

〈論 文〉

# 동력전달용 베벨기어의 강도평가 및 설계시스템 개발 (1) — AGMA규격 강도기준설계법 —

정태형\* · 변준형\*\* · 김태형\*\*\*

(1993년 11월 23일 접수)

## Development of Strength Estimation and Design Systems of Power Transmission Bevel Gears ( I )

— A Design Method Based on Strength and Durability in AGMA Standards —

Tae Hyong Chong, Joon Hyong Byun and Tae Hyong Kim

**Key Words:** Gear(기어), Bevel Gears(베벨기어), Design Method(설계법), Optimal Design(최적설계), Volume Minimization(체적최소화), Strength & Durability(강도), AGMA Standard(AGMA규격), Geometry(형상), Operating Characteristics(운전특성), Computer-Aided Design(컴퓨터 원용설계)

### Abstract

A design system for power transmission bevel gears(straight, zerol, and spiral) is developed, in which the strength and durability of bevel gears can be estimated and the size of bevel gears can be minimized by introducing optimal techniques. The size of bevel gear pair as the object function to be minimized is the volume of equivalent spur gear pair at mean normal section, and the design variables to be determined are considered as the number of teeth, face width, diametral pitch, and spiral angle in spiral bevel gear. The strength(bending strength, pitting resistance) according to the AGMA standards, geometrical quantities, and operating characteristics(interference of pinion, contact ratio, etc.) are considered as the constraints in design optimization. The optimization with these constraints becomes nonlinear problem and that is solved with ALM(Augmented Lagrange Multiplier) method. The developed design method is applied to the example designs of straight, zerol, and spiral bevel gears. The design results are acceptable from the viewpoint of strength and durability within the design ranges of all other constraints, and the bevel gears are designed toward minimizing the size of gear pair. This design method is easily applicable to the design of bevel gears used as power transmitting devices in machineries, and is expected to be used for weight minimization of bevel gear unit.

\*정회원, 한양대학교 기계공학과

\*\*정회원, 한양대학교 산업과학연구소

\*\*\*정회원, 현대자동차 마북리연구소

### 1. 서 론

차 및 차차장치는 건설기계, 자동차, 산업기계,

선박, 철도차량, 공작기계 등 거의 모든 산업부문에서 주로 구동 및 동력전달을 위해 사용되고 있으며, 전달동력과 부하능력이 커야하는 요구가 증대하는 반면, 부하한계에 가까운 높은 하중에서도 가능한 한 소형화하여 기계장비의 경량화를 달성하고자 하는 요구가 매우 강하다. 이러한 요구에 부응하기 위해 우수한 성능의 치차장치 설계방법 및 컴퓨터를 이용한 설계기술이 등장<sup>(1~4)</sup>하고 있으나 이러한 연구는 원통치차(cylindrical gears: spur & helical)장치의 설계에 관한 연구가 대부분이며, 교차축간의 동력을 전달하기 위한 베벨기어(bevel gears)장치에 대해서는 연구가 거의 없는 실정이다.

본 연구에서는 동력전달용 베벨기어(스트레이트(straight), 제롤(zerol) 및 스파이럴(spiral)베벨기어)를 대상으로 강도를 평가할 수 있고, 형상, 강도적 신뢰성, 물림률이나 간섭과 같은 운전특성 등의 설계 영향인자들을 충분히 고려하면서 최적화 기법을 이용하여 베벨기어의 크기를 최소화할 수 있는 설계법을 개발하며, 이러한 설계법을 기초로 퍼스널컴퓨터 상에서 손쉽게 설계에 이용할 수 있는 베벨기어의 설계시스템을 개발한다. 본 논문은 연구의 첫단계로서 베벨기어의 굽힘강도와 면압강도를 평가하기 위한 방식으로 AGMA규격<sup>(5,6)</sup>을 이용하고 평가된 강도를 설계의 영향인자로 고려하여 설계를 수행한다.

## 2. 베벨기어의 강도

베벨기어의 강도는 이(tooth)의 굽힘강도, 치면의 면압강도, 스코어링강도, 마모에 대한 강도 등을 들 수 있는데, 이들 강도는 각종 저서<sup>(7~9)</sup>나 규격<sup>(5,6)</sup> 또는 전문회사의 경험에 의한 자료<sup>(10,11)</sup> 등에서 평가방법을 제안하고 있다. 본 연구에서는 비교적 강도평가방법이 잘 정비되어 있는 AGMA규격의 강도평가방법<sup>(5,6)</sup>을 사용하여 베벨기어의 강도 중 굽힘강도 및 면압강도를 평가한다.

### 2.1 굽힘강도

베벨기어의 설계수명동안에 이뿌리필렛(tooth root fillet)에서 굽힘응력에 의한 절손(breakage)이 발생하지 않을 하중을 평가하기 위한 AGMA규격의 굽힘강도평가식은,<sup>(5)</sup> 이뿌리에서 작용하중의 접선 성분에 의한 굽힘응력뿐 아니라 반경성분에 의한

압축응력, 이뿌리필렛에서의 응력집중, 물리고 있는 근접치사이의 하중분담, 물림률에 의한 운전정속성 및 스파이럴 베벨기어의 경우 이에 경사진 접촉선으로부터 결과되는 하중의 비균일 모멘트 분포 등을 고려하며, 피니언과 기어에서 발생하는 굽힘응력(calculated bending stress;  $S_t$ )은 각각 식(1) 및 식(2)로 계산된다.

$$S_{tP} = \frac{2T_p K_a P_d K_s K_m}{K_v F d K_x J_P} \quad \text{for pinion (lb/in}^2\text{)} \quad (1)$$

$$S_{tG} = \frac{2T_g K_a P_d K_s K_m}{K_v F D K_x J_G} \quad \text{for gear (lb/in}^2\text{)} \quad (2)$$

여기에서,  $P_d$ 는 지름피치,  $F$ 는 치폭,  $d$  및  $D$ 는 각각 피니언과 기어의 피치원지름,  $T_p$ ,  $T_g$ 는 각각 피니언과 기어의 작용토크,  $K_a$ 는 외부 동하중계수,  $K_v$ 는 치차의 정밀도를 고려한 내부동하중계수,  $K_s$ 는 크기에 따른 재료의 비균질성을 고려한 치수효과계수,  $K_m$ 은 잇줄방향으로 하중의 비균일 분포를 고려한 하중분포계수,  $K_x$ 는 잇줄방향 곡률계수,  $J_P$  및  $J_G$ 는 각각 피니언과 기어에서 굽힘강도의 형상계수를 나타낸다.

베벨기어가 굽힘에 견딜 수 있는 사용굽힘응력(working bending stress;  $S_{wt}$ )은 식(3)으로 계산되며, 식에서  $S_{at}$ 는 시험치차에 의해 평가된 재료의 허용굽힘응력(allowable bending stress)을 나타내고,  $K_L$ ,  $K_T$ ,  $K_R$ 은 각각 굽힘에 대한 수명계수, 온도계수, 신뢰도계수를 나타낸다. 따라서 식(1) 및 식(2)의 굽힘응력이 식(3)의 사용응력보다 같거나 작으면 굽힘강도면에서 안전한 것으로 평가한다.

$$S_{wt} = S_{at} \frac{K_L}{K_T K_R} \quad (\text{lb/in}^2) \quad (3)$$

### 2.2 면압강도

설계 수명동안 치면에 피팅손상(destructive pitting)이 발생하지 않을 하중을 평가하기 위한 AGMA규격의 면압강도평가식<sup>(5)</sup>은 Hertz의 접촉응력식에 기초를 두고, 제작의 불완전성에 의해 발생하는 집중하중, 물리고 있는 근접치사이의 하중분담효과 등을 고려하며, 접촉면의 접촉응력(calculated contact stress;  $S_c$ )은 식(4)와 같이 계산한다.

$$S_c = C_p C_v \sqrt{\frac{2T_p C_a}{C_v} \left(\frac{T_p}{T_d}\right)^2 \frac{1}{F d^2} \frac{C_s C_m C_x C_f}{I}} \quad (\text{lb/in}^2) \quad (4)$$

여기에서,  $C_p$ 는 재료의 탄성정수계수,  $C_b$ 는 응력 조정상수,  $T_D$ 는 최적의 접촉패턴을 얻기 위한 피니언토크의 최소치인 설계 피니언토크,  $z$ 는 이의 크라우닝에 따라 좌우되는 하중지수,  $C_{xx}$ 는 크라우닝계수,  $C_f$ 는 치면다듬질, 잔류응력, 소성효과 등에 좌우되는 치면상태계수,  $I$ 는 면압강도의 형상계수를 나타내며,  $C_a$ ,  $C_i$ ,  $C_v$ ,  $C_m$ 은 각각 면압강도의 외부 동하중계수, 내부 동하중계수, 치수 효과계수, 하중분포계수를 나타낸다.

베벨기어가 피팅에 견딜수 있는 사용접촉응력 (working contact stress :  $S_{wc}$ )은 식(5)로 계산되며,  $S_{ac}$ 는 시험치차에 의해 평가된 재료의 허용접촉응력 (allowable contact stress)을 나타내고,  $C_L$ ,  $C_T$ ,  $C_R$ ,  $C_H$ 는 각각 면압에 대한 수명계수, 온도계수, 신뢰도계수, 경도비계수를 나타낸다. 따라서 식(4)의 접촉응력이 식(5)의 사용응력보다 같거나 작으면 면압강도면에서 안전한 것으로 평가한다.

$$S_{wc} = S_{ac} \frac{C_L C_H}{C_T C_R} \quad (\text{lb/in}^2) \quad (5)$$

### 3. 베벨기어의 최적설계

동력전달용 베벨기어를 설계할 때 이상과 같이 강도를 고려하고 최적화기법을 도입하여 체적을 최소로 하기 위한 최적설계법을 개발한다.

#### 3.1 목적함수 및 설계변수

베벨기어의 체적을 최소화하기 위한 최적화의 목적함수는, 스파이럴 베벨기어의 경우 치차의 이물림에 있어서 중요한 인자로 작용하게 되는 스파이럴각( $\Psi$ )을 목적함수에 포함시키기 위하여, 피치원뿔 체적에 크기가 비례하는 체적으로서 Fig. 1과 같이 피치원뿔의 배원추(back cone)에서 피니언과 기어의 이중간부에서 평균치 직각 피치반경(mean normal pitch radius :  $r_n, R_n$ )을 반경으로 하는 상당평치차의 피치원뿔 체적을 목적함수( $Q$ )로 한다.

$$Q = \pi (r_n^2 + R_n^2) F \quad (\text{in}^3) \quad (6)$$

여기에서,  $r_n = r / \cos^2 \Psi$ ,  $R_n = R / \cos^2 \Psi$ 를 나타내며  $r$  및  $R$ 은 피니언과 기어의 평균 축직각(transverse) 피치반경을 나타낸다.

최적설계의 설계변수는 베벨기어의 크기를 나타내는 제한으로서, 스트레이트 및 제롤 베벨기어의 경우에는 치폭( $F$ ), 피니언의 잇수( $n$ ) 및 지름피

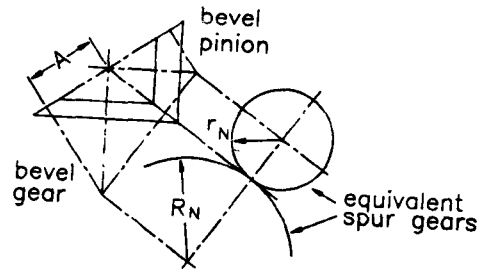


Fig. 1 Equivalent spur gears of bevel gears

치( $P_d$ )를 고려하며, 스파이럴 베벨기어의 경우에는 스파이럴각( $\Psi$ )을 추가하여 고려한다.

#### 3.2 설계영향인자

체적을 최소화할 때 베벨기어가 강도면에서 안전한하게 작동하기 위하여 굽힘강도 및 면압강도의 구속조건을 각각 식(7) 및 식(8)로 둔다.

$$S_t \leq S_{wt} \quad \text{굽힘강도} \quad (7)$$

$$S_c \leq S_{wc} \quad \text{면압강도} \quad (8)$$

기어의 이끝간섭으로 인하여 피니언의 이뿌리에 발생하는 언더컷(undercut)은 이의 강도를 상당히 저하시킬 수 있다. 베벨기어에서 언더컷을 일으키는 피니언의 간섭은 피니언의 내단(inner end)에서 디텐덤( $b_{ip}$ )이 내단 한계디텐덤(limit inner dedendum,  $b_{iip}$ )보다 클 때 발생하는 것으로 판정하며, 이들은 각각 식(9)~식(11)로 계산된다.

$$b_{ip} < b_{iip} \quad \text{피니언의 간섭 (in)} \quad (9)$$

$$b_{iip} = A_{ic} \tan \gamma \sin^2 \phi_{ii} \quad (10)$$

$$b_{ip} = b_p - 0.5F \tan \delta_p \quad (11)$$

여기에서,  $A_{ic}$ 는 기어의 내단원추거리(inner cone distance),  $\phi_{ii}$ 는 내단에서 축직각 압력각,  $\gamma$ ,  $b_p$ ,  $\delta_p$ 는 각각 피니언의 피치각, 평균디텐덤, 디텐덤각을 나타낸다.

또한, 베벨기어의 물림률은 치차의 물림성능, 운전시의 정속성, 하중분담효과 등에 많은 영향을 미친다. 스트레이트 및 제롤 베벨기어의 경우 축직각 물림률( $m_p$ ; transverse contact ratio)을 식(12)와 같이 고려하며 1.0보다 커야 하고, 스파이럴 베벨기어의 경우에는 축직각 물림률 외에 스파이럴각으로 인한 식(13)의 치폭물림률( $m_F$ ; face contact ratio)을 고려한다. 식(14)는 스파이럴 베벨기어에서 축직각물림률과 치폭물림률을 평균한 수정물림

를 ( $m_o$  : modified contact ratio)로서 2.0보다 커야 한다.

$$m_p = \frac{\cos\phi(\cos^2\psi + \tan^2\phi)}{p_n} \{ \sqrt{r_{oN}^2 - r_{bN}^2} - r_N \sin\phi + \sqrt{R_{oN}^2 - R_{bN}^2} - R_N \sin\phi \} \quad (12)$$

$$m_F = \frac{A_o}{A} \frac{F \tan\psi}{p} \quad (13)$$

$$m_o = \sqrt{m_p^2 + m_F^2} \quad (14)$$

$$m_p \geq 1.0 \text{ 축직각 물림률} \quad (15)$$

$$m_o \geq 2.0 \text{ 수정 물림률} \quad (16)$$

여기에서,  $\phi$ 는 압력각,  $p_n$ 은 평균치직각 원주피치,  $p$ 는 외단(outer end) 원주피치,  $A_o$ 는 외단원추거리,  $A$ 는 평균 원추거리,  $r_{bN}$ ( $R_{bN}$ ),  $r_{oN}$ ( $R_{oN}$ )은 각각 피니언(기어)의 이중간부치직각 단면에서의 기초원, 이괄원의 반경을 나타낸다.

베벨기어의 운전시 원활한 유막형성을 위해 외단에서 최대 피치원주속도 ( $v_{tmax}$ )를 제한하여 스트레이트 베벨기어의 경우에는 1000(ft/min), 스파이럴 및 제롤 베벨기어의 경우에는 8000(ft/min)로 제한한다.<sup>(6)</sup>

$$v_t \leq v_{tmax} \text{ 피치원주속도 (ft/min)} \quad (17)$$

베벨기어의 형상제원 중 양의 실수인 설계변수의 설계범위를 식(18)~식(21)로 제한한다. 치폭은 최대치를 제한하여 최대치폭( $F_{max}$ )을 스트레이트 및 스파이럴 베벨기어의 경우에는 외단 원추거리의 0.3배, 제롤 베벨기어의 경우에는 0.25배로 제한한다.<sup>(6),(8)</sup>  $n_{min}$ 은 피니언의 최소잇수로서 스트레이트 베벨기어는 12개, 스파이럴 베벨기어는 12개(특수한 경우 5개), 제롤 베벨기어는 13개로 제한한다.<sup>(6)</sup> 지름피치는 동력전달용 베벨기어로 사용되는 실제 크기로서 1.0~25.0(in<sup>-1</sup>)의 범위로 제한하며,<sup>(8)</sup> 스파이럴 각은 최대치를 45°로 제한한다.

$$F \leq F_{max} \text{ 치폭 (in)} \quad (18)$$

$$n \geq n_{min} \text{ 피니언의 최소잇수} \quad (19)$$

$$1.0 \leq P_d \leq 25.0 \text{ 지름피치 (in}^{-1}\text{)} \quad (20)$$

$$\psi \leq 45^\circ \text{ 스파이럴각} \quad (21)$$

또한 설계되는 베벨기어의 크기로서 피니언의 최대 피치직경을 12(in)로 제한하고, 치폭방향의 원활한 이물림을 위해 치폭을 상당평치차 피치지름의 0.1배(중횡비)보다 크도록 제한한다. 기어의 크기를 제한하기 위해 스트레이트 및 제롤베벨기어의 경우에는 최대잇수  $N_{max}$ 를 230개, 스파이럴 베벨기어

의 경우에는 190개로 제한한다.<sup>(6)</sup>

$$d \leq 12.0 \text{ 피니언의 최대 피치직경 (in)} \quad (22)$$

$$\frac{F}{2r_N} \geq 0.1 \text{ 중횡비} \quad (23)$$

$$N \leq N_{max} \text{ 기어잇수} \quad (24)$$

식(7)~식(9)와 식(15)~식(24)의 구속조건 중 식(16) 및 식(21)은 스파이럴 베벨기어에만 적용되며, 그외의 구속조건들은 세가지 베벨기어에 공통으로 적용된다.

### 3.3 최적설계를 위한 기본식의 구성

최적화의 수치계산을 위해 목적함수인 식(6)을 식(25)와같이 설계변수의 향으로 나타내며,  $\Gamma$ 는 기어의 피치각이다. 또한 식(7)~식(9) 및 식(15)~식(24)의 구속조건들을 무차원화하여 다음과 같이  $G_i$ 로 나타낸다.

Minimize :

$$Q = \pi F \left( \frac{A}{2P_d A_o \cos^2\psi} \right)^2 \left( \frac{n^2}{\cos^2\gamma} + \frac{N^2}{\cos^2\Gamma} \right) \quad (25)$$

Subject to  $G_i \leq 0.0$  ( $i=1, 2, \dots, 14$ )

$$G_1 = \frac{S_t K_T K_R}{S_{at} K_L} - 1.0$$

$$G_2 = \frac{S_c C_T C_R}{S_{ac} C_L C_H} - 1.0$$

$$G_3 = \frac{b_{ip}}{b_{i\psi}} - 1.0$$

$$G_4 = \frac{1.0}{m_p} - 1.0$$

$$G_5 = \frac{2.0}{m_o} - 1.0$$

$$G_6 = \frac{F}{F_{max}} - 1.0$$

$$G_7 = \frac{n_{min}}{\text{MAX}(n, 10^{-3})} - 1.0$$

$$G_8 = \frac{1.0}{\text{MAX}(P_d, 10^{-3})} - 1.0$$

$$G_9 = \frac{P_d}{25.0} - 1.0$$

$$G_{10} = \frac{\psi}{45.0} - 1.0$$

$$G_{11} = \frac{v_t}{v_{tmax}} - 1.0$$

$$G_{12} = \frac{d}{12.0} - 1.0$$

$$G_{13} = \frac{0.2r_N}{\text{MAX}(F, 10^{-3})} - 1.0$$

$$G_{14} = \frac{N}{N_{max}} - 1.0$$

이러한 복잡한 구속조건식 ( $G_i, i=1, 2, \dots, 14$ )을 가진 식 (25)와 같은 비선형 목적함수를 최적화하기 위하여 ALM (augmented lagrange multiplier) 방법<sup>(12)</sup>을 도입한다. 즉, penalty parameter와 Lagrange multiplier를 사용하여 식 (25)의 목적함수  $Q$ 를 구속조건식을 포함한 가함수(pseudo objective function)  $PF$ 로 변환함으로써 구속조건이 없는 최적화 문제로 변환한다.

$$PF(X, \lambda, r_k) = Q(X) + \sum_{i=1}^{14} (r_k \Psi_i^2 + \lambda_i \Psi_i) \quad (26)$$

여기에서,  $X$ 는 설계변수 벡터,  $\lambda$ 는 Lagrange multiplier 벡터,  $r_k$ 는 페널티파라미터,

$$\Psi_i = \text{MAX} \left\{ G_i, \frac{\lambda_i}{2r_k} \right\} \text{이다.}$$

가함수  $PF$ 를 최소화하기 위해 ALM 방법은  $r_k$ 와  $\lambda_i$ 를 개선하면서 반복적으로 최적해를 구한다. 최적화의 탐색과정은 Self-scaling하는 BFGS(broydon-fletcher-goldfarb-shanno) 방법을 사용하며, 목적함수의 감소방향의 스텝길이를 구하는 선택색에는 Three point modified quadratic fit 방법을 사용하고, 이 Modified quadratic fit을 위한 초기점을 구하기 위하여 sequential search를 사용한다.<sup>(13)</sup> Sequential search의 초기점은 항상 0.0으로 두며, 초기 스텝길이는 설계변수들의 설계범위 중에서 최소값의 1/9로 둔다.

#### 4. 베벨기어의 설계알고리즘

이상과 같이 형상, 강도 및 성능에 미치는 각종 영향인자들을 고려해 구성된 최적화 수식을 이용하여 베벨기어를 설계하기 위한 베벨기어 설계시스템의 구성 및 설계과정은 Fig. 2와 같다. 즉, 베벨기어 설계시스템은 Fig. 2와 같이 설계데이터를 입력하는 입력부와, 최적화계산을 수행하는 최적화부분 및 설계결과를 출력하는 부분으로 구성한다.

설계데이터의 입력부는 스트레이트, 제롤, 스파이럴 베벨기어 중 설계하고자 하는 치차형태를 선택하는 부분(①), 치차의 정밀도, 잇수비, 이의 형상(테이퍼 종류 등), 조립관련치수, 절삭방법, 커터제원 등 기하학적인 형상제원을 산출하기 위한 데이터를 입력하는 부분(②), 강도를 평가할 때 각종 영향계수를 구하기 위해 재질, 운전조건, 제작

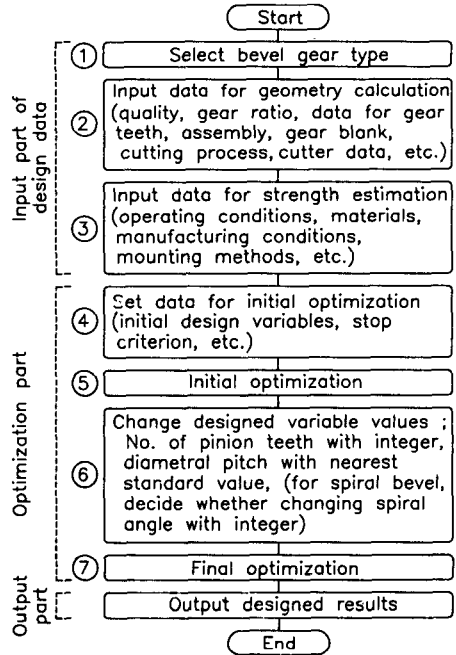


Fig. 2 Design process of bevel gear design system

조건, 지지방법 등의 데이터를 입력하는 부분(③)으로 구성한다.

최적화부분은 설계변수의 초기값 및 선택색의 종료조건 등을 설정하는 부분(④)과 최적화를 수행하는 부분(⑤, ⑥, ⑦)으로 구성한다. 초기 최적화부분(⑤)에서는 입력된 각종 데이터를 이용하여 최적화 계산을 수행하며, 체적이 최소화되면 실수값을 갖는 최적의 설계변수들이 설계된다. 이때 기어의 잇수는 피니언의 잇수와 잇수비를 곱하여 결정한다. 설계변수의 치환부(⑥)에서는 최적화된 실수의 설계변수값들을 실제 기어제작에 용이한 수치로 치환한다. 즉, 초기 최적화를 수행한 후 피니언의 잇수는 계산된 실수값보다 크고 가장 가까운 정수로 치환한다. 지름피치는 표준화된 커터의 규격치가 없지만 설계제작에 용이한 수치로 치환하기 위해 원통치차의 표준치(이하 '표준치'라 함)<sup>(8)</sup>를 기준하여 강도상 안전하도록 초기 최적화의 계산값보다 작으면서 표준치에 가장 가까운 값(모듈인 경우에는 큰 값)으로 치환한다. 스파이럴 베벨기어의 경우는 피니언의 잇수와 지름피치 이외에 스파이럴각을 정수값으로 치환할 것인지를 설계자가 판단하여 정수로 치환하고자 할 경우에는 설계된 실수값보다 크며 가까운 정수로 치환한다. 설계된 기어의 잇수

는 잇수비가 실수인 경우에는 실수값을, 잇수비가 정수인 경우에는 피니언의 잇수와 정수인 공약수를 갖게 되는데, 기어의 잇수가 피니언과 정수 공약수를 갖지 않도록 설계된 값보다 1 또는 2 정도 큰 정수로 치환하여 피니언과 기어의 잇수가 Hunting ratio를 갖도록 한다. 따라서 본 연구의 베벨기어 설계법은 최적설계를 수행한 후(초기 최적화 ⑤), 설계된 설계변수값 중 실제 치차에 적용가능하도록 정수 등의 수치로 치환되어야 할 설계변수를 적절한 수치로 치환하여(⑥) 치환된 설계변수를 상수로 두고 치환하지 않은 나머지 변수를 설계변수로 삼아(스트레이트 및 제롤은 치폭, 스파이럴은 치폭과 치환하지 않은 경우의 스파이럴각) 다시 최적화를 수행한다. (최종 최적화, ⑦)

최종 최적화에 의해 베벨기어의 최적설계가 완료 되면 도출된 설계변수값, 설계 영향인자의 크기, 체적 등의 설계결과를 출력함으로써 설계를 완료한다.

이상의 베벨기어 설계시스템에서 모든 자료의 입력과 출력 및 설계과정 도중의 의사결정 등은 컴퓨터와 사용자간의 대화화면을 통하여 수행된다. 본 연구에서는 베벨기어에 통상 사용되는 영국단위를 사용하였으며, 결과의 출력시에는 설계에 사용된 영국단위 뿐만 아니라 SI단위로 환산하여 두 단위를 선택적으로 구분하여 출력할 수 있도록 함으로써 설계자가 설계과정을 쉽게 이해하고 설계시스템을 손쉽게 이용할 수 있도록 하였다.

## 5. 베벨기어 설계시스템의 평가

이상의 연구에서 제안된 베벨기어의 최적설계법을 적용하고 동일한 운전조건, 형상데이터, 재질 등 설계자료를 입력하여 스트레이트, 제롤 및 스파이럴베벨기어를 설계하고 각 경우에 대해 설계결과를 평가한다.

### 5.1 설계를 위한 기본자료

본 연구의 최적설계법을 이용한 베벨기어 설계시스템의 실행시에 세가지 베벨기어를 설계하기 위하여 대화화면을 통해 입력되는 설계자료로서, Table 1은 형상제원 산출을 위한 입력자료이며 Table 2는 강도평가를 위한 입력자료이다.

### 5.2 설계결과 및 평가

Table 3, Table 4 및 Table 5는 Table 1과

**Table 1** Bevel gear data for geometry calculation.

Shaft angle	(degree)	90.00
Gear ratio		3.00
Hand of spiral on pinion*		left
AGMA quality No.	1) pinion 2) gear	11 11
Tooth taper		depthwise, standard depthwise, duplex*
Shank diameter of pinion	(in)	2.50
Bore diameter of gear	(in)	3.00
Crown to back of pinion	(in)	2.50
Crown to back of gear	(in)	3.00
Cutting process		form cutter face-milling*
Pressure angle	(degree)	20.00
Cutter edge radius	1) pinion (in) 2) gear	0.02 0.02
Cutter radius *	(in)	4.50

Note : The \* mark refers to zero and spiral bevel gears.

Table 2에서 입력된 설계자료를 이용하여 각각 스트레이트, 제롤 및 스파이럴 베벨기어를 설계한 결과를 나타낸 것이다. 각 Table에서 initial opt.의 열은 초기 최적화의 설계결과를 나타낸 것이며 final opt.의 열은 최종 최적화를 수행한 결과를 나타낸 것이다.

Table 3에서 초기 최적화설계 결과 목적함수인 상당평치차의 체적은 294.2(in<sup>3</sup>)으로 최소화되어 베벨기어의 피치원뿔체적은 12.25(in<sup>3</sup>)로 설계되었으며, 설계변수인 피니언의 잇수는 12.37개, 치폭은 0.77(in), 지름피치는 4.84(in<sup>-1</sup>)로 설계되어 각 변수의 설계범위내에 있음을 알 수 있다. 설계된 스트레이트 베벨기어의 굽힘응력(calculated)은 사용응력(working)보다 작고 접촉응력도 사용응력보다 작으므로 강도면에서 안전하다. 또한 피니언의 내단디텐덤이 한계디텐덤보다 작으므로 언더컷이 발생하지 않고, 축직각물림률이 1.0보다 크고 피니언의 피치직경과 피치원주속도도 최대값보다 작으므로 설계구속조건을 만족하도록 설계되었음을 알 수 있다. 피니언의 잇수와 지름피치를 치환하여 수행한 최종 최적화에서 설계된 치폭은 0.62(in)로 초기 최적화보다 다소 작아졌다. 상당평치차 체적은 초기 최적화보다 최종 최적화에서 약간 커졌으

**Table 2** Bevel gear data for strength estimation

Application	general commercial
Driving member	pinion
Direction of rotation (driver)	clockwise
Character of load	1) prime mover 2) driven machine uniform uniform
Load type	dynamic
Required total life	1) pinion (hours) 2) gear 87600 87600
Reliability requirement	fewer than one failure in 100
Mounting method	1) pinion 2) gear overhung straddle
Speed of pinion (rpm)	1400.00
Design power (hp)	35.00
Design pinion torque (lb in)	1440.00
Crowned / non-crowned	crowned
Material	1) pinion 2) gear steel steel
AGMA quality No. of material	1) pinion 2) gear A-1 A-1
Heat treatment	1) pinion 2) gear both gears, carburized & case hardened
Surface hardness	1) pinion (BHN) 2) gear 627.00 627.00
Pinion surface finish roughness (microinch)	60.00

며 이에따라 피치원뿔의 체적도 커졌음을 알 수 있는데, 체적이 다소 커진반면 물림률이 커지고, 피치원주속도가 작아지며, 피니언의 디텐덤과 최대 디텐덤의 차가 커져서 언더컷의 발생가능성이 작아졌고, 접촉응력이 작아지는 등, 치차성능면에서 유리한 결과를 얻었다.

Table 4는 제롤 베벨기어를 설계한 결과로서, 스트레이트베벨기어와 마찬가지로 초기 최적화와 최종 최적화설계에서 강도 및 각종 구속조건들을 만족하면서 체적이 최소화되도록 설계되었음을 알 수 있다. 또한 스트레이트 베벨기어보다 치폭이 작아지고 지름피치가 커져서 이의 크기가 작아졌으며, 피니언의 잇수가 많아졌음에도 불구하고 체적은 더 작아졌음을 알 수 있다.

Table 5는 스파이럴 베벨기어를 설계한 결과로서, final opt. 1은 최종 최적화를 수행할 때 스파

**Table 3** Design result for straight bevel gear

Design result	initial opt.	final opt.	
Number of teeth	1) pinion 2) gear	12.37 37.10	13.00 40.00
Face width (in)	0.77	0.62	
Diametral pitch (in <sup>-1</sup> )	4.84	4.75	
Pitch diameter	1) pinion (in) 2) gear	2.55 7.66	2.74 8.42
Bending stress, Working (psi)	70000.00	70000.00	
Calculated	1) pinion 2) gear	56157.60 60339.96	59868.51 62538.51
Contact stress, Working (psi)	192670.26	192670.26	
Calculated	192664.36	192011.49	
Limit inner dedendum (in)	0.13	0.15	
Inner dedendum (in)	0.12	0.13	
Transverse contact ratio	1.47	1.48	
Max. pitch line velocity (fpm)	1000.00	1000.00	
Pitch line velocity (fpm)	936.26	933.55	
Volume of equivalent spur gear (in <sup>3</sup> )	294.20	302.78	
Volume of pitch cone (in <sup>3</sup> )	12.25	12.46	

**Table 4** Design result for zerol bevel gear

Design result	initial opt.	final opt.	
Number of teeth	1) pinion 2) gear	13.24 39.73	14.00 43.00
Face width (in)	0.67	0.56	
Diametral pitch (in <sup>-1</sup> )	5.09	5.00	
Pitch diameter	1) pinion (in) 2) gear	2.60 7.80	2.80 8.60
Bending stress, Working (psi)	70000.00	70000.00	
Calculated	1) pinion 2) gear	63009.30 67524.52	65325.60 68099.53
Contact stress, Working (psi)	225000.00	225000.00	
Calculated	196369.16	192751.40	
Limit inner dedendum (in)	0.14	0.16	
Inner dedendum (in)	0.12	0.12	
Transverse contact ratio	1.49	1.50	
Max. pitch line velocity (fpm)	8000.00	8000.00	
Pitch line velocity (fpm)	954.17	1027.04	
Volume of equivalent spur gear (in <sup>3</sup> )	273.23	289.11	
Volume of pitch cone (in <sup>3</sup> )	11.38	11.91	

이럴각을 정수로 치환하지 않은 설계결과이며 final opt. 2는 스파이럴각을 치환하여 정수로 둔 설계결과이다. 스파이럴 베벨기어의 경우도 마찬가지로 설계변수의 설계범위내에서 각종 구속조건들을 만족하면서 체적이 최소화되도록 설계되었음을

Table 5 Design result for spiral bevel gear

Design result	initial opt.	final opt. 1	final opt. 2
Number of teeth 1) pinion	15.38	16.00	16.00
2) gear	46.16	49.00	49.00
Face width (in)	1.03	1.18	1.03
Diametral pitch ( $in^{-1}$ )	6.55	6.50	6.50
Spiral angle (degree)	32.66	29.52	33.00
Pitch diameter 1) pinion(in)	2.35	2.46	2.46
2) gear	7.04	7.54	7.54
Bending stress, Working(psi)	70000.00	70000.00	70000.00
Calculated 1) pinion	65372.76	54176.96	61351.41
2) gear	53360.92	42468.46	48221.45
Contact stress, Working(psi)	192670.26	192670.26	192670.26
Calculated	158101.89	146779.10	149180.16
Limit inner dedendum (in)	0.14	0.14	0.15
Inner dedendum (in)	0.07	0.07	0.07
Transverse contact ratio	1.21	1.21	1.21
Face contact ratio	1.59	1.59	1.59
Modified contact ratio	2.00	2.00	2.00
Max. pitch line velocity(fpm)	8000.00	8000.00	8000.00
Pitch line velocity (fpm)	861.32	901.63	902.89
Volume of equivalent spur gear ( $in^3$ )	598.76	662.07	711.26
Volume of pitch cone ( $in^3$ )	12.53	15.51	14.51

Note : The final opt. 1 is the design result when spiral angle is not changed with integer, while the final opt. 2 is the result when changed.

알 수 있다. 또한 강도 등 다른 구속조건들의 계산치는 허용(최대)치보다 상당히 작음을 알 수 있는데, 이들 성능인자 크기를 고려하면 설계된 스파이럴 베벨기어는 요구되는 전달동력을 안전하게 전달할 수 있음을 알 수 있다. final opt. 1의 결과는 초기 최적화보다 치폭이 커지고 스파이럴각이 작아졌으며, final opt. 2는 final opt. 1보다 치폭이 작게 설계되고 스파이럴각이 크기때문에 목적함수의 크기는 더 크지만 실제 베벨기어의 피치원뿔체적은 더 작게 설계되었음을 알 수 있다. 그러므로 설계자는 final opt. 1과 final opt. 2의 설계결과 중 적절한 결과를 선택하여 사용할 수 있다.

Table 3~Table 5의 설계에서 초기 최적화를 거쳐 최종 최적화 계산을 수행하는 동안에 목적함수인 상당평치차의 피치원뿔체적과 베벨기어의 피치원뿔체적은 근소하게 증가함을 알 수 있다. 이것은 초기 최적화 수행 후 피니언의 잇수는 많아지는 쪽으로 정수화되고 지름피치는 작은 쪽으로 치환되어 최종 최적화가 수행되기 때문에 체적은 약간 커지게 되지만 물림률이 커지므로 하중분담의 효과가 커질 뿐만 아니라 이(tooth)의 크기도 커지게 되어 강도면에 있어서는 보다 안전한 방향으로 최적화가

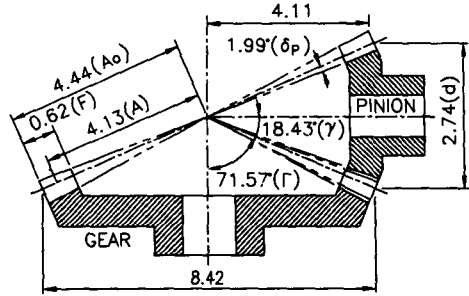


Fig. 3 Designed straight bevel gear (unit : inch)

이루어진다.

Fig. 3은 최종 최적화에서 설계된 세가지 베벨기어 중 스트레이트 베벨기어에서 Table 1 및 Table 2의 입력사항과 Table 3의 최적화결과를 이용하여 형상제원을 산출하여 설계결과를 가시도면화한 것이다.

### 6. 결론

본 연구에서는 임의의 각도로 동력을 전달하는데 사용되는 베벨기어(스트레이트, 제롤 및 스파이럴 베벨기어)의 굽힘 및 면압강도를 평가할 수 있고, 최적화기법을 도입하여 베벨기어 설계시에 고려하여야 하는 많은 인자들 중에서 형상, 강도, 피니언의 간섭, 물림률 등을 고려하여 이들 요구조건을 만족하면서 베벨기어의 체적을 최소로 할 수 있는 설계법을 개발하였다. 본 설계법은 최적화결과 의 설계변수 중 베벨기어의 크기를 나타내는 변수(피니언의 잇수, 지름피치, 스파이럴각)를 정수나 표준치로 치환하고 기어의 잇수를 피니언과 공약수를 갖지 않도록 치환하여 최적화를 재수행함으로써 실제 제작이 가능하고 성능이 우수한 베벨기어를 설계할 수 있도록 체계화하였다. 개발된 설계법을 설계예에 적용하여 설계결과를 검토한 결과 설계된 최소체적의 베벨기어는 굽힘강도와 면압강도에 대해 안전하며 베벨기어의 설계시 고려되는 인자들의 구속조건들을 잘 만족함을 알 수 있었다. 또한 개발된 설계시스템은 퍼스널 컴퓨터상에서 쉽게 설계에 이용할 수 있다.

본 연구에서 개발된 설계법의 결과는 아직 연구가 활발하지 않은 국내의 동력전달용 베벨기어 설계 및 제작에 있어서 많은 도움이 되리라 기대된다.



## 후 기

이 논문은 1992년도 교육부지원 한국학술진흥재단의 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음을 밝혀두며 심심한 사의를 표합니다.

## 참고문헌

- (1) 정태형, 변준형, 최종인, 1991, "유성치차장치의 전산기원용 설계법에 관한 연구," 대한기계학회논문집, 제15권, 제4호, pp. 1253~1262.
- (2) 정태형, 김민수, 1990, "컴퓨터를 이용한 동력전달용 인벌류우트 원통치차의 설계," 대한기계학회 논문집, 제14권, 제3호, pp. 594~602.
- (3) Jog, C.S. and Pande, S.S., 1989, "Computer-Aided Design of Compact Helical Gear Sets," *Trans. ASME, J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 111, pp. 285~289.
- (4) Carroll, R.K. and Johnson, G.E., 1989, "Dimensionless Solution to the Optimal Design of Spur Gear Sets," *Trans. ASME, J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 111, pp. 290~296.
- (5) ANSI/AGMA 2003-A86, 1988, *Rating the Pitting and Bending Strength of Generated Straight Bevel, ZEROL Bevel, and Spiral Bevel Gear Teeth*.
- (6) ANSI/AGMA 2005-B88, 1988, *Design Manual For Bevel Gears*.
- (7) DeGarmo, E.P., Black, J.T. and Kosher, R., 1988, *Materials and Processes in Manufacturing*, Macmillan Pub. Co.
- (8) Dudley, D.W., 1984, *Handbook of Practical Gear Design*, McGraw-Hill.
- (9) Trautshold, R., 1955, *Gear Design and Production*, Columbia Graphs.
- (10) Gleason Works, 1987, *Bending Stresses in Bevel Gear Teeth*.
- (11) Gleason Works, 1981, *Surface Durability Pitting Formulas for Bevel Gear Teeth*.
- (12) Vanderplaats, G.N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill.
- (13) Luenberger, D.G., 1987, *Linear and Non-linear Programming*, Addison-Wesley.