

〈論 文〉

이차적인 변형률효과를 고려한 텐서 불변성 난류에너지 소산율방정식

명 현 국*
(1993년 9월 3일 접수)

A Tensor Invariant Dissipation Equation Accounting for Extra Straining Effects

Hyon Kook Myong

Key Words : Dissipation Equation of Turbulent Energy(난류에너지 소산율방정식), Extra Straining Effect(이차적인 변형률효과), Turbulence Model(난류모델), Turbulent Couette Flow(난류 쿠에트유동), Tensor Invariant(텐서 불변성)

Abstract

A tensor invariant model equation for the turbulent energy dissipation rate is proposed in the present study, which is able to simulate secondary straining effects such as curvature effects without the introduction of additional empirical input. The source term in this model has a combined form of the generation term due to the mean vorticity with the conventional one due to the mean strain rate. An extended low-Reynolds-number $k-\epsilon$ turbulence model, involving this new model equation, is tested for a turbulent Couette flow between coaxial cylinders with inner cylinder rotated, which is a well defined example of curved flows. The predicted results indicate that the present model works much better for this flow, compared with previous models.

1. 서 론

최근 컴퓨터의 급속한 발달과 함께 전산유체역학 (computational fluid dynamics; CFD) 분야도 곡률 (curvature), 회전 (rotation), 선회 (swirl) 등 많은 공학적인 문제에 나타나는 복잡한 난류유동 (complex turbulent flow) 현상을 예측할 수 있게 되었다. 특히, 난류유동을 예측하는데 이용되고 있는 표준 $k-\epsilon$ 난류모델은 모델자체가 단순하면서도 예측성능이 우수하며, 또한 좌표계에 의존하지 않는 텐서 불변성조건 (tensor invariant condition) 을 만족하고 있기 때문에, 현재 각종 CFD 코드에

도입되어 여러가지 복잡한 난류유동 예측에 널리 사용되고 있다. 그러나, 이 표준 난류모델은 잘 알려진 바와 같이 일반적으로 곡률이나 선회에 의한 이차적인 변형률효과 (secondary straining effect) 를 충분히 반영하지 못하고 있어서 이들 복잡한 유동에 대한 예측성능을 크게 떨어뜨리고 있다. 따라서, 이 문제를 해결하기 위한 여러 형태의 수정 $k-\epsilon$ 모델들^(1~4)이 제안되었다. 이들 수정모델의 대부분은 난류에너지 소산율 (turbulent energy dissipation rate) 에 대한 모델방정식 중의 모델상수가 Richardson 수와 같은 곡률효과 등을 나타내는 변수의 함수형태로 수정되어 있다. 그러나, 이들 수정모델에서 곡률효과 등을 고려하기 위해 경험적으로 채택하고 있는 Richardson 수와 같은 변수형태는 좌표계에 의존하지 않는 텐서 불변성조건을 만

*정회원, 국민대학교 자동차공학과

족하고 있지 않으며, 또한 일반적으로 3차원에서의 확장이 어렵다.⁽⁵⁾ 결과적으로, 이들 수정모델들은 일반성의 면에서 볼 때 적절하지 못하며 이러한 이유로 상용 CFD코드에는 아직 적극적으로 도입되지 않고 있다. 따라서, 일반성(텐서 불변성 조건을 만족)을 가지면서도 곡률효과와 같은 이차적인 변형률효과를 적절히 반영시킬 수 있게 $k-\epsilon$ 난류모델, 특히 기존 수정 $k-\epsilon$ 모델에서와 같이 난류에너지 소산율에 대한 모델방정식을 개량한다는 것은 공학적으로 매우 중요하다고 할 수 있다.

한편, 동심 이중원관(coaxial cylinders)내 쿠에트유동(Couette flow)은 기하학적으로는 매우 단순한 형태의 유동이나, 곡률에 의한 유동의 불안정성으로 여러가지 복잡한 유동현상을 나타내고 있어서 현재까지 많은 실험적, 이론적 연구⁽⁶⁻⁹⁾가 행하여져 왔다. 일반적으로 이 유동에서는 회전속도가 작은 즉, 레이놀즈수가 작은 층류 및 천이 쿠에트 유동인 경우, 내측 원관이 고정된 경우에는 곡률의 영향이 유동이 안정되도록 작용하지만, 외측 원관이 고정되고 내측 원관이 회전하는 경우에는 반대로 유동이 불안정하게 되도록 작용하며, 특징적인 토로이달에디(toroidal eddy)가 생성되어, 결과적으로 매우 복잡한 3차원 유동으로 된다. 그러나, 내측 원관이 회전하는 동심 이중원관내 난류 쿠에트유동에 대한 Smith-Townsend⁽⁶⁾의 실험결과를 회전속도(또는 레이놀즈수)가 매우 높은 경우에는 토로이달에디(toroidal eddy)가 완전 불규칙 난류 유동에 흡수되어 결과적으로 전형적인 유선곡률의 영향을 크게 받고 있는 1차원 난류유동으로 바뀌는 것을 제시하고 있다. 최근, Kim-Kim⁽⁹⁾은 Smith-Townsend의 실험조건보다 상당히 더 높은 레이놀즈수에서의 난류 쿠에트유동에 대한 실험 및 수치 해석을 수행하였다. 이들은 난류모델로서 표준 $k-\epsilon$ 난류모델과 함께, 곡률효과 등을 위해 추가적인 수정을 필요로 하지 않아 이 유동을 해석하는데 보다 적절할 것으로 생각될 수 있는 고차적인 난류 모델인 레이놀즈 응력모델을 사용하였다. 그러나 이들의 연구결과에 따르면 레이놀즈 응력모델이 표준 $k-\epsilon$ 난류모델과 함께 전반적으로 이 유동을 적절히 예측하지 못하고 있으며, 따라서 레이놀즈 응력모델도 곡률효과를 고려하기 위해 수정되어야 한다고 보고하고 있다.

본 연구에서는 이러한 배경하에 먼저 기존의 수정 $k-\epsilon$ 모델에서 주로 개선한 난류에너지 소산율

에 대한 모델 방정식을 검토하고, 텐서 불변성조건을 만족하면서 곡률효과와 같은 이차적인 변형률효과를 반영시킬 수 있도록 확장된 형태로 제안한다. 다음으로, 이 난류에너지 소산율에 대한 모델 방정식을 기존의 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 난류모델에 도입하여 구축된 난류모델을 사용해서 전형적인 곡률유동인 내측 원관이 회전하는 동심 이중원관내의 난류 쿠에트유동에 대한 수치해석을 행하고, 기존의 $k-\epsilon$ 모델과 함께 본 연구에서 제시한 $k-\epsilon$ 모델의 예측결과를 실험결과와 비교분석하여 새로운 모델의 유효성을 검토한다.

2. 이차적인 변형률효과를 고려한 난류에너지 소산율방정식

표준 $k-\epsilon$ 난류모델에서 난류에너지 소산율에 대한 모델 방정식은 일반적으로 아래와 같이 나타내어질 수 있다.

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (1)$$

여기서,

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (2)$$

로 난류에너지의 생성률을 나타내며, 우변 2번째 및 3번째 항은 각각 난류에너지 소산율의 생성항 및 소산항을 나타낸다. 표준 $k-\epsilon$ 난류모델에서는 등방성 와점성(난류확산) 계수 ν_t 에 기초하여 레이놀즈 응력항이 아래와 같이 나타내어지므로,

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

식(2)의 P_k 는 다음과 같이 평균 변형률 텐서 S_{ij} 를 사용하여 표현할 수 있다.

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} \quad (4)$$

여기서, 와점성계수 및 평균 변형률 텐서는 각각

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

로 정의되며, 위 식들에 나타나는 σ_ϵ , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$, C_μ 는 각각 모델상수이다.

식(1)의 난류에너지 소산율방정식은 전술한 바와 같이 좌표계에 의존하지 않는 조건인 텐서 불변성 조건을 만족하고 있으므로 일반성 면에서는 적절하나, 이 식을 사용하는 표준 $k-\epsilon$ 난류모델은 일반적으로 곡률이나 선회에 의한 이차적인 변형률효과를 충분히 반영하지 못하고 있다. 따라서, 이의 해결책으로 위 모델 방정식에 다소 경험적인 수정을 하여 곡률효과 등을 고려한 수정 모델들^(1~4)이 제안되어 사용되고 있다. 이들 수정모델 중에서 특히 식(1)의 모델 방정식에 곡률이나 선회에 의한 이차적인 변형률을 반영시킨 현재까지의 연구는 다음과 같이 요약될 수 있다. 즉, Launder 등⁽¹⁾은 식(1)의 소산항에 나타나는 모델상수 $C_{\epsilon 2}$ 를 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로서 난류구배 Richardson수를 사용하여 선형함수 형태로 수정하였다. 반면, Rodi⁽²⁾는 식(1)의 생성항에 나타나는 모델상수 $C_{\epsilon 1}$ 를 이차적인 변형률효과를 나타내는 변수로 플러스 Richardson수를 사용하여 선형함수 형태로 수정하였다. 그러나, 이 두 방법에서 채용하고 있는 수정함수는 좌표계에 의존하지 않는 조건인 텐서 불변성조건을 만족하지 않는 Richardson수를 사용하고 있기 때문에 결과적으로 위식은 텐서 불변성조건을 만족하고 있지 못하여 일반성 면에서 적절하지 못하다.⁽⁵⁾ 최근, 저자는 텐서 불변성조건을 만족하면서 이차적인 변형률효과를 나타낼 수 있는 새로운 변수를 제안하여, 기존의 수정 $k-\epsilon$ 난류모델에서 사용되고 있는 변수 대신에 대치할 것을 제안하므로써 위의 문제는 해결될 수 있으나, 경험적으로 정해지고 있는 함수형태에 대해서는 아직 문제로 남아 있다.

한편, Hanjalic-Launder^(10,11)는 텐서 불변성조건을 만족하면서 이차적인 변형률효과를 반영시키기 위해 식(1)에 아래와 같이 표현되는 항을 추가적으로 더할 것을 제안하였다.

$$C'_{\epsilon 1} k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \quad (7)$$

이 항은 원래 강한 축대칭 수축이 있는 격자 난류 유동에서 난류에너지 소산에 의한 감쇄가 수축이 없는 경우보다 상당히 높다는 실험적 사실을 수학적 모델에 단순히 반영시킨 것으로, Hanjalic-Launder는 수축이 있는 유동에서는 수직응력들만이 존재하고 또한 이러한 현상이 전단류에서는 관찰되지 않은 것에 근거해서 수직응력이 전단응력보

다 더 효과적으로 난류 소산율을 증가시킨다고 결론지었다. 따라서 식(7)의 항은 생성항의 성질을 가지고 있으므로 결과적으로 식(1)의 우변 2번째 항인 난류에너지 소산율의 생성항 P_ϵ 는 일반적으로 다음과 같은 형태를 가지며,

$$P_\epsilon = \frac{\epsilon}{k} \left(C'_{\epsilon 1} P_k - C''_{\epsilon 1} \nu_\epsilon \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \right) \quad (8)$$

모델상수 C_μ , $C_{\epsilon 1}$, $C'_{\epsilon 1}$ 는 각각 0.09, 2.1, 0.8의 값을 가진다고 보고하고 있다.⁽¹¹⁾ 식(8)을 2차원 단순 전단유동에 적용하면 아래와 같이 표현되며,

$$P_\epsilon = \frac{\epsilon}{k} \left(C'_{\epsilon 1} P_k - C''_{\epsilon 1} \nu_\epsilon \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (9)$$

이 식을 수직응력과 전단응력에 의한 생성항을 $P_{k,n}$ 과 $P_{k,s}$ 로 분리해서 표현하면 다음과 같이 된다.

$$P_\epsilon = \frac{\epsilon}{k} \left(C'_{\epsilon 1} P_{k,n} + (C_{\epsilon 1} - C''_{\epsilon 1}) P_{k,s} \right) \quad (10)$$

식(10)은 수직응력에 의한 생성이 전단응력에 의한 것보다 선택적으로 크게 취해져 있음을 나타내며 결과적으로 전술한 바와 같이 수직응력이 전단응력보다 더 효과적으로 난류에너지 소산율을 증가시킨다는 Hanjalic-Launder의 주장을 입증해 주고 있다. 그러나 Hanjalic-Launder⁽¹⁰⁾는 위에 제안한 소산율 방정식을 곡률유동에 대해서는 적용하지 않고, 평면 및 원형 제트와 같은 단순한 경계층 유동에만 적용하여 다소 개선된 예측결과를 얻었다. 또한, 이들은 이 유동들을 해석할 때에 수직응력에 의한 생성이 전단응력에 의한 것보다 선택적으로 더욱 크게 되도록 하기 위해서, 위 식(8)에서 정해진 계수와는 달리 $C'_{\epsilon 1}$ 및 $C''_{\epsilon 1}$ 값을 각각 4.44 및 3.0으로 상당히 크게 취하였으며, 또한 등방성 와점성계수 가정에 기초한 $k-\epsilon$ 난류모델에서는 수직응력들 사이에 차이가 거의 없이 표현되므로 결과적으로 수직응력에 의한 생성항 효과가 없어지므로 수직응력값으로 실험값을 사용하여 해석하였다. 따라서, Hanjalic-Launder의 방법은 텐서 불변성 조건을 만족하고 있으나, 수직응력이 전단응력보다 더 효과적으로 난류 소산율을 증가시킨다는 점을 지나치게 강조하므로 결과적으로는 일반성을 결하고 있다고 볼 수 있다.

위와 같은 배경하에 본 연구에서는 일반성(텐서 불변성조건을 만족)을 가지면서도 곡률효과와 같은

이차적인 변형률효과를 적절히 반영시킬 수 있는 난류에너지 소산율에 대한 모델방정식을 아래와 같이 다른 관점에서 구하고자 한다. 즉, 식(1)의 난류에너지 소산율방정식은 기본적으로는 난류에너지 방정식과 같은 형태로 되어 있으므로, 평형을 이룬 이상적인 난류유동에서는 C_{e1} 과 C_{e2} 는 기본적으로 동등한 값을 가져야 할 것이다. 그러나, 균일한 유동(homogeneous flow)에 대한 실험결과^(12,13)에 따르면, 전단응력만이 있는 균일한 전단유동(homogeneous shear flow)에서는 C_{e1} 과 C_{e2} 는 각각 1.4와 1.83로 평형을 이룬 단순 벽면 전단유동에서와 같이 상당한 차이를 나타내고 있으나, 전단응력이 없는 균일한 평면 변형유동(homogeneous plane strain flow)에서는 1.75와 1.83으로 거의 비슷한 값을 나타내고 있다. 또한 전술한 바와 같이 곡률이나 선회에 의한 이차적인 변형률효과를 고려한 수정 모델들⁽¹⁻³⁾은 식(1)의 생성항 또는 소산항의 모델상수를 이차적인 변형률효과를 줄 수 있는 변수를 사용해서 수정하고 있다. 한편, 평균 변형률과 성격상 동일한 아래와 같이 정의되는 평균 와도텐서 Ω_{ij} 는

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

이차적인 변형률효과가 작은 단순한 전단유동에서는 평균 변형률과 거의 동일한 성질을 가지나, 이차적인 변형률효과가 큰 복잡한 유동에서는 다른 성질을 나타낸다. 또한, 이 평균 와도텐서는 전단응력이 없는 균일한 변형유동과 같은 비회전 변형유동(irrotational strain flow)인 경우에는 0이 되나, 전단유동과 같은 회전 변형유동(rotational strain flow)인 경우에는 평균 변형률 텐서와 다른 성질을 나타내면서 작용하게 된다. 이와 함께, 난류에너지 소산율이 평균적인 변동 와도텐서의 제곱과 유사한 성질을 가지고 있다는 사실을 고려해 볼 때, 식(4)의 평균 변형률에 의한 생성항, 즉 난류에너지의 생성률항만으로 되어있는 기존의 난류에너지 소산율방정식 식(1)의 생성항에 평균 와도에 의한 생성항을 추가적으로 결합시키는 것이 물리적으로 보다 합당하다고 판단될 수 있다.

본 연구에서는 평균 와도의 특성에 대한 위의 사항들과 평균 변형률 및 평균 와도텐서의 제곱이 텐서 불변성조건을 만족하는 점을 함께 고려해서 난류에너지 소산율방정식의 생성항을 다음과 같이 평

균 변형률에 의한 생성항 즉, 난류에너지의 생성률항과 평균 와도에 의한 생성항이 단순히 결합된 형태로 나타내기로 한다.

$$P_\epsilon = \nu_t \frac{\epsilon}{k} (C'_{e1} S_{ij} S_{ij} + C''_{e1} \Omega_{ij} \Omega_{ij}) \\ = \frac{\epsilon}{k} \left(\frac{C'_{e1}}{2} P_k + C''_{e1} \nu_t \Omega_{ij} \Omega_{ij} \right) \quad (12)$$

위의 식에 나타나는 두 모델 상수 C'_{e1} 및 C''_{e1} 의 값들은 서로 독립적으로 정해지는 것이 아니고 전술한 실험적 사실을 반영해서 정해진다. 즉 전단응력이 없는 균일한 평면 변형유동(homogeneous plane shear flow)에서와 같이 비회전 변형유동인 경우 실험결과에 따르면 C_{e1} 과 C_{e2} 는 거의 비슷한 값을 가지고 있으며, 평균 와도텐서는 0이 되므로 결과적으로 $C'_{e1}/2$ 는 C_{e2} 와 비슷한 값을 가지게 된다. 또한, 단순 벽면 전단류에서는 평균 변형률텐서와 평균 와도텐서는 같은 성질을 가지게 되며, 기존의 C_{e1} 과 아래와 같은 관계를 가지게 된다.

$$C'_{e1} + C''_{e1} = 2C_{e1} \quad (13)$$

위의 두 관계로부터 C'_{e1} 및 C''_{e1} 의 값을 구할 수 있으나, 기존 $k-\epsilon$ 난류 모델들⁽¹⁴⁾에서 C_{e1} 및 C_{e2} 의 값들 사이에는 다소 차이가 있으므로 결과적으로 사용된 모델에 따라 다소 다른 값들을 나타내게 된다. 본 연구에서는 C_{e1} 과 C_{e2} 값으로 전술한 균일한 유동에 대한 실험결과에서의 값들⁽¹²⁾과 거의 일치하는 1.4와 1.8의 값을 사용하고 있는 Myong-Kasagi 모델⁽¹⁵⁾의 값을 사용하여 구한 값들을 기본으로 몇가지 유동에 대해 검토하여 최종적으로 3.4 및 -0.6로 정하였다. 여기서, C''_{e1} 이 음의 값을 가지는 것이 다소 논리적으로 모순되게 보이나, 난류 소산율을 증가 또는 감소시키는 것은 식(12)로 나타낸 난류에너지 소산율방정식의 생성항 P_ϵ 의 값이므로 결과적으로 C'_{e1} 및 C''_{e1} 의 값을 복합적으로 고려하여 판단하여야 하며 이러한 면에서 보면 논리적으로 문제가 없음을 알 수 있다.

이상의 결과를 식(1)에 대입하면 즉 식(1)의 생성항을 식(12)의 생성항으로 대체시키면 결과적으로 식(1)은 다음과 같이 표현될 수 있으며,

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] - C_{e1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ - C_{e2} \frac{\epsilon^2}{k} - C_{e3} \nu_t \frac{\epsilon}{k} \Omega_{ij} \Omega_{ij} \quad (14)$$

여기서, 새로운 모델 상수 값들은 아래와 같이 된다.

$$C_{e1}=1.70, C_{e2}=1.8, C_{e3}=0.6 \quad (15)$$

식(14)가 본 연구에서 제안하는 난류에너지 소산율에 대한 모델 방정식으로, 본 모델은 기존의 모델에 비해 다음과 같이 몇가지 특징을 가지고 있다고 할 수 있다. 첫째, 본 모델 방정식은 표준 $k-\epsilon$ 모델에서 사용하는 기존 모델의 식(1)보다 일반적인 형태로 확장한 것이다. 즉, 기존의 표준 $k-\epsilon$ 모델에서는 난류에너지 소산율의 생성항을 식(14)의 우변 두번째와 마지막항으로 분리하여 표현한 것으로, 마지막항은 이차적인 변형률효과가 없는 단순 전단유동의 경우에는 식(1)의 두번째항과 같게 되어 결과적으로 C_{e1} 값이 1.4로 되어 기존의 난류에너지 소산율방정식과 같게 된다. 그러나, 내측 원관이 회전하는 동심 이중원관내 난류 쿠에트 유동과 같이 기하학적으로 유선 곡률의 영향을 크게 받고 있는 난류유동인 경우에는 두 항이 서로 다르게 작용하므로, 이것에 의해 곡률효과가 자연적으로 고려될 수 있다.

둘째, 난류에너지 소산율에 대한 본 모델의 형태는 텐서 불변성 조건을 만족하면서 전술한 Hanjalic-Lauder^(11,12)가 제안한 식과 결과적으로는 같은 형태를 가지고 있으나, 아래와 같이 접근 방법 및 해석 관점에서 차이가 있다. 즉, Hanjalic-Lauder는 강한 축대칭 수축이 있는 격자 난류유동에서 난류소산에 의한 감쇄가 수축이 없는 경우보다 상당히 높다는 실험적 사실을 수직응력이 전단응력보다 더 효과적으로 난류에너지 소산율을 증가시킨다는 해석관점에서 식(14)의 마지막항을 수학적 모델에 반영시켰다. 한편, 본 연구에서는 평균 변형률텐서와 평균 와도텐서가 이차적인 변형률효과가 큰 복잡한 유동에서 일반적으로 다른 특성을 가지고 있으며, 또한 난류에너지 소산율이 평균적인 변동 와도텐서의 제곱과 유사한 성질을 가지고 있다는 사실을 고려하여, 난류에너지 소산율방정식의 생성항에 평균 변형률에 의한 생성항 즉, 난류에너지의 생성률항과 함께 평균 와도에 의한 생성항을 복합적으로 결합시켜야 한다는 해석관점에서 난류에너지 소산율방정식의 생성항을 식(12)와 같이 평균 변형률에 의한 생성항 즉, 난류에너지의 생성률항과 평균 와도에 의한 생성항이 단순히 결합된 형태로 나타내었다. 그러나, 본 연구의 해석관점은 수직응력이 전단응력보다 더 효과적으로 난류에너지 소산율을 증가시킨다는 Hanjalic-Lauder의 해석관점을 포함하고 있다. 즉, 2차원 단순전단 유동인

경우 식(12)를 식(10)과 같이 수직응력과 전단응력에 의한 생성항으로 분리해서 표현하면 수직응력에 의한 생성항의 모델상수 값이 전단응력에 의한 생성항의 모델상수 값보다 큰 값을 가진다. 그러나, 본 연구에서 다루고자 하는 동심 이중원관내 난류 쿠에트유동과 같이 기하학적으로 유선 곡률의 영향을 크게 받고 있는 1차원 난류유동인 경우에는 평균 변형률과 평균 와도텐서는 서로 다르게 작용하여 이것에 의해 곡률효과가 자연적으로 고려될 수 있으므로 본 연구의 해석관점은 타당성을 가지나, 이 유동에서는 수직응력에 의한 생성항이 없으므로 Hanjalic-Lauder의 해석관점은 타당성을 가지지 못한다. 따라서, 본 연구의 해석관점이 Hanjalic-Lauder의 해석관점보다 더 일반성을 가지고 있다고 할 수 있다.

셋째, 본 모델은 곡률이나 선회에 의한 이차적인 변형률효과를 줄 수 있는 변수를 사용해서 경험적으로 수정하고 있는 기존의 수정 모델들⁽¹⁻³⁾과 같이 추가적으로 경험적인 수정항을 필요로 하지 않으며, 또한 기존의 수정 모델과는 달리 좌표에 의존하지 않는 텐서 불변성조건을 만족하고 있다. 따라서 본 모델은 기존의 수정모델과는 달리 일반성을 가지고 있다고 할 수 있다.

3. 수학적 모델 및 수치해석방법

위에서 제안한 이차적인 변형률효과를 고려하기 위해 확장된 난류에너지 소산율방정식은 저레이놀즈수형으로 용이하게 확장될 수 있다. 즉, 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 난류모델인 Myong-Kasagi 모델⁽¹⁵⁾ 중에 나타나는 난류에너지 소산율방정식을 위에서 구한 식으로 대체하면 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \epsilon \quad (16) \\ \frac{D\epsilon}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] - C_{e1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ &\quad - C_{e2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} - C_{e3} \nu_t \frac{\epsilon}{k} \Omega_{ij} \Omega_{ij} \quad (17) \end{aligned}$$

여기서,

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (18)$$

$$\nu_t = C_{\mu} f_{\mu} \frac{k^2}{\epsilon} \quad (19)$$

$$f_{\mu} = (1 + 3.45/\sqrt{R_i}) [1 - \exp(-y^+/70)] \quad (20)$$

$$f_2 = \{1 - (2/9)\exp[-(R_i/6)^2]\} [1 - \exp(-y^+/5)]^2 \quad (21)$$

$$C_{\mu} = 0.09, \sigma_k = 1.4, \sigma_{\epsilon} = 1.3, C_{\epsilon 1} = 1.7,$$

$$C_{\epsilon 2} = 1.8, C_{\epsilon 3} = 0.6, R_t = \frac{k^2}{\nu \epsilon} \quad (22)$$

위 모델이 본 연구에서 제시하는 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 모델로 본 연구에서 구한 식(14)의 난류에너지 소산율방정식의 소산항에 식(17)에서와 같이 저레이놀즈수 효과를 주는 감쇄함수 f_2 가 도입되는 점만이 다르다.

본 연구에서는 위에 제시한 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 모델을 전형적인 곡물유동인 내축 원관이 회전하는 동심 이중 원관내의 난류 쿠에트유동에 대한 수치 해석을 수행하여, 기존의 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 모델과 함께 본 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 모델의 예측결과를 실험결과 및 레이놀즈 응력모델의 결과^(8,9)와 비교분석하여 본 연구에서 제시한 모델의 유효성을 검토하기로 한다. 그러나, Smith-Townsend⁽⁸⁾의 연구는 서론에 기술한 바와 같이 토로이달에디에 따른 유동의 안정성 문제에 주안점을 두었기 때문에, Kim-Kim⁽⁹⁾의 연구에 비해 레이놀즈수가 상당히 작으며 또한 연구한 유동형태도 전형적인 유선 곡물의 영향을 크게 받고 있는 1차원 난류유동이 아닌 매우 복잡한 3차원 유동이다. 따라서, 본 연구에서는 Kim-Kim⁽⁹⁾의 실험결과와 직접 비교분석하고, Smith-Townsend⁽⁸⁾의 연구결과와는 주로 정성적인 면에서 비교분석하고자 한다.

이하 본 연구에서는 축방향, 반경방향 및 원주방향 좌표를 x , y (또는 r), θ 로 각각 나타내고, 또한 이들 방향 속도성분을 U , V , W 로 나타내기로 한다. 본 연구에서 대상으로 하고 있는 내축 원관이 회전하는 동심 이중원관내 1차원 난류 쿠에트유동에 대해서는 평균 속도로 원주방향 속도 W 만 존재한다. 따라서, 다음과 같이 나타내어지는 원주방향에 대한 평균 운동량방정식만을 고려하면 된다.

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \left(\nu r \frac{d}{dr} \left(\frac{W}{r} \right) - \overline{vw} \right) \right] = 0 \quad (23)$$

식(23)에 나타나는 레이놀즈 전단응력 \overline{vw} 는 위에서 언급한 확장된 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 모델로부터 구한다. 이 쿠에트유동에 대해 확장된 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 모델을 적용하면 모델 방정식 및 레이놀

즈 전단응력 성분에 대한 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{dk}{dr} \right] + \nu_t \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right)^2 - \epsilon = 0 \quad (24)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \frac{d\epsilon}{dr} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right)^2 - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} - C_{\epsilon 3} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \left(\frac{dW}{dr} + \frac{W}{r} \right)^2 = 0 \quad (25)$$

여기서,

$$\overline{vw} = -\nu_t \left(\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r} \right) \quad (26)$$

결과적으로, 수치계산을 위해서는 평균 속도 W , k 및 ϵ 의 서로 연관된 세개의 방정식을 풀면 된다. 해를 구하는 방법은 Tridiagonal Matrix 알고리즘을 이용한 유한체적법에 기초하였으며, 격자수는 y (또는 r)방향으로 120점을 취하고, 양쪽 벽면 근처에 격자점을 집중시켰다.

4. 결과 및 고찰

Fig. 1에 주 유동방향인 원주방향에 대한 평균속도의 예측결과를 Kim-Kim의 실험결과 및 레이놀즈 응력모델의 예측결과⁽⁹⁾와 비교해서 보인다. 그림에서 W_i , R_i , y 및 H 는 내축 원관의 원주방향 속도, 내축원관의 반경, 내축벽면으로부터의 반경방향 거리 및 내외축 벽면사이의 거리를 각각 나타낸다. 또, 레이놀즈수는 속도 W_i 및 길이 H 를 사

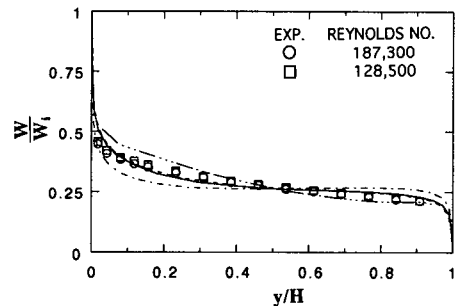


Fig. 1 Distributions of mean circumferential velocity: —, present model (Re=187,300); ---, present model (Re=128,500); ·····, Myong-Kasagi model (Re = 187,300); - · - · - ·, Reynolds stress model by Kim-Kim⁽⁹⁾ (Re = 187,300); Experiments, Kim-Kim⁽⁹⁾

용해서 정의되어 있다. Fig. 1에 나타낸 국소 평균 속도에 대한 실험결과는 양쪽 벽면근방에서 급격히 감소하고, 중심구역에서는 매우 완만하게 감소하는데, 이것은 식 (23)으로부터 예상될 수 있다. 즉, 중심영역에서는 국소 레이놀즈 전단응력이 지배적이므로 식 (23)으로부터 국소 레이놀즈 전단응력은 평균 유선반경의 제곱에 반비례하여 감소하며, 와점성 계수를 이 영역에서 거의 일정하다고 가정하면 평균 속도 W 는 이 영역에서 일정하게 된다. 기존의 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 모델의 예측결과는 전반적으로는 실험적 경향을 나타내고는 있으나, 내측원관쪽 영역에서는 실험치보다 작게, 외측원관쪽 영역에서는 실험치보다 크게 예측하고 있다. 반면, Kim-Kim⁽⁹⁾의 레이놀즈응력 모델의 예측결과는 기존의 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 모델의 예측결과와 반대의 경향을 나타내고 있다. 그러나, 본 모델의 예측결과는 기존 모델들의 예측결과와는 달리 전체적으로 실험결과를 상당히 잘 재현하고 있으며, 또한 본 모델로 예측된 평균속도 분포는 실험결과에서와 같이 레이놀즈수가 증가함에 따라 지시된 레이놀즈수 범위내에서 크게 변화하고 있지 않다.

주 유동방향인 원주방향에 대한 평균 각운동량의 예측결과를 Kim-Kim의 실험결과 및 레이놀즈 응력모델의 예측결과⁽⁹⁾와 비교해서 Fig. 2에 보인다. 본 쿼트 유동에 대한 기존의 실험결과^(6,9)는 공통적으로 Fig. 2에 보인 각운동량의 실험값과 같이 양쪽 벽면근방을 제외한 유동 중심영역 ($0.1 < y/H < 0.9$)에서 무차원 각운동량이 0.5에 가까운 값을 가지면서 변화하고 있으며, 각운동량의 변화율 $d(Wr)/dr$ 이 항상 양(+)이라고 보고하고 있다. 기존의 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 모델의 예측결과는 전반적으로 실험적 경향을 나타내고는 있으나, Fig. 1의 평균속도 예측에서와 같이 내측 원관쪽 영역에서는 실험치보다 작게, 외측 원관쪽 영역에서는 실험치보다 크게 예측하고 있다. 반면, Kim-Kim의 레이놀즈 응력모델의 예측결과는 저레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 모델의 예측결과와 반대의 경향을 나타내고 있으며, 또한 각운동량의 변화율을 항상 음(-)으로 예측하고 있어 기존의 실험적 사실과 반대의 경향을 보여주고 있다. 그러나, 본 곡률수정용 확장 모델은 기존의 실험적 사실⁽⁶⁻⁸⁾을 매우 잘 예측하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 3은 $G=r^2\overline{vw}$ 의 예측결과를 보여주고 있다. 중심영역에서는 국소 레이놀즈 전단응력이 지

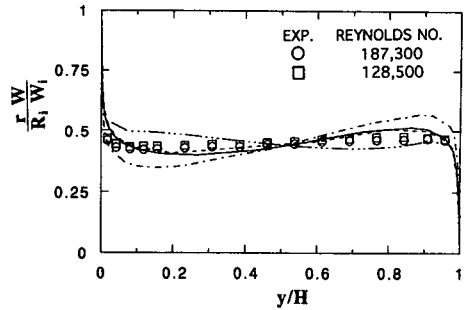


Fig. 2 Distributions of mean angular momentum Symbols as in figure 1

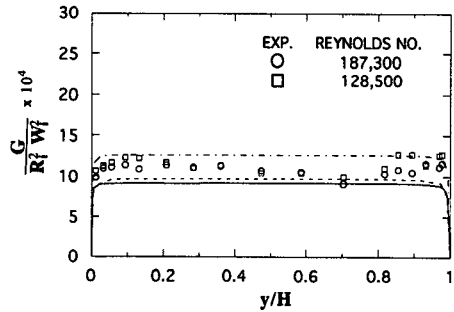


Fig. 3 Distributions of $G=r^2\overline{vw}$. Symbols as in figure 1

배적이므로, 식 (23)으로부터 물리적으로 마찰 계수에 해당하는 이 값들은 이 영역에서 거의 일정한 값을 가질 것이 예상된다. 그러나, Kim-Kim⁽⁹⁾의 실험결과는 이 값들이 중심영역에서 상당히 큰 편차를 가지고 있으나, 전체적으로는 위의 사실을 반영하고 있다고 볼 수 있다. 예측결과는 예상된대로 반경방향으로 중심영역에서 거의 일정한 값을 가지고 있으나, 기존의 모델에서는 실험결과보다 다소 높게, 본 모델에서는 다소 낮게 나타나고 있다. 그러나, 기존의 실험적 연구결과로부터 몇가지 가정하에 Smith-Townsend⁽⁸⁾가 제시한 식을 이용해서 이 값들을 구해보면 $Re=187,300$ 에서 7.5×10^{-4} 으로 본 모델의 예측값보다도 작게 나타나고 있다. 따라서, 현 단계에서는 본 모델이 전단응력을 실험결과보다 다소 작게 나타내고 있다고 확실한 결론을 내리기 어렵다. 참고로, 레이놀즈 응력모델은 실험결과보다 20% 이상 낮게 예측하고 있다고 보고되어 있다.⁽⁹⁾

양측 원관 벽면근방에서의 평균속도 분포를 Figs. 4와 5에 보인다. Smith-Townsend의 연구결

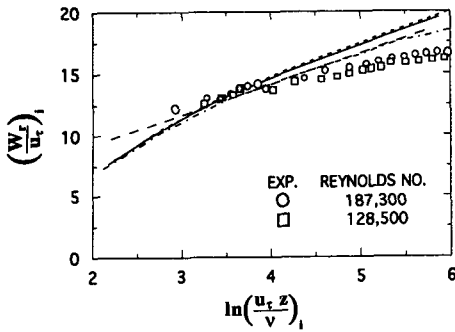


Fig. 4 Distributions of mean velocity near rotating wall : ----, Eq. (27) with $\kappa=0.41$ and $A=1.8$; other symbols as in figure 1

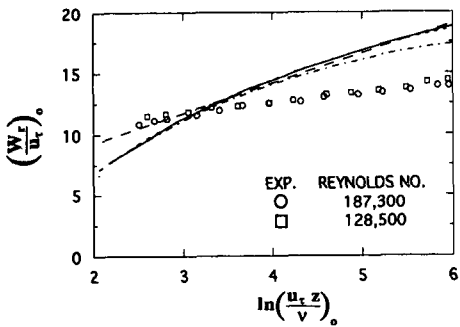


Fig. 5 Distributions of mean velocity near stationary wall. Symbols as in figure 4

과⁽⁸⁾에 의하면 높은 레이놀즈수에서의 난류 쿠에트 유동인 경우, 평균속도의 변화가 거의 양쪽 벽면 근처에서 생기므로, 벽면 근처에서의 유동형상은 곡률의 영향이 없는 일반적인 벽면 유동과 비슷하며, 벽 근처에서의 평균 속도분포는 다음 식과 같이 표현되는 일반적인 로그속도 분포를 나타낸다고 보고되어 있다.

$$\frac{W_r}{u_r} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{u_r z}{\nu} + A \right) \quad (27)$$

여기서, u_r 및 W_r 는 각각 벽면 마찰속도 및 벽에서 떨어진 z 에서의 유체의 상대속도이고, 또 상수 κ 및 A 의 값은 각각 0.41 및 1.8로, A 의 값은 일반적인 경계층 유동에서의 값 2.2보다 다소 작은 값을 가진다. 그림으로부터 본 모델의 예측결과는 기존의 연구결과⁽⁸⁾를 비교적 잘 반영하고 있으나, Fig. 4를 보면 이차적인 변형률효과를 고려하지 않은 기존 모델의 예측결과가 본 모델보다도 기존의 연구결과⁽⁸⁾를 더 잘 반영하고 있음을 알 수 있다.

그러나, 식(27)은 50,000 이하인 비교적 작은 레이놀즈수 하에서 정리된 식으로, Smith-Townsend의 연구결과⁽⁸⁾를 주의깊게 분석해 보면 레이놀즈수가 커짐에 따라 그림에 보인 본 모델의 예측결과와 같이 다소 높은 값을 나타내고 있다. 또한, Fig. 5에 보인 본 모델의 예측결과는 같은 특성을 가지고 있는 정지 유체중의 회전 원통주위의 난류유동에 대한 中村 등⁽¹⁶⁾의 실험결과와 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 따라서, 두 모델의 예측결과 및 Smith-Townsend의 기존의 실험적 연구결과는 다소의 차이는 나타내나 거의 일치된 경향을 보이고 있다고 판단할 수 있다. 그러나, 그림에 나타난 Kim-Kim⁽⁹⁾의 실험결과와는 상당한 차이를 보이고 있음을 알 수 있다. 기존의 각 실험결과들 사이에 크게 차이가 나타나는 이유로는 벽면부근에서의 계측상의 어려움 및 벽면 마찰속도의 평가방법이 각기 다른점을 고려할 수 있다. 한 예로, 정지 유체중의 회전 원통주위의 난류유동에 대한 Anderson 등⁽¹⁷⁾의 보고에 따르면 벽면 마찰계수의 평가 방법에 따라 50% 이상의 차이가 난다고 한다. 또한, Smith-Townsend의 실험결과를 보면 실험값들 사이에 상당한 편차를 나타내고 있으며, 그림에 나타난 식(27)은 이들 실험값들을 평균한 것이다. 따라서, 이 결과만으로는 본 모델의 적합성을 평가하기는 어렵고, 보다 확실한 결론을 내리기 위해서는 먼저 실험적으로 통일된 결론이 선행되어야 할 것으로 사료된다.

이상 살펴본 바와 같이 곡률효과와 같은 이차적인 변형률효과를 고려한 본 모델이 기존의 모델보다 실험결과를 잘 예측하고 있는 사실을 보다 구체적으로 고찰해 보기로 한다. 즉, Fig. 2로부터 중심영역에서는 각운동량이 0.5로 거의 일정한 값을 가지므로, 다음과 같이 반경방향 속도 구배에 대한 유동의 각속도비로 정의되는 유동 곡률의 효과를 나타내는 변수 α 는

$$\alpha = \frac{W/r}{dW/dr} \quad (28)$$

이 영역에서 약 -1의 값을 가진다. 이것은 이 영역에서 곡률에 의한 영향이 매우 큼을 의미한다. 한편, 본 모델의 난류에너지 소산율에 대한 식(25)를 보면 평균 와도텐서에 의한 생성항은 이 영역에서 거의 0의 값을 가지나, 평균 변형률텐서에 의한 생성항 즉, 난류에너지의 생성항은 큰 값을 가진다. 따라서 난류에너지 소산율방정식의 생성항 계

수 $C_{\epsilon 1}$ 값으로 기존 모델에서의 값 1.4보다 약 21% 정도 크게 가지는 본 모델은 결과적으로 기존 모델보다 큰 생성항을 가지게 되므로 난류에너지 소산율을 증가시키게 되며 그 결과 난류에너지는 감소하게 된다. 또한, 난류에너지의 감소로 인해 와점성 계수와 전단응력값들이 이 영역에서 상대적으로 작게 된다.

Figs. 6, 7 및 8은 기존 모델과 본 모델에 의한

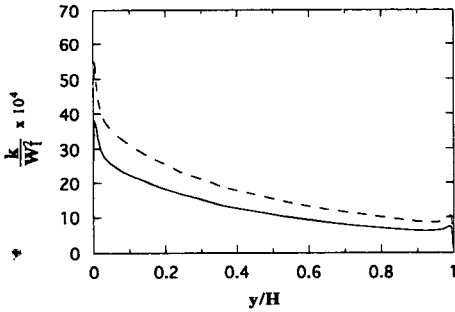


Fig. 6 Distributions of turbulent energy (Re=187, 300): —, present model; ----, Myong-Kasagi model

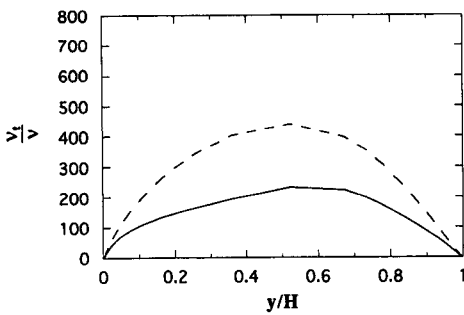


Fig. 7 Distributions of eddy diffusivity for momentum (Re=187, 300). Symbols as in figure 6

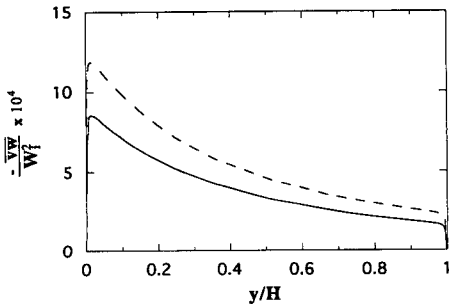


Fig. 8 Distributions of Reynolds shear stress (Re=187, 300). Symbols as in figure 6

난류에너지, 와점성계수 및 전단응력의 예측결과를 각각 보여주고 있다. 기존 모델에 비해 본 모델은 이들 값들을 곡률영향을 크게 받고 있는 양쪽 벽면으로부터 떨어진 중심영역에서 상당히 작게 예측하고 있어 위의 사실을 명확하게 보여주고 있다. 따라서, 지금까지 고찰한 결과로부터 본 모델이 기존의 모델보다 실험결과를 잘 예측하고 있음을 알 수 있으며, 이것은 본 모델이 기존모델보다 곡률효과와 같은 이차적인 변형률효과를 잘 반영시키고 있기 때문임을 입증하고 있다고 판단할 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 평균 변형률텐서와 평균 와도 텐서가 이차적인 변형률효과가 큰 복잡한 유동에서 일반적으로 다른 특성을 가지고 있으며, 또한 난류에너지 소산율이 평균적인 변동 와도텐서의 제곱과 유사한 성질을 가지고 있다는 사실을 고려하여, 난류에너지 소산율방정식의 생성항을 평균 변형률에 의한 생성항 즉, 난류에너지의 생성률항과 함께 평균 와도에 의한 생성항이 복합적으로 결합한 것으로 해석함으로써, 일반성(텐서 불변성조건을 만족)을 가지면서 곡률효과와 같은 이차적인 변형률 효과를 반영시킬 수 있는 난류에너지 소산율에 대한 모델방정식을 제안하였다. 그리고, 이 모델방정식을 기존의 레이놀즈수형 $k-\epsilon$ 난류모델에 도입하여 결과적으로 부가적인 수정항 없이도 이차적인 변형률효과를 적절히 반영시킬 수 있게 확장된 $k-\epsilon$ 난류모델을 구축하였다. 또한, 새로운 난류에너지 소산율에 대한 모델방정식의 유효성을 확인하기 위해, 전형적인 곡률유동인 내측 원관이 회전하는 동심 이중원관내의 난류 쿠테트유동에 대한 수치해석을 행하여, 기존의 $k-\epsilon$ 모델과 함께 확장된 $k-\epsilon$ 모델의 예측결과를 실험결과와 비교분석하였다. 본 연구에서 제시한 확장된 모델은 평균 유속 분포 및 각 운동량분포 등의 예측에 있어 기존의 $k-\epsilon$ 모델 및 고차 모델인 레이놀즈 응력모델의 예측결과보다도 실험결과와 잘 일치하고 있음을 보여주었다. 이러한 결과는 본 연구에서 제시한 확장된 $k-\epsilon$ 모델이 기존의 $k-\epsilon$ 모델보다도 이차적인 변형률효과를 잘 반영하고 있으며, 또한 본 연구에서 제안한 난류에너지 소산율에 대한 방정식의 유효성을 입증해 주고 있다고 생각될 수 있다. 앞으로 이에 대한 보다 확실한 결론을 얻기 위해 여러가지

복잡한 유동현상에 대해 본 모델의 적용 및 모델의 개선을 시도해 볼 예정이다.

후 기

본 연구에 귀중한 실험결과를 제공해 준 인하대학교 김광용 교수께 감사드린다.

참고문헌

- (1) Launder, B. E., Priddin, C. H. and Sharma, B. I., 1977, "The Calculation of Turbulent Boundary Layers on Spinning and Curved Surfaces," *Trans. ASME J. Fluids Eng.* Vol. 99, pp. 231~239.
- (2) Rodi, W., 1978, "Influence of Buoyancy and Rotation on Equations for the Turbulent Length Scale," *Proc. of 2nd Symp. of Turbulent Shear Flows*, Imperial College, London, pp. 10. 37~10. 42.
- (3) Leschziner, M. A. and Rodi, W., 1981, "Calculation of Annular and Twin Parallel Jets Using Various Discretization Schemes and Turbulence-Model Variations," *Trans. ASME J. Fluids Eng.*, Vol. 103, pp. 352~360.
- (4) Park, S. W. and Chung, M. K., 1989, "Curvature-Dependent Two-Equation Model for Prediction of Turbulent Recirculating Flows," *AIAA J.* Vol. 27, No. 3, pp. 340~344.
- (5) 명현국, 1994, "이차적인 변형률효과를 나타내는 새로운 변수의 제안," *대한기계학회논문집*, 제18권 제1호, pp. 184~192.
- (6) Townsend, A. A., 1976, *The Structure of Turbulent Shear Flow*, 2nd ed., Cambridge University Press.
- (7) DiPrima, R. C. and Swinney, H. L., 1985, "Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence," Springer-Verlag, pp. 139~180.
- (8) Smith, G. P. and Townsend, A. A., 1982, "Turbulent Couette Flow between Concentric Cylinders at Large Taylor Numbers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 123, pp. 187~217.
- (9) Kim, K. Y. and Kim C. U., 1991, "Turbulent Couette Flow between Coaxial Cylinders with Inner Cylinder Rotated," *Proc. of 4th Symp. on Transport Phenomena*, Sydney, Vol. 4, pp. 1617~1628.
- (10) Hanjalic, K. and Launder, B. E., 1980, "Sensitizing the Dissipation Equation to Irrotational Strains," *Trans. ASME J. Fluids Eng.*, Vol. 102, pp. 34~40.
- (11) Hanjalic, K. and Launder, B. E., 1979, "Preferential Spectral Transport by Irrotational Straining," *Turbulent Boundary Layers*, ASME, pp. 101~110.
- (12) Rogallo, R. S., 1981, "Numerical Experiments in Homogeneous Turbulence," *NASA Report*, TM81315.
- (13) Lee, M. J. and Reynolds, W. C., 1985, *Numerical Experiments on the Homogeneous Structure of Homogeneous Turbulence*, Ph. D. Thesis, Stanford University, Report No. TF-24.
- (14) Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G., 1985, "Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review," *AIAA J.*, Vol 23, pp. 1308~1319.
- (15) Myong, H. K. and Kasagi, N., 1990, "A New Approach to the Improvement of $k-\epsilon$ Turbulence Model for Wall-Bounded Shear Flow," *JSME Int. J.*, Vol. 33, pp. 63-72.
- (16) 中村育雄, 植木 良昇, 山下新太郎, 1983, "静止流體中の回轉圓筒まわりの亂流せん断流," *日本機械學會論文集 (B편)*, 제49권, 제446호, pp. 2230~2235.
- (17) Andersson, H. I., Johansson, B., Lofdahl, L. and Nilsen, P. J., 1991, "Turbulence in the Vicinity of a Rotating Cylinder in a Quiescent Fluid: Experiments and Modelling," *Proc. of 8th Symp. of Turbulent Shear Flows*, Munich, p. 30.