

〈論 文〉

마찰력이 개재된 강체역학에서 불일치의 해소 — Lötstedt의 미끄러지는 막대

한 인 환*

(1993년 11월 23일 접수)

Resolving the Inconsistency of Rigid Body Frictional Mechanics — Lötstedt's Sliding Rod

Inhwan Han

Key Words : Coulomb Friction(쿨롱마찰), Rigid Body Mechanics(강체역학), Sliding Rod(미끄러지는 막대), Inconsistency(불일치), Frictional Impact(마찰충돌), Sliding and Sticking(미끄럼정지), Tangential Collision(접선충돌)

Abstract

The problem of a rigid rod sliding on a rough horizontal surface in the plane is analyzed, which is commonly cited as an example of the inconsistency of rigid body frictional mechanics. The inconsistency is demonstrated by analyzing the normal reaction force at the contact point with the surface, and the concept of tangential collision is derived to resolve the inconsistency. Using the Poisson's hypothesis for the coefficient of restitution and Coulomb's law for the friction, the general methodology for solving the tangential collision is presented. The problem of the inconsistency generated in the sliding rod is completely resolved, building the concept of the tangential collision and adopting the theory of frictional impact. The result presented in this paper will obviate a generic obstacle to the development of simulation packages for planar rigid body mechanical systems with temporary contacts, and planning efficient motion strategies for robot manipulators.

1. 서 론

산업용 로봇을 비롯한 많은 부품처리장치에서 공정속도의 증대는 정밀도의 확보와 더불어 생산라인에서 절대적인 요구사항이다. 이러한 공정 내에서는 많은 물체들이 필수적으로 동역학적인 마찰 접촉(dynamic frictional contacts)들을 형성하게 될 것이다. 따라서, 이러한 작업공정들에 대해서는 적절한

수학적 모델링 과정을 통해 해석, 설계 또는 제어 등을 실현해야 할 것이다. 많은 경우에 물체들은 강체로 가정할 수 있고, 또한 평면 역학 범주에서의 모델링을 통한 해석이 가능하다. 이러한 물체들의 동적인 거동을 정확히 해석, 묘사하는 데는 많은 어려운 문제가 있고, 특히 기구학적인 토폴로지가 변화하는 시스템⁽¹⁾의 경우에는 아직도 부문별로 활발한 연구가 진행되고 있는 실정이다. 다이나믹 시스템을 정확히 모델링할 때, 마찰은 주요한 요소이다. 그런데, 기존의 강체역학의 틀속에 쿨롱마찰(coulomb friction)이라는 비선형적인 요소가 개입

*정회원, 홍익대학교 기계설계학과

되면 문제가 더욱 어려워진다. 실제로 마찰은 쿨롱 마찰보다 훨씬 복잡하고, 속도, 수직 반력 등 많은 요소들에 따라 복잡한 변화를 하는 것으로 알려져 있다. 그럼에도 불구하고 쿨롱마찰은 많은 물체들의 접촉을 모델링할 때, 가장 적절한 1차(first-order) 모델이다.⁽²⁾ 그러나, 쿨롱마찰이 강제역학의 운동 방정식들과 결부될 때, 항상 유일해가 존재하지 않는다는 것이 많은 학자들에 의해 인정되어 왔다.⁽³⁾ 유일해가 존재하지 않는다는 것은 두가지 측면이 있는 데, 첫째는 해가 존재하지 않는 불일치(inconsistency)이고, 둘째는 여러개의 해가 존재한다는 모호함(ambiguity)이다. 최근의 연구중, Mason and Wang⁽⁴⁾이 불일치의 예를 거론하고 있고, Rajan 등⁽⁵⁾이 유사한 문제에서 모호함을 논하고 있다. 불일치나 모호함은 수학적 모델링 과정의 부적합으로 발생하는 것이지, 물리적으로 가능한 상황이 될 수는 없다. 통상 그러한 불일치나 모호함은 쿨롱모델의 대략적인 특성(approximate nature)과 강성(rigidity)에 대한 잘못된 가정에서 비롯되는 것으로 알려져 있다.⁽⁶⁾ 그러나, 강제로서의 모델과 쿨롱마찰이 보편적으로 사용되므로, 불일치나 모호함은 적절한 방법으로 해소되어야만 할 것이다. 물체들의 동적거동을 해석하기 위한 컴퓨터 시뮬레이션 알고리즘을 작성하거나, 혹은 제어를 위한 모델링에 있어 그러한 불일치나 모호함은 치명적일 수 있다. 따라서 그러한 문제들의 제기도 단순한 흥미에서 비롯되는 것이 아니고, 실제 로봇의 동작계획,⁽⁷⁾ 제어 혹은 기계 다이내믹 시스템의 해석을 연구하는 그룹들에서 집중적으로 이루어지고 있다.

본 논문에서는 마찰력이 개재된 강제역학의 범주 내에서 불일치의 예로 자주 거론이 되는 Lötstedt의 미끄러지는 막대문제⁽⁴⁾를 대상으로 불일치가 발생하는 과정과 그 불일치를 적절히 해소하는 한 방안을 제시한다. Brach^(8,9)와 Han 등⁽¹⁰⁾은 Lötstedt의 미끄러지는 막대문제와 유사한 경우에 대해 마찰 충돌 해석을 전개한 바 있다. 그러나, 그들이 설정한 모델에서는 가는 막대가 미끄러지는 상황이 아니고, 가는 막대가 지면과의 접근 속도를 가지고 충돌하는 경우이므로 본 논문에서 제시하는 불일치와는 다른 문제이다. 비록, 그들이 설정한 모델에서 불일치가 유도되거나 논해진 것은 아니지만, 충돌로 인한 에너지 감소량이 마찰계수, 반발계수와 가지는 관계에 대해 특이한 현상을 제시한 바 있

다. 즉, 마찰계수가 작아지거나 혹은 반발계수가 더 커진다고 해서 항상 에너지 감소량이 더 작아지는 것이 아니라는 사실이다. 이는, Han 등⁽¹⁰⁾이 제시한 것처럼 반발계수나 혹은 마찰계수에 따라 충돌과정의 경로가 전혀 달라질 수 있다는 사실에 기인한다.

본 논문 저자가, 변화하는 기구학적 토폴로지를 가지는 기계시스템을 위한 rule-based 시뮬레이션 알고리즘을 개발⁽¹¹⁾하는 과정에서 불일치, 모호함의 문제들을 경험하였는데, 본 논문에서 제시하는 Lötstedt의 미끄러지는 막대문제에서 발생하는 불일치의 경우도 그 하나의 예이다. 더우기, 그 불일치를 해소하는 방안으로 고려할 수 밖에 없는 접선 충돌의 개념은 강제충돌의 범주에서 독특하다. 즉, 두 강체의 접촉점에서 법선방향으로의 상대속도가 0인 경우의 충돌이 가능할 수 밖에 없다는 점이다. Mason and Wang⁽⁴⁾도 Lötstedt 문제에 대해 접선충돌의 가능성을 인정한 바 있다. Mason and Wang은 Lötstedt의 미끄러지는 막대문제에 대해, 특정 수치값들을 설정하여 문제를 단순화 하고 불일치를 논한 바 있다. 그러나, 전반적인 해석과정이 충돌이라는 개념을 유도하기에는 적절치 못할 뿐만 아니라, 불일치 해소에 있어 완벽한 해석을 전개하지 못했다. 본 논문에서는 지면과의 접촉점에서의 반력에 대한 해석적인 접근을 통해 불일치를 유도한다. 그리고, 그 불일치 문제를 해석하는 과정을 통해 충돌이라는 물리적인 현상을 도입하지 않고서는 해석이 불가능하다는 결과와 함께, 접선 충돌의 개념을 도출한다. 더우기, 그 접선충돌에 대한 해석은 19세기의 학자 Routh⁽¹¹⁾의 그래픽 해석에 근거한 Han의 마찰충돌이론⁽¹⁰⁾에 의해서 비로소 가능하게 된다.

기존의 연구들은 마찰의 역할을 무시하거나 혹은, Coulomb의 법칙을 그대로 적용하여 단순히 법선 역적의 값에 마찰계수를 곱하여 접선 역적의 값으로 사용하였다. 실제로 충돌의 짧은 시간동안 충돌하는 물체들의 분리 이전에 그 미끄럼의 방향이 변하거나 정지할 수 있다는 가능성을 간과한 것이다. 따라서, 그 결과는 대체로 부적절한 것이 되고, 상황에 따라서는 충돌후 운동에너지가 충돌전보다 오히려 증가하는 치명적인 오류까지 범하게 되었다. 이러한 마찰충돌에서의 문제를 해결하기 위해 Keller⁽¹²⁾는 충돌이 순간적으로 진행된다는 생각을 포기해야 한다고 지적한다. 강제역학의 범위

내에서, 짧은 충돌시간동안 역적-운동량(impulse-momentum) 이론과 Coulomb의 법칙을 사용한 마찰 충돌문제에 대한 해석을 Lötstedt의 불일치 문제를 해소하는 데 적용한다.

2. Lötstedt의 미끄러지는 막대 — 불일치의 발생

본 절에서는 Mason and Wang⁽⁴⁾이 인용한 Lötstedt의 미끄러지는 막대(Fig. 1)에 대해 강체역학의 범주에서 쿨롱마찰을 부가할 때, 해가 존재하지 않는 경우를 제시한다. Mason and Wang도 동일한 모델에 대해, 특정값들을 설정하여 단순화하고 불일치를 논한 바 있다. 그러나, 불일치에 대한 도출과정이 다소 오류를 포함하고 있는 것으로 보여진다. 그들은 지면과 접촉하고 있는 막대의 끝점이 특정 상황에서 지면방향으로의 가속도를 가지게 되는 것을 불일치의 근거로 설정하였으나, 이는 기구학적 구속조건(kinematic constraint)을 고려하지 않았음에 기인하는 것이다. 본 논문에서는 지면과의 접촉점에서의 반력에 대한 해석적인 접근을 통해 불일치를 유도한다.

Fig. 1에 보여지는 것처럼 중력장에서 강체 막대가 수평한 지면위에서 왼쪽(-x 방향)으로 미끄러지고 있다. 즉, $v_{px} < 0$ 가 초기조건이다. 막대의 무게중심 G에는 막대의 무게 mg를 포함한 힘 F와 토크(torque) τ 가 가해지고 있다. 접촉점에서 마찰력은 쿨롱의 법칙을 따르는 것으로 고려하였다. 막대와 지면과의 접촉점 p에서 λ 는 수직반력(normal reaction force)이고 F_f 는 수직반력에 따른 쿨롱 마찰력이다. 보여지는 순간에, 막대의 접촉점 p가 왼쪽으로 미끄러지고 있다고 초기 조건을 설정하였으므로, 마찰력의 방향은 Fig. 1에서 보여지는 것같이 나타날 것이다. 동마찰계수(kinetic friction coefficient)는 μ_k , 최대 정지마찰계수(maximum static friction coefficient)는 μ_s 로 하였다. 보여지는 상황에서, 지면과 막대와의 각도 θ 의 범위는 0° 와 90° 사이로 할 것이다. 그런데, θ 가 90° 에서 180° 사이일 경우, 미끄러짐의 방향을 반대로 설정하면 동역학적으로 똑같은 상황이 될 것이다.

주어진 초기조건처럼 접촉점 p가 미끄러짐 상태(sliding phase)에 있을 때, 기구학적 구속조건과 힘 구속조건(force constraint)을 포함하는 동역학

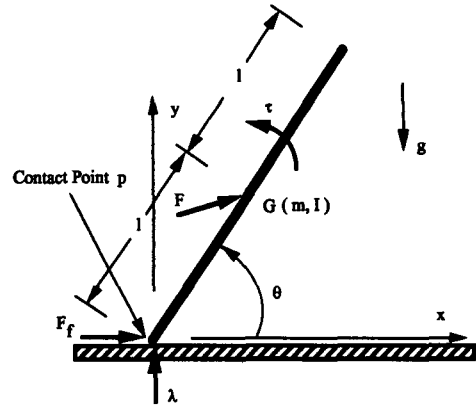


Fig. 1 A sliding rigid rod on a frictional surface

운동방정식을 성긴행렬(sparse matrix) 형태로 표현하면 식(1)로 나타낼 수 있다. 식(2)는 식(1)에 포함된 관성행렬 M, 기구학적 구속조건 행렬 Φ_y , 동마찰계수 μ_k 와 함께 힘구속조건으로의 역할을 수행하는 행렬 Φ_x 등을 표현하고 있다.

$$\begin{bmatrix} M & -\Phi_y^T - \mu_k \Phi_x^T \\ \Phi_y & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{ext} \\ \gamma_y \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \dot{V} = \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\omega} \end{pmatrix}, \quad F_{ext} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ \tau \end{pmatrix}$$

$$\Phi_x = [1 \ 0 \ l \sin \theta], \quad \Phi_y = [0 \ 1 \ -l \cos \theta] \quad (2)$$

$$\gamma_y = -l \omega^2 \sin \theta, \quad \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

식(1)로부터 수직반력을 구하면 식(3)과 같이 나타낸다.

$$\lambda = \frac{-IF_y + \tau ml \cos \theta - mll \omega^2 \sin \theta}{I + ml^2 \cos^2 \theta - \mu_k ml^2 \cos \theta \sin \theta} = \frac{N_\lambda}{D_\lambda} \quad (3)$$

식(3)으로 표현되는 λ 가 양수라면, 막대의 끝점 p는 지면과 접촉을 유지하며 미끄러지고 있는 상태가 되며 불일치 문제는 발생하지 않게 된다. 그런데, λ 가 음수가 된다면, 이는 막대가 지면으로부터 분리되어 있음을 의미한다. 그런데, λ 는 식(4)와 같이 두가지 경우에 음수가 될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Case 1 : } N_\lambda < 0, \quad D_\lambda > 0 \\ \text{Case 2 : } N_\lambda > 0, \quad D_\lambda < 0 \end{aligned} \quad (4)$$

두가지 Case 모두에 대해, 막대의 지면으로부터의 분리는 기구학적 및 힘 구속조건을 제거를 요구하게 되며, 따라서 제시된 시스템의 동적거동을 묘사하는 운동방정식은 식(1)에서 식(5)로 바뀌게 된다.

$$M\dot{V} = F_{ext} \quad (5)$$

접촉점 p 에서 y 방향으로의 속도는 식(6)과 같이 표현되고,

$$v_{py} = \Phi_y V \quad (6)$$

식(6)을 시간에 관해 한번 미분하면 막대끝점 p 의 y 방향 가속도는 식(7)로 나타난다.

$$a_{py} = \dot{\Phi}_y V + \Phi_y \dot{V} = \dot{y}_c - \dot{\omega} l \cos\theta + \omega^2 l \sin\theta \quad (7)$$

식(5)로부터 \dot{y}_c 과 $\dot{\omega}$ 를 구해 식(7)에 대입하면 p 의 y 방향 가속도는 식(8)로 구해진다.

$$a_{py} = \frac{F_y}{m} - \frac{\tau}{I} l \cos\theta + \omega^2 l \sin\theta \quad (8)$$

이제, 식(4)로 주어지는 두가지 경우에 대해 불일치의 가능성을 검토한다.

2.1 Case 1

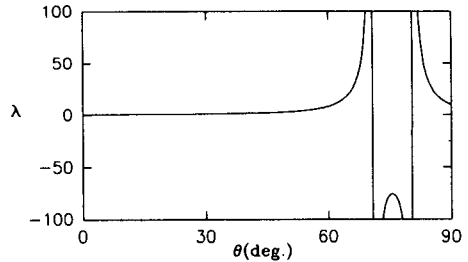
$N_\lambda < 0$ 이라면, 식(3)과 식(8)로부터 쉽게 알 수 있는 사실은 접촉점 p 의 $+y$ 방향 가속도 a_{py} 가 양수가 된다는 것이다. 이는 막대의 끝점 p 가 $+y$ 방향으로 가속도($a_{py} > 0$)를 가지며, 지면으로부터 분리해 나가기 시작하는 것을 의미한다. 따라서, 이 경우에도 불일치 문제는 발생하지 않게 된다.

2.2 Case 2

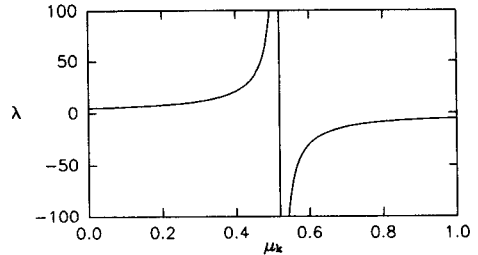
$N_\lambda > 0$ 이 되게 되면, 막대의 끝점 p 가 $-y$ 방향으로 가속도($a_{py} < 0$)를 가지게 된다. 이것은 주어진 순간에 막대의 끝점 p 가 지면으로부터 분리되지 않는다는 사실을 의미하게 된다. 그러나, 음수의 수직 반력을 가지게 되므로 접촉도 유지하고 있다고 해석할 수도 없다. 바로, 이 경우에 해가 존재하지 않는 불일치가 발생하게 되는 것이다. 식(4)에서 표현하고 있는 두번째 조건 $D_\lambda < 0$ 에 대한 검토는 불일치의 범위를 축소시킬 수 있을 것이다. 수직반력 λ 의 분모인 D_λ 는, 마찰력이 존재하지 않을 경우($\mu_k = 0$) 항상 양수임을 알 수 있다. 즉, 마찰력을 무시할 수 있는 경우, 제시한 시스템에 대해 불일치 문제는 발생하지 않음을 알 수 있다. 그러나, 쿨롱마찰을 고려하는 경우, D_λ 는 음수가 될 수 있고 불일치 문제가 발생할 수 있게 된다. 또한, 지면과 막대와의 각도 θ 의 범위를 0° 에서 90° 로 하였는데, 그 범위가 90° 에서 180° 의 경우는 식(3)의 D_λ 에서 보는 것처럼 미끄럼의 방향을 반대($+x$ 방향)로 설정해야 불일치 발생이 가능하다

Table 1 Sliding rod example ; Physical parameters

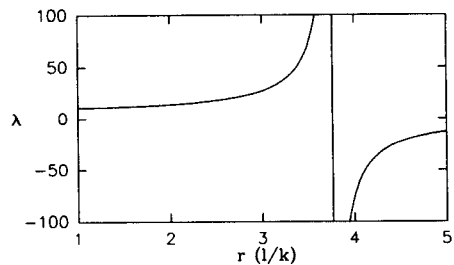
External force	$F_x = 0$	$\tau = 0$
	$F_y = -mg$	$g = 9.81 \text{ (m/s}^2\text{)}$
Inertia	$I = m \cdot k^2$	$m = 1 \text{ (kg)}$
Velocity	$v_{Gx} < 0$	$v_{Gy} = 0, \quad \omega = 0$



(a) $\mu_k = 0.55, r = 4$



(b) $\theta = 75 \text{ deg.}, r = 4$



(c) $\theta = 75 \text{ deg.}, \mu_k = 0.55$

Fig. 2 Normal reaction force at contact point p of the sliding rod

므로 해석방법은 동일하다. 특히 각도 θ 가 90° 일 경우에는, 식(3)으로부터 알 수 있는 것처럼 수직 반력의 분모 D_λ 가 양수가 되어 불일치의 경우가 아니다.

불일치가 발생하는 경우를 쉽게 확인할 수 있도록, Table 1에 보여지는 것과 같은 값들을 본 논

문에서 인용하고 있는 시스템에 적용시켜 본다. 그러면, 수직 반력은 식(9)로 나타내게 된다.

$$\lambda = \frac{g}{1 + r^2 \cos^2 \theta (\cos \theta - \mu_k \sin \theta)} \quad (9)$$

식(9)에서 r 은, 막대의 무게중심으로부터 지면과의 접촉점 p 까지의 길이 l 과 막대의 질량회전반경(radius of gyration) k 와의 비($r=l/k$)이다. 막대가 지면과 이루는 각도 θ , 동마찰계수 μ_k 또는 r 을 각각 변화시켰을 때, 수직 반력 λ 값들의 변화가 Fig. 2에 보여지고 있다. Fig. 2에서 볼 수 있는 것처럼, 상당히 넓은 범위에서 음수의 수직반력을 가지게 된다. Fig. 2에서 알 수 있는 것처럼, 마찰계수가 크고 질량이 무게중심 근처에 집중될수록(작은 질량회전반경), 그리고 지면과의 각도가 비교적 큰 경우에 불일치가 쉽게 발생하게 된다.

3. 불일치의 해석

본 절에서는 불일치 문제를 해석하는 과정을 제시할 것이며, 그 과정을 통해 충돌이라는 물리적인 현상을 도입하지 않고서는 해석이 불가능하다는 결과와 함께 접선충돌의 개념을 도출할 것이다. 또한, 접선충돌로 문제를 설정하였을 경우 반발계수에 대한 보편적인 Newton의 정의와 쿨롱의 마찰법칙의 단순 적용으로는 문제 해결이 가능하지 않음을 보여주고, 따라서 충돌과정동안의 동역학 해석이 요구됨을 유도하게 된다.

미끄러지는 막대문제에서의 불일치는, 지면과의 접촉과정이라고도 볼 수 없고, 또한 지면으로부터의 분리과정이라고도 볼 수 없다는 데 있다. 여기서 우리가 고려할 수 있는 유일한 물리적 현상은 충돌일 수 밖에 없다. 주어진 순간에 그 막대는 지면과 분리되어 있고, 막대 끝점의 가속도가 $-y$ 방향으로 발생하며 충돌을 일으킨다고 고려하는 것이 합리적인 추론으로 여겨진다. 그런데, 통상 강체간의 충돌이 발생하기 위해서는 충돌점의 상대 접근속도가 존재하여야만 가능할 것이다. 그러나, 미끄러지는 막대문제에서는 상대 접근속도가 0이다. 이 점이, 우리가 충돌이라는 상황을 인정하기 어렵게 만든다. 그러나, 마찰력이 개재되어 있는 경우, 항상 마찰 역적(frictional impulse or tangential impulse)이 동반된다는 사실에 근거하여, 상대 접근속도가 0인 두 강체상의 접점에서 접선충돌(tangential

collision)을 인정하는 방법 외에 강체역학의 범주에서 다른 대안이 없는 것으로 여겨진다.

상대접근 속도가 0인 접선충돌의 개념을 인정할 경우 우리는 또 다른 어려움을 가지게 된다. 식(10)은 충돌점의 충돌전 법선속도 v_{py} 와 충돌후 법선속도 v'_{py} 의 비로 정의되는 반발계수 e 에 대한 Newton의 규칙을 나타내었다.

$$v'_{py} = -e v_{py} \quad (10)$$

식(10)에서 볼 수 있는 것처럼, 막대 끝점 p 의 충돌전 법선속도가 0이므로 어떤 반발계수에 대해서도 p 의 충돌후 법선속도 또한 0이 된다. 이것으로부터 알 수 있는 것은, 충돌후에 막대 끝점 p 는 여전히 지면과 접촉하고 있다는 것이다. 충돌후에도 여전히 불일치 상황을 극복하기 위해서는, 충돌후 접촉점 p 의 접선속도 즉, x -방향 속도 v_{px} 가 0이 되어 정지상태(sticking phase)로 바뀌거나 혹은 미끄럼의 방향이 바뀌어야만($v_{px} > 0$) 한다는 것이다. 충돌과정동안 충돌점 p 는 미끄럼이 정지되거나 또는 그 방향을 바꾸어야 하므로 충돌과정동안의 동역학 해석을 요구하게 된다. 따라서, 단순히 법선역적(normal impulse) P_y 에 동마찰계수 μ_k 를 곱해 마찰역적 P_x 로 설정하는 것은 적절치 못하다는 것을 시사하고 있다.

역적-운동량법칙(impulse-momentum law)을 이용하여, 주어진 순간에 미끄러지는 막대에서의 충돌을 모델링하면 식(11)로 나타낼 수 있다.

$$m v'_{cx} = m v_{cx} + P_x \quad (11a)$$

$$m v'_{cy} = m v_{cy} + P_y \quad (11b)$$

$$I \omega' = I \omega + l (P_x \sin \theta - P_y \cos \theta) \quad (11c)$$

식(10)에서 $v_{py} = v'_{py} = 0$ 이 되므로, 그 관계는 식(12)로 표현된다.

$$v_{cy} = l \omega \cos \theta, \quad v'_{cy} = l \omega' \cos \theta \quad (12)$$

마찰역적을, 쿨롱의 법칙을 이용하여 단순히 법선역적으로부터 구하면 식(13)으로 나타낸다.

$$P_x = \mu_k P_y \quad (13)$$

이제, 식(11)~(13)을 모두 결합하면 식(14)로 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & -\mu_k \\ 0 & ml \cos \theta & -1 \\ 0 & I & l(\cos \theta - \mu_k \sin \theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v'_{cx} \\ \omega' \\ P_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m v_{cx} \\ ml \omega \cos \theta \\ I \omega \end{pmatrix} \quad (14)$$

식(14)를 풀면, 법선역적과 접선역적은 모두 0이 되고, 충돌후 속도는 충돌전 속도와 같게 된다. 따라서 불일치 문제는 해결되지 않는다. 문제의 해결을 막은 것은 이미 예측했던 것처럼 우선 식(13)에 의해 주어지는 관계이다. 그와 더불어 반발계수의 적용을 곤란하게 한 Newton의 식(10)도 문제의 해결을 불가능하게 하고 있다.

결국, 미끄럼막대 문제를 마찰이 개재된 충돌의 문제로 정형화하기 위해서는, 반발계수에 관한 다른 정의와 충돌과정동안의 동역학 해석이 요구된다고 할 수 있다.

4. 마찰충돌의 해석

미끄럼막대 문제에서 발생하는 불일치를 해소하기 위해서 Han의 마찰충돌이론⁽¹⁰⁾을 적용한다. 강제역학에서 충돌현상은 통상 순간적인 것으로 간주된다. 본 논문에서는 충돌현상을 순간적인 것으로 간주하지는 않고, 아주 짧은 시간동안(수 내지 수십 msec)에 발생하는 것으로 고려한다. 그리고, 충돌과정동안의 동적거동해석을 역적-운동량법칙과 쿨롱의 법칙을 이용하여 수행한다. 그러나, 충돌의 짧은 시간동안 물체들의 위치는 불변으로 가정한다. 반발계수에 대한 Newton의 정의 대신에 Poisson의 이론을 사용하여 전절에서 제시한 접선충돌의 문제에 대한 해를 제공한다. 이를 통해, 미끄럼막대에서 발생하는 불일치 문제를 해소하게 되는 것이다.

4.1 접선충돌의 해석

t_0 에서 충돌이 시작하는 것으로 하고, 역적-운동량 법칙을 이용하여 충돌과정동안 동적 거동을 모델링하면 식(15)로 표현할 수 있다.

$$v_{cx}(t) = v_{cx}(t_0) + \frac{1}{m}P_x(t) \quad (15a)$$

$$v_{cy}(t) = v_{cy}(t_0) + \frac{1}{m}P_y(t) \quad (15b)$$

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \frac{I}{I}(P_x(t)\sin\theta - P_y(t)\cos\theta) \quad (15c)$$

충돌 접촉점에서의 상대속도를 식(15)를 사용하여 접선방향과 법선방향으로 각각 구하면 식(16)과 (17)로 나타낼 수가 있다. 식(18)에는 관련된 3개의 상수를 보여주고 있다.

$$s(t) = s_0 + AP_x(t) - BP_y(t) \quad (16)$$

$$c(t) = c_0 - BP_x(t) + A'P_y(t) \quad (17)$$

where

$$\begin{cases} s(t) = v_{px}(t), s_0 = s(t_0) \\ c(t) = v_{py}(t), c_0 = c(t_0) \\ \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{m} + \frac{l^2}{I}\sin^2\theta \\ A' &= \frac{1}{m} + \frac{l^2}{I}\cos^2\theta \\ B &= \frac{l^2}{I}\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (18)$$

3개의 상수 A, A', B 는 충돌전 속도와 무관하며, 충돌하는 두 물체의 기하학적 상대위치의 함수이다. 상수 A 와 A' 는 항상 양수이고, $AA' > B^2$ 에 주목하여야 한다. 본 논문의 2절에서 언급했던 것처럼, 지면과 막대와의 각도 θ 의 범위를 0° 에서 90° 로 할 때 상수 B 도 양수이다. 두개의 물체가 충돌하기 위해서는 c_0 가 음수이어야 하지만, 접선충돌의 경우 c_0 는 0이다. 또한, 주어진 순간에 미끄럼의 방향을 $-x$ 방향으로 설정하였으므로 $s_0 < 0$ 이 된다.

충돌문제를 해결하기 위해 식(15)로 표현되는 역적-운동량 방정식에 추가하여, 2개의 구속조건이 더 필요하게 된다. 이 두개의 구속조건은 충돌하는 두 물체의 물리량 즉, elasticity와 표면의 roughness에 좌우될 것이다. Poisson에 의하면 강체사이의 충돌과정은 압축과정(compression period)과 반발과정(restitution period)의 연속적인 진행으로 고려할 수 있다. 충돌에서 압축과정의 종료시점을 나타내기 위해, (P_x, P_y) 평면에서 상대법선속도 $c(t)$ 가 0이 되는 직선을 최대 압축선(maximum compression line) C 로 정의한다면 식(17)로부터 식(19)와 같이 최대 압축선을 나타낼 수 있다.

$$C : -BP_x + A'P_y = 0 \quad (19)$$

Fig. 3에 보여지는 것처럼, 최대 압축선 C 는 (P_x, P_y) 평면에서 원점을 통과하게 될 것이다. (P_x, P_y) 평면에서 충돌의 경로를 나타내는 선이 C 와 교차하는 순간에, 접촉점의 상대 접근속도는 충돌 개시점 외에 다시 한번 0이 될 것이고, 충돌의 압축과정이 종료된다. 반발계수는 식(20)으로 표현할 수 있고, 식에서 t_c 는 최대 압축발생시간, t_r 는 충돌 종료시간이다.

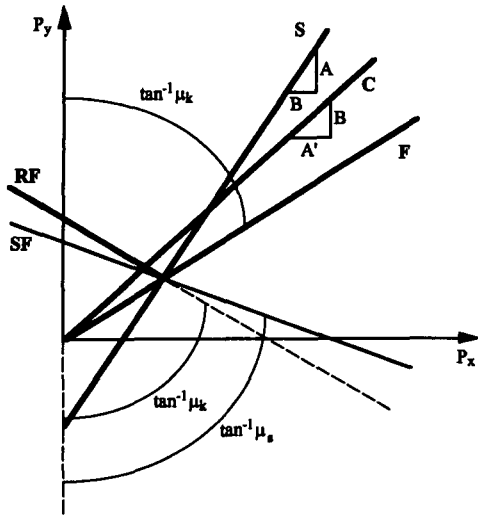


Fig. 3 A typical process diagram of the tangential collision with friction

$$\frac{P_y(t_f)}{P_y(t_c)} = 1 + e \tag{20}$$

이와 같이 식(19)와 (20)을 가지고 충돌동안 법선 역적을 결정할 수 있으며, 두 식은 함께 하나의 역적 구속조건식(impulse constraint equation)을 제공한다.

미분역적(differential impulse)은 힘이므로 마찰 역적은 Coulomb의 법칙을 이용할 수 있을 것이다. 3가지의 다른 경우를 식(21)로 정리할 수 있다.

$$\begin{cases} \text{Stiction (no sliding)} : |dP_x| < \mu_s \cdot dP_y \\ \text{Sliding impending} : |dP_x| = \mu_s \cdot dP_y \\ \text{Sliding} : |dP_x| = \mu_k \cdot dP_y \end{cases} \tag{21}$$

식(21)에서 dP_x 와 dP_y 는 각각 접선과 법선방향으로의 미분 선형역적이다. 충돌하는 두 물체의 접촉점에서의 상대 접선속도 $s(t) = 0$ 로 하면 (P_x, P_y) 평면에서 교차점촉(sticking contact)에 관한 역적의 선형관계식을 식(22)로 구할 수 있다.

$$S : s_0 + AP_x - BP_y = 0 \tag{22}$$

Fig. 3에 보여지는, 이 직선을 (P_x, P_y) 평면에서 미끄럼 정지선(sticking line) S라고 정의한다. 식(21)과 (22)는 또 하나의 역적 구속조건식을 제공한다.

4.2 불일치의 해소

Fig. 3에 S와 C가 각각 보여지고 있다. 그런데, $AA' > B^2$ 이므로 (P_x, P_y) 평면에서 S의 기울기는 항상 C보다 크게 된다. 충돌의 초기에 접촉점에서 미끄러지기 시작하므로($s_0 < 0$), 충돌은 한계마찰선(limiting friction line, F)을 따라 진행하게 된다. 한계마찰선은 식(23)에 의해 역적 평면상에 표시된다.

$$P_x = \mu_k P_y \tag{23}$$

(P_x, P_y) 평면의 원점에서 C와 F가 교차한 후, 바로 분리되기 시작하므로 상대접근속도 C가 0인 접선충돌에서도, 충돌이 개시되자마자 법선방향의 속도가 발생하기 시작함을 알 수 있다. 한계마찰선(F)이 미끄럼 정지선(S)과 교차하는 점에서, 두 가지의 가능한 변화가 있게 된다. Fig. 3에서 보는 바와 같이, 미끄럼을 막는 마찰력이 최대 정지마찰력보다 작게 될 때, 충돌은 그 교차점에서 충돌의 종료시까지 미끄럼 정지선(S)을 따라 진행(미끄럼 정지상태)하게 될 것이다. 그런데, 마찰력이 최대 정지 마찰력보다 크게 될 때 마찰은 그 기울기를 유지하며 방향을 바꾸게 될 것이다. 그런데, Fig. 3에서 알 수 있는 것처럼, 어느 경우이건, F의 기울기가 C보다 크게 되면 충돌 경로가 C를 만나는 일은 없을 것이다. 이는, 식(20)에 의해 정의되는 반발계수에 대한 Poisson의 정의를 사용할 수 없음을 의미하며 해석이 불가능하게 된다. 즉, 마찰 충돌해석을 위해서는 식(24a)에 의해 주어지는 조건이 충족되어야 한다.

$$\frac{A'}{B} < \mu_k \tag{24a}$$

$$\frac{B}{A} < \frac{A'}{B} < \mu_k \leq \mu_s \tag{24b}$$

식(24a)로부터 바로 식(24b)를 유추할 수 있다. 식(24b)로부터 알 수 있는 것은 F와 S의 교차점에서, S를 따라 충돌이 진행할 수 밖에 없다는 점이다. 이는, Han의 마찰충돌분류에 의하면 미끄럼 정지(sliding and sticking) 충돌로서 그가 제시한 7가지 Case중 Case 1에 해당된다. 따라서, S와 C의 교차점이 접선충돌 과정에서 최대 압축이 발생하는 점이 된다. 그 교차점에서 P_y 값을 구해, 식(20)을 적용하면 충돌 종료시점에서의 법선역적 P_y' 는 식(25)로 나타난다.

$$P'_y = P_y(t_f) = (1+e) \frac{B}{AA' - B^2} (-s_0) \quad (25)$$

S로부터 P_y 좌표가 식(25)로 나타나는 P_x 를 구하면, 이것이 충돌 종료시점에서의 접선역적이고 식(26)으로 나타난다.

$$P'_x = P_x(t_f) = \frac{eB^2 + AA'}{A(AA' - B^2)} (-s_0) \quad (26)$$

식(25), (26)의 역적들은 양수이다. 그리고, 주목할 점은 식(25), (26)으로부터 알 수 있는 것처럼 최종 역적의 값이 마찰계수와 무관하다는 것이다. 이는, Fig. 3에서 알 수 있는 것처럼, 충돌경로가, 미끄럼 정지 충돌의 경우에 속하여, 충돌과정중 최대 압축이 발생하는 순간과 충돌 종료순간에 미끄럼 정지선 S상에 있기 때문이다. 다만, 반발계수 e , 기하학적 상대위치의 함수들인 A, A', B 와 초기 미끄럼속도 s_0 의 함수로서 역적들의 값이 결정된다. 그러나, 마찰충돌해석을 요구할 수 밖에 없는 불일치 상황을 발생시키는 데는 마찰계수가 역할을 한다. 식(25), (26)으로 표현되는 최종 역적의 값들을 식(17)에 적용하면, 막대 끝점 p 의 충돌후 법선방향 속도를 식(27)과 같이 구할 수 있다. 미끄럼정지 충돌이므로 p 의 충돌후 접선방향 속도는 0이 될 것이다.

$$\begin{aligned} v'_{py} &= c' = e \frac{B}{A} (-s_0) \\ &= e \frac{ml^2 \sin \theta \cos \theta}{I + ml^2 \sin^2 \theta} (-s_0) \end{aligned} \quad (27)$$

식(27)에서 볼 수 있는 것처럼, 접선충돌후 막대 끝점의 법선속도는 +y 방향을 가지게 된다. 이와 같이, Lötstedt의 미끄러지는 막대에서 발생하는 불일치 문제는, 접선충돌의 개념을 설정하고 마찰충돌 이론을 적용함으로써 비로소 해결할 수 있게 된다.

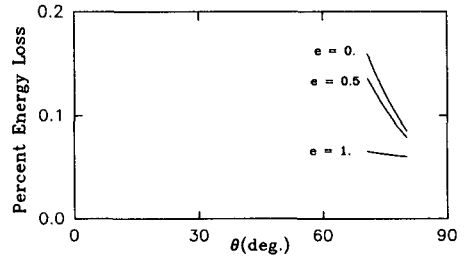
접선충돌의 경우, 마찰충돌이론을 적용하기 위해서는 식(24a)에서 제시하는 조건이 만족되어야 하는데, 이 조건이 만족되지 못하는 경우가 언제 발생하는지를 검토하는 것이 미끄럼 막대에서 발생하는 불일치 문제 해소를 완결하는 의미가 있을 것이다. 식(24a)를 만족하지 못하는 경우를 다시 쓰면, 식(28)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{m} + \frac{l^2}{I} \cos^2 \theta \geq \mu_k \frac{l^2}{I} \sin \theta \cos \theta \quad (28)$$

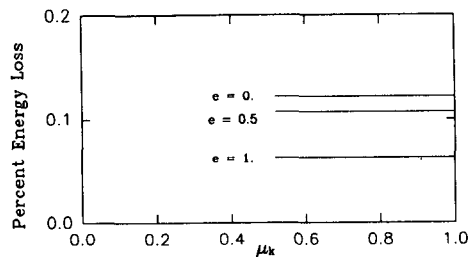
식(3)에서 볼 수 있는 것처럼, 식(28)의 조건은 수

직 반력 λ 의 분모 D_λ 를 양수로 하는 조건과 동일하다. 즉, 접선충돌의 문제에서 마찰충돌의 해석이 불가능한 경우는 불일치가 발생하지 않는 경우이다. 이와 같이, 미끄럼막대 문제에서의 불일치는 마찰충돌이론에 의해 항상 해소가 가능하다.

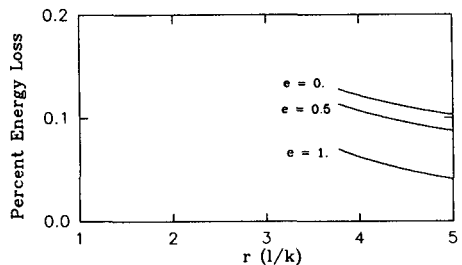
Table 1에 보여지는 물리적 수치값들을 가지고, Lötstedt의 미끄러지는 막대문제에 대해 마찰충돌 해석을 수행한 결과가 Fig. 4에 보여진다. Fig. 4 (a), (b), (c)에서는, 막대가 지면과 이루는 각도 θ , 등마찰계수 μ_k , 그리고 질량회전반경 k 를 각각 변화시켰을 때, 접선충돌 후 에너지 감소량의 추이



(a) $\mu_k = 0.55, r = 4$ ($l = 1$ m, $k = 0.25$ m), $v_{Gx} = -1$ m/s



(b) $\theta = 75$ deg., $r = 4$ ($l = 1$ m, $k = 0.25$ m), $v_{Gx} = -1$ m/s



(c) $\theta = 75$ deg., $\mu_k = 0.55, l = 1$ m, $v_{Gx} = -1$ m/s

Fig. 4 Percent energy loss for the sliding rod experiencing tangential collision: Percent energy loss = (pre-impact E - post-impact E) / pre-impact E.

를 보여주고 있으며, 표시가 안된 구간은 불일치가 발생하지 않는 구간이다. 반발계수 e 가 1인 완전 탄성충돌의 경우에도, 마찰계수의 존재 때문에 에너지 감소가 있게 된다. 또한, Fig. 4(b)는 마찰계수의 증가가 반드시 에너지 감소의 증가를 의미하지 않는다는 것을 보여주고 있다. Lötstedt의 미끄러지는 막대문제에 대해, 접선충돌로 문제를 정의할 경우 반발계수 및 막대가 지면과 이루는 각도가 증가할수록, 또 질량회전반경이 감소할수록 에너지 감소량이 줄어든다는 사실을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 마찰력이 개재된 강체역학의 범주 내에서 불일치의 예로 자주 거론이 되는 Lötstedt의 미끄러지는 막대문제를 대상으로 불일치가 발생하는 과정과 그 불일치를 적절히 해소하는 한 방안을 제시하였다.

우선, 지면과의 접촉점에서의 반력에 대한 해석적인 접근을 통해 불일치를 유도하였고, 그 불일치를 해석하는 과정을 제시하였으며, 그 과정을 통해 충돌이라는 물리적인 현상을 도입하지 않고서는 불일치의 해소가 불가능하다는 결과와 함께 접선 충돌의 개념을 도출하였다. 즉, 두 강체의 접촉점에서 법선방향으로의 상대속도가 0인 경우의 충돌을 고려하는 것이다. 이는, 아직까지 물리적으로 용이하게 받아들이기 어려운 것도 사실이다. 접선 충돌이라는 개념을 물리적으로 설정하기 위해서는 구조역학적인 해석이 필요하리라 여겨진다. 또한, 접선충돌로 문제를 설정하였을 경우, 반발계수에 대한 보편적인 Newton의 정의와 쿨롱마찰법칙의 단순 적용으로는 문제해결이 가능하지 않음을 보여주었고, 따라서 충돌과정동안의 동역학 해석이 요구됨을 유도하였다.

미끄럼막대문제에서 발생하는 불일치를 해소하기 위해서 Han에 의해 발표된 마찰충돌이론⁽¹⁰⁾을 적용하였다. 강체역학에서 충돌현상은 통상 순간적인 것으로 간주된다. 본 논문에서는 충돌현상을 순간적인 것으로 간주하지는 않고, 아주 짧은 시간동안(수내지 수십 msec)에 발생하는 것으로 고려하였다. 그리고, 충돌과정동안의 동적 거동 해석을 역적-운동량 법칙과 쿨롱의 법칙을 이용하여 수행하였다. 반발계수에 대한 Newton의 정의 대신에 Poisson의 이론을 사용하여, 접선 충돌의 문제에

대한 해를 구하였다. 이를 통해, 미끄럼 막대에서 발생하는 불일치 문제를 해소하였다. 또한, 접선충돌의 문제에서 마찰충돌의 해석이 불가능 경우는 불일치가 발생하지 않는 경우라는 것을 밝혔다. 이와 같이, Lötstedt의 미끄러지는 막대문제에서의 불일치는 마찰충돌 이론에 의해 항상 해소가 가능함을 보여 주었다. 그러나, 불일치의 해소를 넘어 실제 문제에 대한 보다 완벽한 상사성을 위해서는 본 논문에서 제시하는 결과에 대한 실험적 검증이 필요한 일이라 여겨진다.

물체들의 동적거동을 해석하기 위한 컴퓨터 시뮬레이션 알고리즘을 작성하거나, 혹은 제어를 위한 모델링에 있어, 본 논문에서 제시하는 바와 같은 불일치나 모호함은 치명적일 수 있다. 본 논문의 결과는 로봇의 동작계획,⁽⁷⁾ 제어 혹은 기계 다이내믹 시스템의 해석 등에서 강체역학에서의 불일치 문제를 제거할 수 있게 할 것이다. 이외에도 강체들의 다중충돌⁽¹⁰⁾이나 두 강체간의 2점 접촉에 쿨롱마찰이 개재될 경우 발생하는 모호함 등도 이미 제기된 바 있는데, 이러한 문제들의 해결은 기계 시스템들을 위한 효과적인 시뮬레이션 패키지의 개발이나, 성공적인 로봇의 동작정책(motion strategy) 수립 등에 기여하고 있다.

후 기

이 논문은 1992년도 한국과학재단 연구비 지원(923-0900-010-2)을 받아 수행되었다.

참고문헌

- (1) Han, I., Gilmore, B. J. and Ogot, M. M., 1993, "The Incorporation of Arc Boundaries and Stick/Slip Friction in a Rule-Based Simulation Algorithm for Dynamic Mechanical Systems with Changing Topologies," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 423~434.
- (2) Dupont, P. E., 1992, "The Effect of Coulomb Friction on the Existence and Uniqueness of the Forward Dynamic Problem," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1442~1447.
- (3) Wang, Y.-T., Kumar, V. and Abel, J., 1992, "Dynamics of Rigid Bodies Undergoing Multiple

- Frictional Contacts," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2764~2769.
- (4) Mason, M. T. and Wang Y., 1988, "On the Inconsistency of Rigid-Body Frictional Planar Mechanics," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 524~528.
- (5) Rajan, V. T., Burridge, R. and Schwartz, J. T., 1987, "Dynamics of a Rigid Body in Frictional Contact with Rigid Walls," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 671~677.
- (6) Howard, W. S. and Kumar, V., 1993, "A Minimum Principle for the Dynamic Analysis of Systems with Frictional Contacts," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Vol. 3, pp. 437~442.
- (7) Taylor, R. H. and Mason, M. T., 1987, "Sensor-Based Manipulation Planning as a Game with Nature," *Robotics Research: The Fourth Int. Symp.*, MIT Press, Cambridge, pp. 421~429.
- (8) Brach, R. M., 1989, "Rigid Body Collisions," *ASME J. of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 133~138.
- (9) Brach, R. M., 1991, *Mechanical Impact Dynamics -Rigid Body Collisions*, John Wiley & Sons, New York, pp. 97~114.
- (10) Han, I. and Gilmore, B. J., 1993, "Multi-Body Impact Motion with Friction -Analysis, Simulation and Experimental Validation," *Designated as Best Technical Paper 1990 ASME Design Automation Conference, and ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 412~422.
- (11) Routh, E. J., 1891, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, MacMillan and Co., London, pp. 158~171.
- (12) Keller, J. B., 1986, "Impact with Friction," *ASME J. of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 1~4.