽에서의 기울기의 점근 함수로 구할 수 있다.

F 가 작을 때, $\langle g_f \rangle$, $\langle g_w \rangle$ 와 g_f' 는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\langle g_f \rangle \approx -\frac{1}{6}F^2 + i\frac{1}{1+Cr} \quad (\text{A. 8})$$

$$\langle g_w \rangle \approx i\frac{1}{1+Cr} \quad (\text{A. 9})$$

$$g_f' \approx \frac{1}{2} \frac{Cr}{1+Cr} F^2 \quad (\text{A. 10})$$

위 식에서 Cr 은

$$Cr \equiv \frac{\sigma\{(\delta+1)^2 - 1\}}{\mu} \quad (\text{A. 11})$$

로 정의되며, 정리하면

$$Cr = \frac{(R_0^2 - R^2) \rho_w c_{pw}}{R^2 \rho_f c_{pf}} \quad (\text{A. 12})$$

를 얻을 수 있다. 식(A. 12)로부터 Cr 은 관 단면에서 벽과 유체가 차지하는 열용량의 비임을 알 수 있다.

F 가 큰 경우에 $\langle g_r \rangle$, $\langle g_w \rangle$ 와 g'_r 의 점근함수는 다음과 같다.

$$\langle g_r \rangle \approx i \quad (\text{A. 13})$$

$$\langle g_w \rangle \approx \frac{2\sqrt{i}}{Cr(\sqrt{Pr}+1)} F^{-1} \quad (\text{A. 14})$$

$$g'_r \approx -\frac{\sqrt{i^3}}{\sqrt{Pr}+1} F \text{ for } \sigma/\mu^2 \gg 1 \quad (\text{A. 15})$$

위에서 정리한 점근함수들로부터 $Cr \gg 1$ 인 경우에는 주파수 인자 F 의 양극한에서 벽온도의 진동 진폭이 유체온도의 진동진폭보다 상당히 작음을 알 수 있다. 실질적으로 금속재료의 관안에서 기체가 왕복유동하는 경우 Cr 은 대략 $10^3 \sim 10^4$ 의 크기를 가지므로, 벽온도는 왕복유동에 관계없이 일정하게

유지된다고 가정할 수 있다. 그러나 주파수 인자 F 가 $\sqrt{6/(1+Cr)}$ 보다 작아질 경우에는 유체의 진동진폭이 벽온도의 진동진폭과 비슷해지므로, 이 경우에는 벽온도의 진동을 무시할 수 없게 된다.

한편 Prandtl수에 의한 영향을 살펴보면, F 가 작을 때에는 그 영향이 전혀 나타나지 않다가 F 가 점차 커질수록 영향이 나타남을 알 수 있다. 그러나 그 영향은 $1/(1+\sqrt{Pr})$ 에 비례하므로 Pr 이 1보다 작을 경우에는 Prandtl수의 크기에 의한 영향이 크지 않음을 알 수 있다. 한편 잘 알려진 바와 같이 균일한 속도분포 가정은 Prandtl수가 무한히 작은 경우에 해당하는데, Prandtl수가 1보다 작을 경우에는 Prandtl수에 의한 영향이 크지 않으며 대부분의 기체의 Pr 이 1근처이므로 이러한 가정을 통하여 2차원 속도분포를 가지는 실질적인 경우의 열 전달 과정을 정성적으로 예측할 수 있다.