

〈論 文〉

2차원 포물형 반사경에 의한 충격파의 초점형성에 대한 수치해석

최환석* · 백제현**

(1993년 4월 13일 접수)

Numerical Analysis of Shock-Wave Focusing from a Two-Dimensional Parabolic Reflector

Hwan Seok Choi and Je Hyun Baek

Key Words: Finite Volume Method(유한체적법), Shock-Wave Focusing(충격파 초점형성), Upwind TVD Scheme(풍상 TVD 해법)

Abstract

Shock-wave focusing from a two-dimensional parabolic reflector was simulated using an explicit finite volume upwind TVD scheme. Computations were performed for three different incident shock speeds of $M_s=1.1, 1.2$ and 1.3 , corresponding to the relatively weak, intermediate, and strong shock waves, respectively. Numerical solutions nicely resolved all the waves evolving through the focusing process. As the incident shock strength increases, a transition was observed in the shock-fronts geometry that was caused by the change in the reflection type of converging shock fronts on the axis of symmetry, from regular-type to Mach-type reflection. The computed maximum on-axis pressure amplification and the trajectories of three-wave intersections showed good agreement with experimental results. The strong nonlinear effect near the focal region which determines the shock-fronts geometries at and behind the focus and at the same time confines the pressure amplification at the focus was clearly revealed from the present numerical simulation.

기 호 설 명

a : 특성치
 \bar{A}, \bar{B} : 플럭스벡터의 Jacobian 행렬
 e : 단위체적당 총 에너지
 J : 좌표변환의 Jacobian
 F, G : 직교좌표계에서의 플럭스벡터
 \bar{F}, \bar{G} : 곡선좌표계에서의 플럭스벡터
 \bar{F}, \bar{G} : 수치플럭스
 g : 플럭스 제한함수

M_s : 입사충격파의 속도
 p : 압력
 Q : 보존변수벡터
 R, R^{-1} : 우특성 행렬 및 그 역행렬
 t : 시간
 \bar{U}_k : k 방향으로의 정규화된 Contravariant 속도
 x, y : 직교좌표계
 ξ, η : 곡선좌표계
 u, v : x, y 방향의 속도성분
 α : 특성변수 변화량
 ϵ : 엔트로피 보정계수

*정회원, 한국항공우주연구소

**정회원, 포항공과대학 기계공학과

γ : 비열비
 ρ : 밀도
 ψ : 엔트로피 보정함수

상첨자

n : 시간단계

하첨자

1, 2 : 이동충격파의 전후

i, j : 격자중심

L, R : 격자면의 좌측과 우측

1. 서 론

충격파도 빛과 마찬가지로 반사경에 의하여 반사되어 국부적으로 높은 에너지를 갖는 초점을 형성하는데 이러한 충격파의 초점형성현상은 충격파가 오목 반사경에 의하여 반사될 때 뿐만 아니라 초음속 항공기가 선회할 때나 가속할 때도 발생한다. 또한 최근에 들어서 충격파가 초점에 모아질 때 형성되는 높은 에너지를 신장(kidney)에 형성된 결석을 외과적 수술없이 제거하는 의료기계에 응용하면서 이 현상에 대한 관심이 더욱 고조되었다. 충격파가 어떤 원인에 의하여 그 진행방향에 대하여 오목하게 변형되면 수렴하여 초점을 형성하는데 이 현상은 초점영역에서의 강한 공기 역학적 비선형성으로 인하여 음파와 같이 파의 세기가 미소한 경우가 아니면 기하음향학(geometrical acoustics)과 같은 선형이론으로는 정확한 해석을 할 수 없다. 이 현상은 썩기를 지나는 충격파가 그 강도나 썩기의 각도에 따라서 정규(regular) 반사나 마하(mach) 반사의 서로 다른 형태로 반사되는 것처럼 이 경우에도 입사충격파의 세기나 반사경의 곡률에 따라서 서로 다른 형태의 반사가 이루어진다.

공기중에서 충격파의 초점형성에 관한 실험적 연구는 Sturtevant와 Kulkarny,⁽¹⁾ Holl과 Grönig 등⁽²⁾에 의하여 수행되었으며 또한 신장 결석분쇄기에의 응용과 관련되어 물속에서의 충격파의 초점형성현상에 관해서도 연구되었다.^(3,4) 이 현상에 관한 수치적 연구도 많이 진행되었는데 이것은 앞의 몇몇 연구^(2,3)에서도 찾아볼 수 있다. 또한 Olivier와 Grönig⁽⁵⁾은 Sturtevant와 Kulkarny⁽¹⁾의 실험을 토대로 Glimm⁽⁶⁾에 의하여 제안된 Random Choice

Method(RCM)에 연산자 분할법(operator splitting method)을 적용하여 이 현상을 수치해석 하였다. RCM은 1차원 문제에 대하여서는 불연속면을 수치 확산(diffusion)이나 수치 산란(dispersion) 없이 한 격자내에서 예리하게 포착하고 불연속면 주위에서 수치해에 진동을 발생시키지 않는다는 장점을 가지지만 2차원 문제에 대해서는 불연속면이 격자선에 대하여 경사지게 전파되면 이것이 몇몇 격자에 걸쳐서 나타나게 되어 1차원 문제에서 갖던 장점을 상실하게 된다. 또한 이 해법 자체가 갖는 무작위성(randomness)으로 인하여 불연속면이 평균적으로는 엄밀하게 정의되지만 각 순간에 있어서는 그렇지 못하다는 단점을 가진다. Olivier와 Grönig⁽⁵⁾의 계산결과를 보면 반사된 충격파 뒤부분에 형성되는 팽창파 영역에서 수치해에 심한 동요(fluctuation)가 있음을 알 수 있는데 이것은 계산에 사용된 RCM의 무작위성과 연산자 분할에 의한 오차, 그리고 직교 좌표계를 사용함에 따라 곡선 형태인 반사경의 표면을 계단식으로 처리한데서 기인한 것으로 생각된다. 좀 더 최근에는 Sommerfeld⁽⁷⁾가 Colella와 Glaz⁽⁸⁾에 의하여 제안된 piecewise linear method를 사용하여 이 문제를 해석하였는데 전자의 결과와 비교해 볼때 충격파를 훨씬 더 깨끗하게 포착하고 있으며 수치해의 동요도 거의 제거되었음을 알 수 있다.

수치해법에 있어서 유동장내에 불연속면이 존재하는 경우, 2차 이상의 정밀도를 갖는 고전적인 중앙 차분법은 항상 불연속면 주위에서 수치해에 진동을 발생시켜 해의 정확도를 저하시키고 이와 동시에 비선형적 불안정성을 유발한다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 많은 연구가 진행되었으며 그 결과 근래에 들어서 쌍곡형 방정식에 대한 고해상도를 갖는 충격파 포획해법(shock-capturing scheme)이 개발되었는데 이들은 총 변량감소(total variation diminishing(TVD)) 성질로 특징지어진다. TVD해법은 고차의 정밀도를 가지면서도 불연속면 주위에서 수치해에 진동을 발생시키지 않기 때문에 충격파나 접촉 불연속면을 예리하게 포착할 수 있으며 또한 높은 안정성을 가진다. 이러한 TVD해법의 개념은 Harten⁽⁹⁾에 의하여 처음 도입되었는데 그는 해의 경사가 완만한 영역에서는 2차의 정밀도를 지니면서 불연속면 주위나 극점에서는 1차의 정밀도를 갖도록 고안된 플럭스를 사용하여 TVD해법을 개발하였다. 이 방법은 흔히 수정플럭

스(modified flux)법이라 불리우는데 Yee 등⁽¹⁰⁻¹²⁾에 의하여 더욱 발전되고 곡선좌표계로 확장되었다.

본 연구에서는 유한차분법(finite difference method)에 기초한 Yee-Harten의 외재적(explicit) 풍상(upwind) TVD해법을 유한 체적법으로 확장하여 충격파의 반사 및 충격파들 상호간의 간섭 등 복잡한 현상을 수반하는 2차원 포물형 반사경에 의한 충격파의 충돌형성현상을 수치해석 하였다.

2. 지배방정식 및 수치기법

본 계산은 비점성 유동의 가정 아래에서 행하여졌으므로 지배방정식은 2차원 압축성 Euler방정식이며 이것을 일반적인 형상에 대해 쉽게 적용하기 위하여 직교좌표계 (x, y) 에서 등간격을 갖는 일반화된 곡선좌표계 (ξ, η) 로 변환한 후 강한 보존형(strong conservation law form)으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

$$Q = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T \quad (2)$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} (\xi_x F + \xi_y G) \quad (3)$$

$$\hat{G} = \frac{1}{J} (\eta_x F + \eta_y G) \quad (4)$$

$$F = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(e+p)]^T \quad (5)$$

$$G = [\rho v, \rho vu, \rho v^2 + p, v(e+p)]^T \quad (6)$$

위식에서 $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ 는 좌표변환에 따른 Jacobian이며 F, G 및 \hat{F}, \hat{G} 는 각각 직교좌표계 및 곡선좌표계에서의 플럭스벡터들을 나타낸다. 변수 ρ, u, v 와 e 는 각각 밀도 x, y 방향으로의 속도 성분, 그리고 단위체적당 총 에너지를 나타낸다. 공기를 이상기체로 가정하면 압력 p 는 아래와 같이 구해지는데

$$p = (\gamma - 1) [e - 0.5\rho(u^2 + v^2)] \quad (7)$$

여기서, γ 는 비열비를 나타낸다.

본 연구에서는 보존변수(conservative variable)들이 체적중심에서 정의되는 체적중심 유한체적법(cell-centered finite volume method)을 사용하였다. 플럭스벡터들을 유한체적법 형태의 차분화에 적합하도록 다시 쓰면 아래와 같다.

$$\hat{F}, \hat{G} = \frac{|\nabla \kappa|}{J} \begin{bmatrix} \rho \bar{U}_\kappa \\ \rho \bar{U}_\kappa u + \bar{\kappa}_x p \\ \rho \bar{U}_\kappa v + \bar{\kappa}_y p \\ \bar{U}_\kappa (e+p) \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서, κ 는 \hat{F} 에 대하여서는 ξ, \hat{G} 에 대하여서는 η 를 취하는데 $|\nabla \kappa|/J$ 는 $\kappa = const$ 인 격자선의 길이에 해당하며

$$\nabla \bar{\kappa} = (\bar{\kappa}_x, \bar{\kappa}_y) = \frac{\nabla \kappa}{|\nabla \kappa|} \quad (9)$$

는 격자선에 수직한 단위 법선벡터이고

$$\bar{U}_\kappa = \bar{\kappa}_x u + \bar{\kappa}_y v \quad (10)$$

는 정규화(normalized)된 contravariant 속도로서 격자면에 수직한 속도성분을 나타낸다. 좌표변환에 따른 metric항들 중 격자중심에 정의되는 Jacobian을 제외하고는 모두가 격자의 표면에서 정의되며 유한체적법의 개념에 따라서 이들은 기하학적으로 구해진다. 즉, Jacobian은 격자면적의 역수를 취하며, $\kappa_x/J, \kappa_y/J$ 는 $\kappa = const$ 인 격자선을 각각 x 및 y 축에 수직한 평면상으로 투영시킨 길이로 구한다. 그러면 $\bar{\kappa}_x, \bar{\kappa}_y$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$\bar{\kappa}_x = \frac{\kappa_x/J}{\sqrt{(\kappa_x/J)^2 + (\kappa_y/J)^2}} \quad (11)$$

$$\bar{\kappa}_y = \frac{\kappa_y/J}{\sqrt{(\kappa_x/J)^2 + (\kappa_y/J)^2}}$$

본 연구에서 사용된 해법은 리만(Riemann)해법의 일종으로서 그 정의를 위해서는 플럭스벡터의 Jacobian행렬에 대한 특성치(eigenvalue) 및 특성행렬(eigenvector)에 대한 정의가 필요하다. 플럭스벡터 \hat{F}, \hat{G} 의 Jacobian 행렬을 각각 $\hat{A} = \partial \hat{F} / \partial Q$ 와 $\hat{B} = \partial \hat{G} / \partial Q$ 와 같이 정의하고 $\hat{A}_\kappa = \hat{A}, \hat{A}_\eta = \hat{B}$ 이 되도록 \hat{A}_κ 를 정의하면 \hat{A}_κ 의 특성치는 아래와 같은데

$$(a_\kappa^1, a_\kappa^2, a_\kappa^3, a_\kappa^4) = (\bar{U}_\kappa, \bar{U}_\kappa, \bar{U}_\kappa + c, \bar{U}_\kappa - c) \frac{|\nabla \kappa|}{J} \quad (12)$$

여기서, c 는 음속을 나타내고 κ 는 \hat{A} 에 대하여 ξ, \hat{B} 에 대하여서는 η 를 취한다. \hat{A}_κ 의 우특성벡터(right eigenvector)를 열벡터로 갖는 행렬 R_κ 를 정의하고 R_κ^{-1} 를 그 역행렬로 정의하자. 그리고 $Q_{i+1/2}$ 를 $Q_{i,j}$ 와 $Q_{i+1,j}$ 의 대칭평균(symmetric average)으로 정의하고 $\Gamma_{i+1/2}$ 를 격자면 $(i+1/2)$ 에서의

metric항들을 나타내기로 한다. 대칭평균으로는 단순한 대수평균을 사용할 수도 있으나 본 연구에서는 불연속면에서 Rankine-Hugoniot 조건을 정확하게 만족시킬 수 있는 Roe⁽¹³⁾의 평균을 사용하였다. 그리고 $a_{i+1/2}^*$, $R_{i+1/2}$ 와 $R_{i+1/2}^{-1}$ 를 $Q_{i+1/2}$, $\Gamma_{i+1/2}$ 를 사용하여 구해진 $a_{i+1/2}^*$, $R_{i+1/2}$ 및 $R_{i+1/2}^{-1}$ 를 나타낸다고 정의하자. 그러면 좌특성행렬 $R_{i+1/2}^{-1}$ 는 ξ 방향으로의 보존변수 벡터의 차이를 특성변수 벡터의 차이, $\alpha_{i+1/2} = [\alpha_{i+1/2}^1, \alpha_{i+1/2}^2, \alpha_{i+1/2}^3, \alpha_{i+1/2}^4]^T$ 로 변환시킨다.

$$\alpha_{i+1/2} = R_{i+1/2}^{-1}(Q_{i+1/2} - Q_i) \quad (13)$$

여기서, 첫번째와 두번째 특성장(characteristic field)은 선형장이고 세번째와 네번째 특성장은 비선형장이다. 그러면 유한체적법으로 확장된 Yee-Harten의 해법에서 ξ -방향으로의 수치 플럭스는 다음과 같이 정의되는데

$$\tilde{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2}[\tilde{F}(Q_i, \Gamma_{i+1/2}) + \tilde{F}(Q_{i+1}, \Gamma_{i+1/2}) + R_{i+1/2}\Phi_{i+1/2}] \quad (14)$$

여기서, $\tilde{F}(Q_i, \Gamma_{i+1/2})$ 는 격자중심에서의 보존변수 $Q_{i,j}$ 와 격자면 $(i+1/2, j)$ 에서의 metric항들을 이용하여 구해진 플럭스를 나타내며 열벡터 $\Phi_{i+1/2}$ 의 성분 $\phi_{i+1/2}^l$, $l=1, \dots, 4$ 은 아래와 같이 정의된다.

$$\phi_{i+1/2}^1 = \sigma(a_{i+1/2}^1)(g_i^1 + g_{i+1}^1) - \psi(a_{i+1/2}^1 + \gamma_{i+1/2}^1) a_{i+1/2}^1 \quad (15)$$

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} \left[\psi(z) - J \frac{\Delta t}{\Delta \xi} z^2 \right] \quad (16)$$

$$\gamma_{i+1/2}^1 = \sigma(a_{i+1/2}^1) \begin{cases} (g_{i+1}^1 - g_i^1) / a_{i+1/2}^1 & \text{if } a_{i+1/2}^1 \neq 0 \\ 0 & \text{if } a_{i+1/2}^1 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

위 해법은 엔트로피법칙에 위배되는 팽창충격파(expansion shock)를 안정된 해로 허용하기 때문에 이를 방지하기 위하여 식(15)와 (16)에 엔트로피 보정함수 ψ 가 도입되었으며 그 형태는 다음과 같다.

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \epsilon \\ (z^2 + \epsilon^2) / 2\epsilon & |z| < \epsilon \end{cases} \quad (18)$$

여기서, ϵ 은 작은 양(positive)의 값으로 엔트로피 보정의 정도를 조절하는데 일반적으로 비정상 유동에서는 엔트로피 법칙을 위반하는 해가 나타나지 않으므로 본 계산에서는 그 값을 0으로 하였다. 식(15)에서 g_i^1 는 플럭스 제한함수로서 본 해법이 TVD 성질을 갖도록 불연속면 주위에서 고차의 플

럭스를 제한하는 역할을 하는데 아래와 같은 형태의 것들을 사용할 수 있다.

$$g_i^1 = \min\text{mod}(a_{i-1/2}^1, a_{i+1/2}^1) \quad (19)$$

$$g_i^1 = (a_{i-1/2}^1 a_{i+1/2}^1, |a_{i-1/2}^1 a_{i+1/2}^1|) / (a_{i-1/2}^1 + a_{i+1/2}^1) \quad (20)$$

$$g_i^1 = S \cdot \max[0, \min(2|a_{i+1/2}^1|, S \cdot a_{i-1/2}^1), \min(|a_{i+1/2}^1|, 2S \cdot a_{i-1/2}^1)]; S = \text{sgn}(a_{i+1/2}^1) \quad (21)$$

여기서, $\min\text{mod}$ 함수는 그 변수가 모두 같은 부호일 때는 절대값이 작은 것을 취하고 부호가 서로 다를 때에는 0을 취한다. 식(19)에서 식(21)까지의 제한 함수는 그 압축성(compressibility)이 커지는 순서로 나열한 것인데 Yee⁽¹⁴⁾는 서로 다른 특성장에 대한 제한함수의 선택에 있어서 선형장에 대해서는 식(21)과 같이 압축효과가 강한 제한함수를 사용하는 것이 접촉 불연속면을 예리하게 포착하는데 도움이 되며 비선형장에 대해서는 이것이 강한 압축효과로 인하여 해의 경사가 완만한 영역을 가파르게 하여 마치 불연속면처럼 보이게 하는 경향이 있으므로 이 경우에는 식(19)이나 식(20)과 같이 압축효과가 약한 제한함수를 사용하는 것이 유리하다고 밝혔다. η 방향에 대한 수치플럭스 $\tilde{G}_{j+1/2}^*$ 는 앞에서 기술된 방법과 동일하게 정의될 수 있다.

1차원적 해법을 2차원에 적용하기 위하여 Strang⁽¹⁵⁾의 연산자 분할법을 적용하였다. 연산자 L_ϵ 와 L_η 를 순차적으로 적용함으로써 $2\Delta t$ 의 시간 전진을 하는데 1차원 해법이 갖는 본래의 정확도를 유지하기 위하여 그 적용순서를 반전시키면서 적용한다.

$$Q_{i,j}^{n+2} = L_\epsilon(\Delta t) L_\eta(\Delta t) L_\eta(\Delta t) L_\epsilon(\Delta t) Q_{i,j}^n \quad (22)$$

$$L_\epsilon Q_{i,j}^n = Q_{i,j}^{*1} = Q_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} J (\tilde{F}_{i+1/2}^n - \tilde{F}_{i-1/2}^n) \quad (23)$$

$$L_\eta Q_{i,j}^{*1} = Q_{i,j}^{*2} = Q_{i,j}^{*1} - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} J (\tilde{G}_{j+1/2}^{*1} - \tilde{G}_{j-1/2}^{*1}) \quad (24)$$

여기서, $Q_{i,j}^n = Q(n\Delta t, i\Delta \xi, j\Delta \eta)$ 이며 Δt 는 시간간격, $\Delta \xi$ 와 $\Delta \eta$ 는 ξ 와 η 방향의 격자간격, 그리고 $\tilde{F}_{i+1/2}^n$, $\tilde{G}_{j+1/2}^n$ 는 각 방향으로의 수치플럭스를 나타낸다.

3. 해법의 검증

본 수치해법의 검증을 위하여 이 해법을 잘 알려진 1차원 비정상 충격파관(shock tube) 문제해석에 적용해 보았다. 다음과 같은 Euler방정식에 대한 리만문제에 대하여

$$Q(x, 0) = \begin{cases} Q_L, & x \leq 0.5 \\ Q_R, & x > 0.5 \end{cases} \quad (25)$$

초기조건은 아래와 같다.

$$Q_L = \begin{bmatrix} \rho_L \\ \rho_L u_L \\ e_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 25/\gamma \end{bmatrix} \quad Q_R = \begin{bmatrix} \rho_R \\ \rho_R u_R \\ e_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2.5/\gamma \end{bmatrix} \quad (26)$$

계산에는 150개의 등간격 격자와 CFL수 0.99를

사용하였다. 불연속면의 해석능력 향상을 위하여 Yee의 제안에 따라 선형장과 비선형장에 대하여 서로 다른 제한함수를 적용하였는데 비선형장에 대해서는 식(20)을 적용하였고 선형장에 대해서는 식(21)을 적용하였다. 계산에서 구해진 밀도와 압력 그리고 속도분포를 이론해와 비교하여 Fig. 1에 나타내었는데 두 해가 거의 일치함을 알 수 있다. 충격파는 평균적으로 2개의 계산격자에 걸쳐 수치 진동없이 예리하게 포착되었으며 접촉 불연속면도 선명히 잘 포착되었다. 이로부터 본 해법은 충격파와 접촉 불연속면 그리고 팽창파가 존재하는 1차원 비정상 유동장을 높은 정밀도로 잘 해석할 수 있음을 알 수 있었다.

4. 충격파의 초점형성현상 해석

앞에서 검증된 해법을 이용하여 2차원 포물형 반사경에 의한 충격파의 초점형성현상을 수치해석하였다. 계산은 Sturtevant와 Kulkarny⁽¹⁾의 실험에 근거하여 행하였으며 반사경은 폭이 203.2 mm, 기하초점거리 (geometric focal length) $f=60.3$ mm, 그리고 수렴각이 160°인 포물형 실린더이다. 본 계산의 개념도를 Fig. 2에 도시하였는데 물리 영역이 상하 대칭이므로 계산은 상부 반쪽에 대해서만 행하였다. 계산시 선형장과 비선형장에 대하여 앞의 예제에서의와 동일한 제한함수를 각각 적용하였으며 이동충격파의 속도가 $M_s=1.1, 1.2, 1.3$ 인 세 경

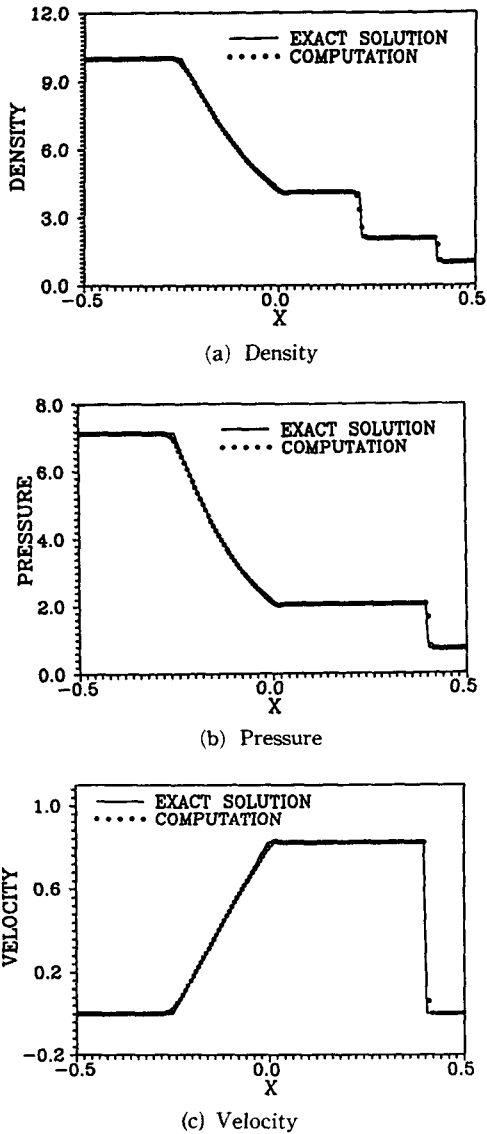


Fig. 1 Comparison of the present computation with exact solution of the shock-tube problem

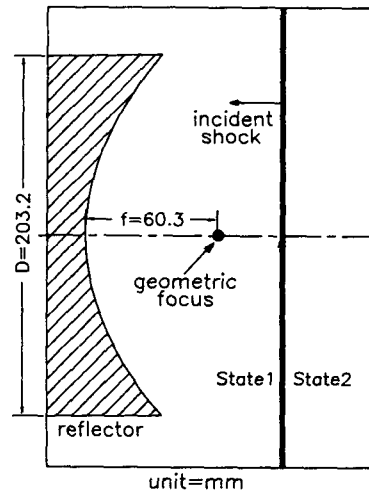


Fig. 2 Schematic drawing of shock-wave focusing by a two-dimensional parabolic reflector

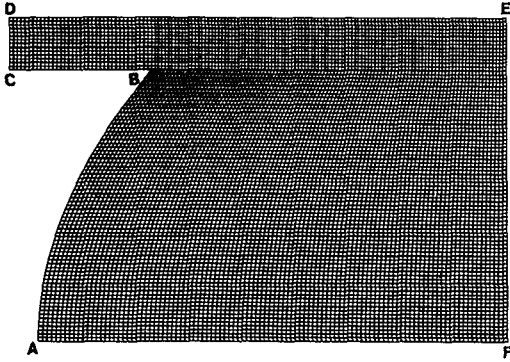


Fig. 3 Computational mesh (Mesh-I)

위에 대하여 계산을 수행하였는데 이들은 각각 입사충격파의 강도가 상대적으로 약한 경우, 중간 경우 및 강한 경우에 해당한다. 모든 계산에서 CFL 수는 0.9로 하였으며 계산격자는 격자를 이루는 각 선분의 평균 길이가 0.75 mm (Mesh-I) 및 0.50 mm (Mesh-II) 인 두 격자계를 사용하였는데 전자는 성긴 격자계에 해당하며 후자는 조밀 격자계에 해당한다. 두 격자계에 있어서 반사경 전방의 상부 반 평면상에 분포된 격자수는 ξ 및 η 방향으로 각각 213×140 과 320×210 이다. 본 연구에서 사용된 격자계(Mesh-I)를 격자선 2개마다 1개씩 그려서 Fig. 3에 나타내었다.

4.1 초기조건 및 경계조건

계산초기에 충격파는 반사경 우측의 임의의 지점에 있으며 정지해 있는 공기 증을 M_s 의 속도로 반사경을 향해서 이동한다. 이동 충격파의 좌측(상태 1)과 우측(상태 2) 상태 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\Gamma_s \cdot (p_2/p_1) - 1}{\Gamma_s + p_2/p_1}$$

$$\frac{u_2}{c_1} = M_s \left[1 - \frac{(\gamma - 1) M_s^2 + 2}{(\gamma + 1) M_s^2} \right]$$

$$\Gamma_s = (\gamma + 1) / (\gamma - 1), \quad c_1 = \sqrt{\gamma p_1 / \rho_1} \quad (27)$$

충격파에 의하여 교란되지 않은 상태(상태 1)에 대한 초기조건은 아래와 같으며

$$\rho_1 = 1, \quad p_1 = 1/\gamma, \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0 \quad (28)$$

이동충격파 뒤의 상태(상태 2)에 대한 초기조건은

식 (27)으로 부터 구해진다. 공기는 이상기체로 가정하여 $\gamma=1.4$ 의 값을 사용하였다.

경계조건은 가상격자를 사용하여 적용하였는데 Fig. 3에 표시된 각 경계중에서 반사경의 표면(A-B)과 반사경의 측면(B-C), 그리고 대칭축(A-F)에 대하여는 반사조건을 적용하며 나머지 경계에 대해서는 유입류 또는 유출류 조건을 적용하였다. 반사조건은 아래와 같이 적용되며

$$p_f = p_r, \quad \rho_f = \rho_r, \quad (q_n)_f = -(q_n)_r, \quad (q_t)_f = (q_t)_r \quad (29)$$

여기서, q_n 과 q_t 는 각각 격자면에 수직한 방향 및 접선방향으로의 속도성분을 나타내고 첨자 r 과 f 는 각각 경계에서의 실제 및 가상격자를 나타낸다.

4.2 계산결과 및 실험과의 비교

입사충격파의 속도가 $M_s=1.1$ 인 약한 충격파의 초점형성에 있어서 시간에 따른 파동의 전개 양상을 등밀도선도와 3차원 밀도분포를 이용하여 Fig. 4에 나타내었다. 여기서 시간은 입사충격파가 반사경의 모서리에 닿는 순간을 0으로 하였다. Fig. 4(a)에서는 입사충격파의 가운데 부분은 반사경을 향해 전파하고 있는데 반해 양끝 부분은 이미 반사되어 반사경의 모서리에서 회절파(diffraction wave)가 생성되고 있음을 알 수 있다. 시간이 더 지나면서 입사 충격파의 전 부분이 반사되어 초점을 향하여 수렴하게 되는데 Fig. 4(b)에서는 서로 다른 세 종류의 파를 볼 수 있다. 중앙에 있는 우측으로 오목한 모양을 한 파는 반사된 충격파이며 이것에 연결되어 좌측으로 오목한 모양을 한 두 파는 수렴하는 충격파로서 반사경의 모서리에서 회절된 파의 압축성분에 해당되는 것이다. 이들 파의 좌측에서 대칭축을 향하여 이동하고 있는 연속적인 파는 회절 팽창파로서 반사경의 모서리에서 회절된 파의 팽창성분에 해당하는 것이다. 그림에서 수렴 충격파의 양끝 부분이 회절 팽창파에 따라잡혀서 약해지고 있음을 알 수 있다. 그 후 Fig. 4(c)에서는 반사경의 두 모서리에서 생성되어 대칭축을 향하여 전파되던 회절 팽창파가 대칭축을 지나 서로 교차하였고 두 수렴 충격파면도 대칭축에서 서로 만나고 있다. 이 순간, 즉, 수렴충격파면과 팽창파면의 교점이 대칭축에서 만날때 초점을 형성하면서 초점형성 전 과정 중 최고의 압력을 이루는데 이 지점은 기하초점(geometric focus)이 아니라 이 보

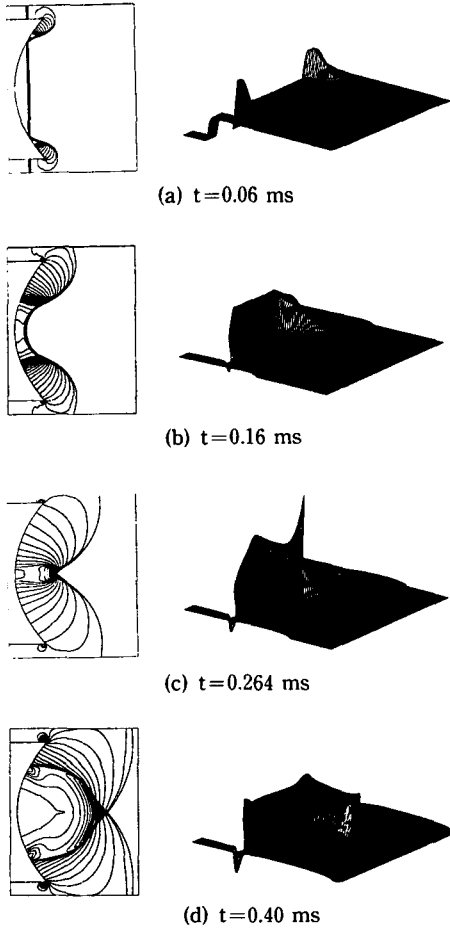


Fig. 4 Computed density contours and 3-dimensional displays of density distributions for shock-wave focusing, $M_s=1.1$, Mesh-I

다 반사경에 더 가까운 지점으로서 공기역학 초점 (gasdynamic focus)이라고도 불리며 이와 같이 초점이 기하초점이 아닌 다른 지점에 형성되는 것은 이 현상에 내포된 매우 중요한 공기역학적 비선형성을 나타내 준다. 또한 비균일 강도를 갖는 수렴 충격파면 뒤쪽의 회절파장이 비선형적으로 가파르게 되어 초점의 좌측에 회절 충격파(diffraction shock)가 형성되고 있다. Fig. 4(d)에서는 거의 원형에 가까운 회절 충격파가 바깥쪽을 향하여 전파되면서 초점으로부터 나오는 충격파 및 수렴 충격파와 함께 3중점(three-shock intersection)을 형성하고 있다.

다음으로 Fig. 5에는 입사충격파의 강도가 $M_s=1.3$ 인 강한 충격파의 초점형성과정을 나타내었다.

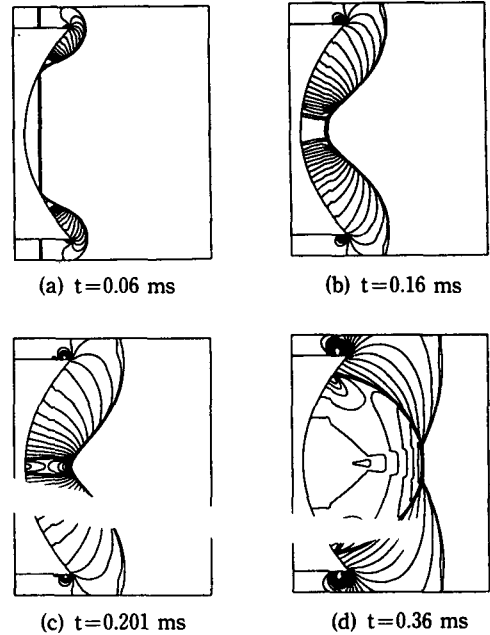


Fig. 5 Computed density contours for shock-wave focusing, $M_s=1.3$, Mesh-I

충격파가 수렴하여 초점을 형성하기 이전의 파형 (Fig. 5(a), 5(b))은 약한 충격파의 경우와 거의 유사하지만 초점을 형성한 이후의 파형 (Fig. 5(d))은 완전히 다른 형태를 보이고 있다. 이 경우에도 Fig. 5(c)에서 보는 바와 같이 수렴 충격파면과 회절 팽창파면의 교점은 수렴 충격파가 기하 초점에 도달하기 이전에 대칭축에서 서로 교차하고 있으나 이 경우에는 이것이 약한 충격파의 경우에서보다 더 일찍 그리고 반사경에 더 가까운 지점에서 일어나고 있다. Fig. 5(d)에는 수렴 충격파의 마하 반사에 의하여 형성된 거의 평면에 가까운 마하 스템 (Mach stem)을 볼 수 있다.

계산결과를 실험⁽¹⁾과 비교하기 위하여 계산된 등밀도선도와 실험에 의한 실루엣사진 (shadowgraph)을 Fig. 6와 Fig. 7에 나타내었다. 그림을 통해서 보면 본 계산이 실험에서 관찰된 시간의 경과에 따른 파동의 전개 양상을 각 시점에서 정확하게 해석하고 있음을 알 수 있다. Fig. 6(c)와 (d)의 실루엣 사진상에서 초점영역에 가로로 길게 늘어져 나타난 검은 원은 주위에 비하여 높은 온도를 갖는 고온 반점 (hot spot)을 나타내는데 등밀도선도 상에도 이것이 나타나고 있음을 알 수 있으며 여기에서 뻗어나와 3중점에 연결되는 가는 선은 미

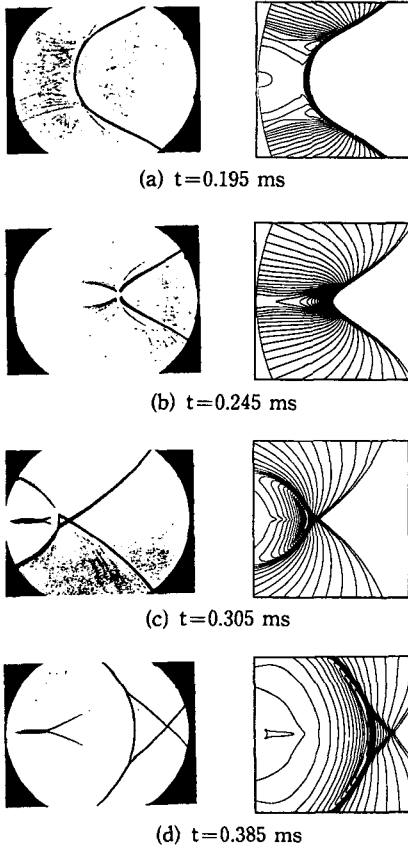


Fig. 6 Computed of computed density contours with experimental shadowgraphs (Ref. 1), $M_s=1.1$, Mesh-I

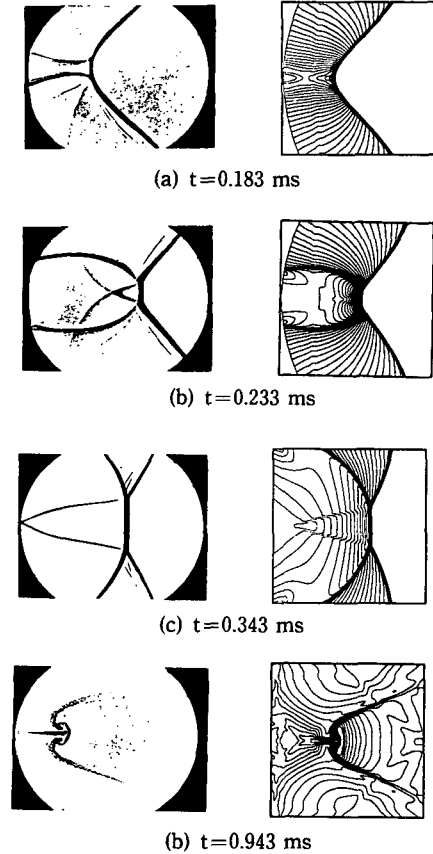


Fig. 7 Computed of computed density contours with experimental shadowgraphs (Ref. 1), $M_s=1.3$, Mesh-I

끄림 유선으로서 그 불연속 정도가 아주 미약하여 등밀도선도 상에는 잘 나타나지 않고 있다. 그러나 Fig. 7(b)와 (c)에서는 수렴충격파가 회절 충격파 및 마하 스텝과 만나는 3중점에서 나오는 미끄럼 유선이 미약하기는 하나 등밀도선도 상에서 격인 선으로 나타나고 있으며 Fig. 7(d)에는 오랜 시간이 경과한 후 3중점에서 나온 미끄럼유선이 불안정해지면서 말려 올라가 와류를 형성하고 있다. 본 계산에서 Fig. 7(d)는 다른 경우와는 달리 비선형장에 대해서도 선형장과 동일하게 식(21)의 제한함수를 적용하였는데 이것은 가능한 한 수치 확산을 줄여 흐뜨러지지 않은 파형을 얻기 위해서이다.

앞의 두 결과에서 보았듯이 충격파가 초점을 형성하는 과정에서 입사충격파의 강도에 따라 초점형성 이후의 파형이 완전히 다르게 나타나고 있는데 이것은 초점형성 과정에서 초점부근에서 일어나는

각 파동들의 강한 비선형적 간섭 때문이다. 3중점의 궤적은 초점이 형성된 이후의 파동의 반사 형태를 지배하는데 Fig. 8에 나타낸 바와 같이 약한 충격파의 경우에는 3중점의 궤적이 대칭축을 한번 교차한 후 방향을 바꾸어 다시 교차하는데 반해 강한 충격파의 경우에는 이와 달리 처음 교차한 후 방향을 바꾸지 않고 계속 뻗어나감을 알 수 있다. 그 결과 약한 충격파의 경우에는 반사경의 두 모서리에서 시작되어 초점영역에서 서로 교차하는 두 3중점의 궤적에 의하여 둘러싸인 유한한 초점영역을 이루면서 서로 교차되고 삼각고리를 갖는 파면을 형성하는 반면 강한 충격파의 경우에는 초점영역의 우측이 열려진 형태로 되어 그 영역이 준 무한대가 되면서 교차되지 않은 파면을 가지게 된다. 그림에서 보는 바와 같이 계산에서 얻어진 3중점의 궤적을 실험⁽¹⁾과 서로 잘 일치하였다.

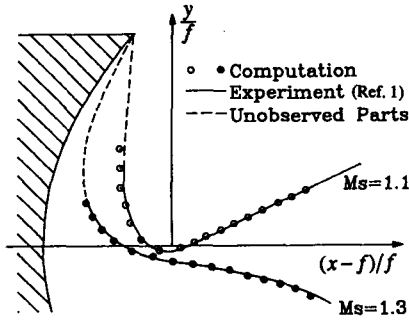


Fig. 8 Comparison of predicted trajectories of three-wave intersections with experimental result

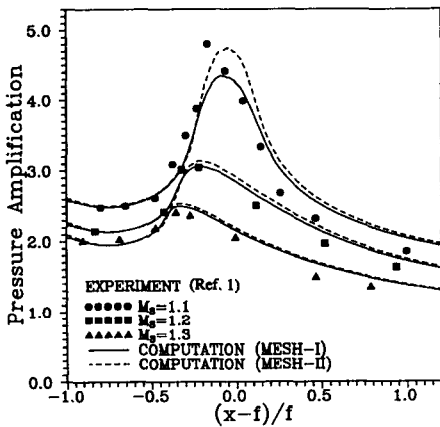


Fig. 9 Comparison of the distribution of maximum on-axis pressure amplification obtained throughout the focusing process with the experimental result

충격파가 초점을 형성하는 전 과정을 통하여 반사경 축상의 각 지점에서 얻어진 최대 압력증폭치를 실험값과 비교하여 Fig. 9에 나타내었다. 여기서 압력증폭은 반사경 축상의 각 지점에서 초점이 형성되는 과정중에 나타난 최대 압력과 초기 압력과의 차이를 반사된 충격파가 반사경을 떠나는 순간의 압력증분으로 나눈 값이며 반사경으로부터의 거리를 나타내는 x 축은 기하 초점거리로 무차원하였다. 계산된 최대 압력증폭치의 분포는 실험과 대부분 잘 일치하며 약한 충격파의 경우를 제외하고는 계산에 사용된 두 격자계가 거의 동일한 결과를 보여주고 있다. 약한 충격파의 경우 성긴격자계 (Mesh-I)는 초점에서의 압력 증폭치를 실험치에 비하여 상당히 낮게 예측하고 있으나 조밀격자계

(Mesh-II)는 이보다 실험치에 더 가까운 값을 예측하고 있다. 따라서 좀 더 조밀한 격자계를 사용한다면 실험치에 더욱 근접한 결과를 얻으리라는 예측을 가능케 한다. 참고문헌⁽⁷⁾에서는 본 연구에서 사용된 성긴격자계 (Mesh-I)와 동일한 크기의 격자를 사용하여 $M_s=1.1$ 인 경우 초점영역에서 p_{max}/p_1 의 값으로 2.629를 얻었으며 본 연구에서는 2.513의 값을 얻었는데 본 계산결과가 참고문헌⁽⁷⁾의 결과보다 그 작은 값을 예측한 이유는 본 해법이 참고문헌⁽⁷⁾에서 사용된 해법보다 수치소산이 크기 때문이다. 압력증폭의 최대점의 위치는 충격파의 강도가 $M_s=1.2$ 와 1.3인 경우는 실험과 거의 일치하였으나 $M_s=1.1$ 의 경우에는 다소 차이를 보였는데 이러한 경향은 참고문헌⁽⁷⁾의 결과에서도 마찬가지로 나타나고 있다. 또한 그 위치가 기하 초점에서 나타나지 않고 이보다 반사경에 더 가까운 지점에서 나타나며 압력증폭치도 선형이론인 음향이론으로부터 예측되는 무한대의 값이 아닌 유한한 값을 가짐을 알 수 있는데 이것은 유한한 강도의 파가 갖는 공기 역학적 비선형성 때문이다. 그리고 충격파의 강도가 커짐에 따라 초점영역에서의 압력증폭치는 감소하고 최대 압력의 위치는 기하초점에서 반사경 쪽으로 더 멀어지고 있음을 알 수 있는데 이것은 충격파의 강도가 증가할수록 비선형성이 증가함을 뜻한다. 이러한 현상은 충격파의 강도가 세질수록 반사경 모서리에서 회절된 팽창파가 수렴 충격파를 더 일찍 따라잡아 그 강도를 한층 더 감소시키기 때문이다. 따라서 음파와 같이 그 강도가 아주 미약한 경우에 대해서만 기하초점에서 높은 압력증폭이 이루어진다.

유동장내의 각 지점에서의 시간에 따른 압력변화는 3중점의 체적과 밀접한 관계를 가지는데 $M_s=1.1$ 인 경우에 대하여 그 압력변화의 특성을 잘 나타내 주는 6지점에서의 시간-압력곡선을 Fig. 10에 나타내었다. 이 그래프상에는 충격파의 초점형성 전 과정을 통하여 각 지점을 통과하는 모든 파동이 잘 나타나 있는데 여기서 압력의 순간적인 증가는 충격파의 통과를 의미하며 시간-압력곡선의 기울기의 불연속은 회절 팽창파면의 통과를 의미한다. Fig. 10(a)와 (b)에 나타난 첫번째와 두번째 압력 점프는 각각 입사충격파와 반사충격파의 통과를 나타낸다. 시간-압력곡선에서 알 수 있는 바와 같이 수렴하는 충격파 뒤 부분의 압력은 초점영역을 제외하고는 시간에 따라 서서히 증가하다가 마지막

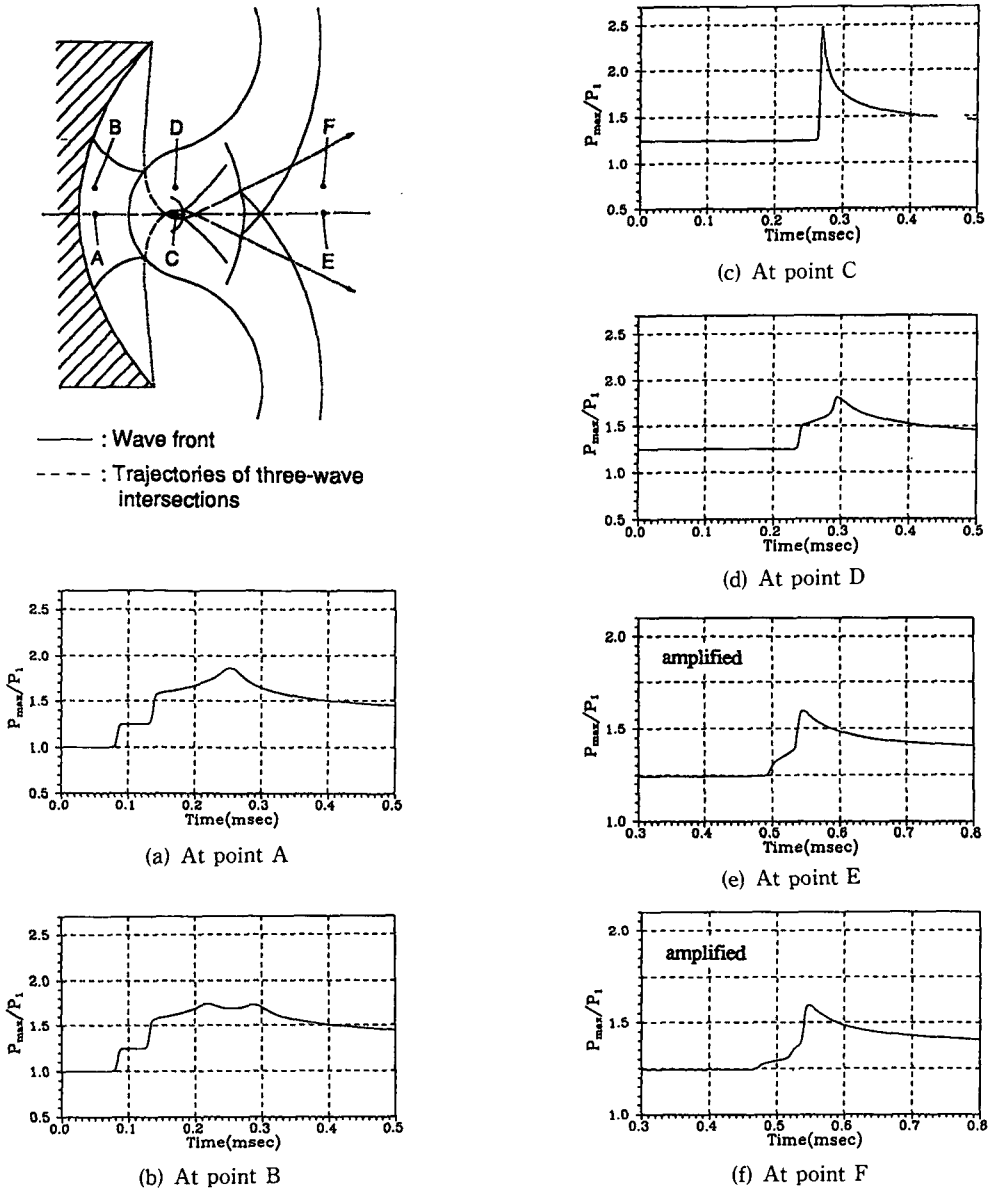


Fig. 10 Pressure histories at six locations in the flowfield, $M_s=1.1$

파면이 통과한 후에는 단조적으로 감소한다. 초점 영역에서의 압력은 Fig. 10(c)에서와 같이 강한 마하시스템에 의하여 순간적으로 증가한 후 이를 뒤따르는 팽창파에 의하여 급격히 감소하고 있다. 초점 영역에서 위쪽으로 조금 벗어난 지점인 Fig. 10(d)에서는 두번의 압력증가가 나타나 있는데 첫번째 것은 수렴충격파에 의한 것이며 두번째 것은 회절충격파에 의한 것이다.

4.3 수치해의 격자크기 의존성

계산격자의 크기가 수치해가 미치는 영향을 알아보기 위하여 격자를 구성하는 각 선분의 평균 길이를 2.0 mm로부터 0.50 mm까지 변화시켜 가면서 계산해 보았다. 격자크기 변화에 따른 초점영역에서의 최대 압력의 변화를 Fig. 11에 나타내었는데 최대 압력은 격자크기가 줄어들며 따라 증가하면서 일정한 값에 수렴하며 수치해의 격자크기에 대한

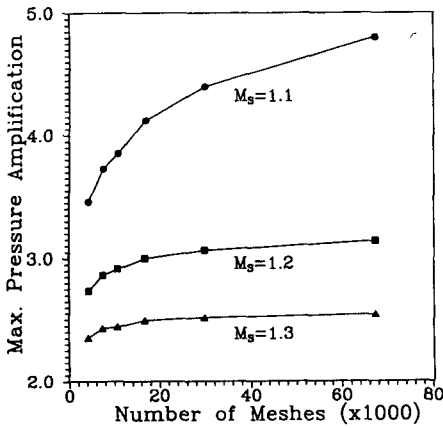


Fig. 11 Effect of mesh size variation on the computed maximum pressure amplification at the focus

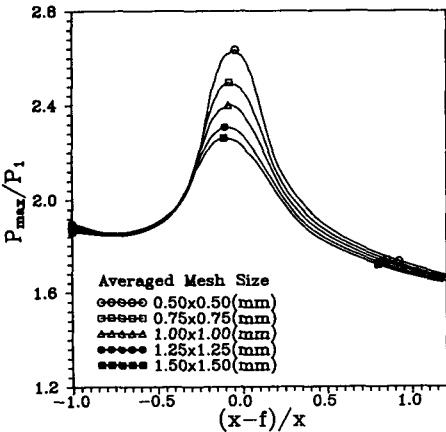


Fig. 12 Mesh size dependence of the computed maximum on-axis pressure distribution, $M_s=1.1$

의존도는 충격파의 강도가 약할수록 커짐을 알 수 있었다. 이러한 격자크기의 변화는 Fig. 12에 나타난 바와 같이 초점영역의 수치해에는 상당한 영향을 미치지만 그 밖의 영역에는 별 영향을 주지 않음을 알 수 있다.

5. 결 론

유한체적법으로 확장된 Yee-Harten의 풍상 TVD 해법을 이용하여 일차원 충격파관 문제 및 공기중에서의 충격파의 초점형성현상을 해석해 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 본 연구에서 사용된 풍상 TVD 해법은 충격파와 접촉 불연속면 그리고 팽창파가 존재하는 일

차원 비정상유동을 불연속면 주위에서 수치 진동 없이 정확히 해석할 수 있었으며 충격파의 초점형성현상과 같은 다차원에서의 충격파의 반사 및 충격파 상호간의 간섭 등 복잡한 현상을 수반하는 유동을 해석하는데 있어서도 매우 효율적이었다.

(2) 충격파의 초점형성 전 과정에 있어서 수치해석 결과는 이 과정에서 일어나는 모든 파동을 잘 포착하였으며 계산에서 얻어진 3중점의 궤적과 반사경 축상에서의 최대 압력 증폭 분포는 실험과 잘 일치하였다.

(3) 약한 충격파의 경우는 강한 충격파에 비해 초점영역에서의 최대 압력치가 격자크기에 심한 영향을 받았는데 이것으로부터 초점영역에서의 현상을 정확히 예측하기 위해서는 충격파의 강도가 약할수록 더 조밀한 격자계를 사용해야 함을 알 수 있었다.

(4) 유한한 강도를 갖는 충격파의 초점형성과정에서 초점형성 이후의 파형이나 초점영역에서의 최대 압력증폭은 충격파의 반사과정에서 일어나는 각 파동들 상호간의 강한 비선형적 간섭에 의하여 결정됨을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 지원 첨단유체공학 연구센터의 연구비 일부 지원에 의하여 수행된 것으로 관계자 제위께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Sturtevant, B. and Kulkarny, V. A., 1976, "The Focusing of Weak Shock Waves Waves," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 73, pp. 651~671.
- (2) Holl, R. and Grönig, H., 1983, "Focusing of Weak Blast Waves," *Proceedings of the 14th International Symposium on Shock Waves and Shock Tubes*, New South Wales University Press, pp. 563~570.
- (3) Sommerfeld, M. and Müller, H. M., 1988, "Experimental and Numerical Studies of Shock Wave Focusing in Water," *Experiments in Fluids*, Vol. 6, pp. 209~216.
- (4) Müller, H. M. and Grönig, H., 1986, "Experi-

- mental Investigations on Shock Wave Focusing in Water," *Proceedings of the 12th International Congress on Acoustics*, Vol. III, H3-3, Toronto.
- (5) Olivier, H. and Grönig, H., 1986, "The Random Choice Method Applied to Two-Dimensional Shock Focusing and Diffraction," *Journal of Computational Physics*, Vol. 63, pp. 85~106.
- (6) Glimm, J., 1965, "Solutions in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations," *Communications on Pure & Applied Mathematics*, Vol. 18, pp. 697~715.
- (7) Sommerfeld, M., 1989, "Numerical Prediction of Shock Wave Focusing Phenomena in Air with Experimental Verification," *Proceedings of the Second International Conference on Nonlinear Hyperbolic Problems, Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol. 24, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, pp. 562~573.
- (8) Colella, P. and Glaz, H. M., 1985, "Efficient Solution Algorithms for the Riemann Problem for Real Gases," *Journal of Computational Physics*, Vol. 59, pp. 264~289.
- (9) Harten, A., 1983, "A High Resolution Scheme for the Computation of Weak Solutions of Hyperbolic Conservation Laws," *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, pp. 359~393.
- (10) Yee, H. C., 1986, "Linearized Form of Implicit TVD Schemes for the Multidimensional Euler and Navier-Stokes Equations," *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 12A, Nos. 4/5, pp. 413~432.
- (11) Yee, H. C., Warming, R. F. and Harten, A., 1985, "Application of TVD Schemes for the Euler Equations of Gas Dynamics," *Proceedings of the AMS-SIAM Summer Seminar on Large Scale Computations in Fluid Mechanics, Lectures in Applied Mathematics*, Vol. 22, Part 2, pp. 357~377.
- (12) Yee, H. C. and Harten, A., 1987 "Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 2, pp. 266~274.
- (13) Roe, P. L., 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357~372.
- (14) Yee, H. C., 1987, "Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD schemes and Their Applications," *Journal of Computational Physics*, Vol. 68, pp. 151~179.
- (15) Strang, G., 1986, "On the Construction and Comparison of Difference Schemes," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 5, No. 3, pp. 506-517.