

〈論 文〉

## 얕은 직사각형 통내의 혼돈적 교반

서용권\* · 문종춘\*\*

(1993년 3월 31일 접수)

### The Chaotic Stirring in a Shallow Rectangular Tank

Yong Kweon Suh and Jong Chun Moon

**Key Words :** Chaotic Stirring(혼돈적 교반), Vortex Shedding(와류 쉼딩), Poincare Section(푸앵카레 단면), Unstable Manifold(불안정 다양체), Lyapunov Exponent(리아푸노프 지수)

#### Abstract

Study on the chaotic stirring has been performed numerically and experimentally for a shallow rectangular tank accompanying a vortex shedding. The model is composed of a rectangular tank with a vertical plate with a length half the width of the tank. The tank is subject to a horizontal sinusoidal oscillation. The chaotic stirring was analysed by Poincare sections, unstable manifolds and Lyapunov exponents. As Reynolds number is increased the stirring effect is decreased due to the growth of a regular regions near the lower surface of the tank. On the other hand decrease of Reynolds number gives a weaker vortex shedding resulting in the poorer stirring effect. It was also found that the Lyapunov exponent is the highest at the dimensionless period of 1.3~1.5, which seems to be the best condition for the efficient stirring. The experimental visualization for the deformation of materials exhibits the striation pattern similar to the unstable manifold obtained numerically.

#### 1. 서 론

혼돈적 교반은 유체입자들의 혼돈적 거동을 이용한 교반을 말한다. 여기서 혼돈(chaotic)이란 유동장내의 유체입자들이 예측불허의 궤적을 보이는 것을 말한다. 물론 이 경우 유동을 유발시키는 외력은 규칙적으로 작동함을 전제로 한다. 즉 규칙적인 외력에 의해 형성된 유동장에서 외력의 적절한 조합으로 유체입자들이 혼돈적으로 움직이는 것이 가능하며, 이 때 유체물치들은 접혀지고 늘어지는 과정을 반복하여 시간의 지수에 비례하여 길어진다. 주어진 공간에서 이러한 길다란 유체물치들이 존

재하기 위해서는 서로 밀착하면서 접힌 상태를 유지하지 않을 수 없다. 이렇게 성질이 서로 다른 물치들이 서로 밀착하면 쉽게 혼합되는 것은 당연하다.

중래의 고전적 교반은 따라서 혼돈적 교반의 관점에서 새로이 평가되어야 하고, 또한 고 효율의 혼합기의 창안과 설계에 이러한 혼돈적 교반의 개념이 필수적으로 적용되어야 한다고 생각된다.

1984년 혼돈적 교반의 현상을 가장 먼저 보여 준 Aref<sup>(1)</sup>의 연구 이후 많은 분야에서 이와 관련된 연구가 전세계적으로 이루어지고 있다.

본 연구는 직사각형 통내에 수직평판을 세우고 유체를 얇게 담아 수평방향으로 조화운동시킬 때 평판의 끝에서부터 발생되는 와류쉐딩(Fig. 1참조)을 이용하여 그릇 내의 유체를 효과적으로 교반시

\*정회원, 동아대학교 기계학과

\*\*정회원, 동아대학교 기계공학과 대학원

키는 문제에 대하여 수치해석과 가시화실험의 양면에서 조사한 것이다. 본 모델에 대한 유동장은 이미 저자들이 구하여 발표한 바 있고, (2) 본 연구에서는 이렇게 구한 유동장을 사용하여 교반특성을 조사하였다. 이를 위하여 Poincare 단면, 불안정 다양체, Lyapunov 지수 등을 구하였다. 실험에서는 염료가 늘어지는 모양을 가시화 촬영하였으며, 수치해석으로 구한 불안정 다양체와 비교하였다.

## 2. 교반특성에 대한 해석방법

### 2.1 운동방정식의 적분

Poincare 단면, 불안정 다양체, Lyapunov 지수 등을 구하기 위해서는 유체입자의 운동방정식을 적분해야 한다.

속도장  $u^*(x^*, y^*, t^*)$ ,  $v^*(x^*, y^*, t^*)$ 가 주어져 있을 때 초기위치  $(x_0^*, y_0^*)$ 를 출발한 유체입자의 궤적은

$$\frac{dx^*}{dt^*} = u^*(x^*, y^*, t^*) \quad (1a)$$

$$\frac{dy^*}{dt^*} = v^*(x^*, y^*, t^*) \quad (1b)$$

를 시간에 대하여 적분함으로써 구할 수 있다. 이것을 무차원화 하면

$$\frac{dx}{dt} = bu(x, y, t) \quad (2a)$$

$$\frac{dy}{dt} = bv(x, y, t) \quad (2b)$$

이 된다. 여기서  $b=r/l$ ,  $r$ 은 그릇의 요동운동의 진폭,  $l$ 은 그릇의 가로길이를 나타내며 (Fig. 1),  $x, y$ 는  $l$ 로써,  $t$ 는  $l/\omega$ 로써 ( $\omega$ 는 요동운동의 각속도),  $u, v$ 는  $r\omega$ 로써 무차원화한 것이다. 임의의

$(x, y)$ 점에서의 속도성분  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$ 는 이전의 유동장 해석(2)에서 구한  $u_{i,j}(t)$ ,  $v_{i,j}(t)$ 로부터 시간 및 공간의 양면에서 선형적 보간의 원리에 의해 구하였다. 식(2)는 4계의 Runge-Kutta 법으로 풀었다.

Poincare 단면 등을 구하기 위해서는 짧은 주기에 걸쳐 운동방정식을 적분할 필요가 있다. 본 연구에서는 한 주기 동안의 시간 간격을 컴퓨터 용량이 허용하는 대로 작게 잡아 속도값을 기억시키고 그 사이의  $t$ 에 대한 속도값은 선형보간의 원리에 의해 구하였다. 여기서는  $\Delta t = 2\pi/256$ 으로 하였다.

### 2.2 Poincare 단면

정규영역에서는 교반이 미흡하고 혼돈영역에서는 교반이 탁월하다. 이러한 정규영역과 교반영역은 하나의 갖힌 유동장에서 뚜렷이 구별되어 나타나는데, Poincare 단면에 의해 이것을 구별할 수 있다.

Poincare 단면이 올바르게 나타나려면 수천, 수만개의 점들이 찍혀야 한다. 종래의 방법은 (즉, 경계면에서 미끄럼속도가 유한한 유동모델의 경우), 한 점  $(x_0, y_0)$ 에서 출발하여 그것이 이동해 가는 점들만을 모아서 Poincare 단면을 만드는 것이다. 그러나, 여기서는 이 방법이 좋지 못하다. 왜냐하면, 경계에서 속도가 0이기 때문에 입자가 경계로 접근하면서 정체되는 경우가 흔하기 때문이다(수치해석 경험에 의한). 입자가 경계에서 정체하면, 그것이 불필요한 곳에서 너무나 많은 계산시간을 소비하게 된다. 따라서, 여기서는 초기에 많은 입자들을 공간적으로 골고루 배치시켜 이것들이 40주기(비교적 짧은시간) 동안 거처간 점들을 모아 Poincare 단면으로 만들었다.

### 2.3 불안정 다양체

불안정 다양체란,  $t \rightarrow \infty$ 의 접근시 유체입자가 고정점에 귀착하는 점들의 집합(곡선)이다. 이 불안정 다양체는 교반중에 있는 어떤 입자위치(예를 들면 가시화용 염료)가 장시간에 걸쳐 늘어진 모양을 대변하는 것으로 알려져 있다. (3) 따라서 교반특성을 이해하는데 중요한 도구로 사용될 수 있다. 불안정 다양체에 대해서는 참고문헌(4)등을 통해 알아 볼 수 있다.

본 연구 모델에서는 고정점을 찾기 어렵다. 그러

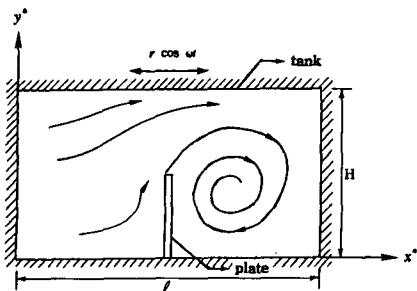


Fig. 1 The flow model, and the dimensional coordinates

나 고정점에서 출발하지 않더라도 불안정 다양체는 그렇게 어렵지 않게 구할 수 있다. 우선 임의의 점  $(x_0, y_0)$ 에서 출발하여 한 주기뒤에 도착되는 점  $(x_1, y_1)$ 을 구한다. 그런 뒤 이 두점간의 직선상에 많은 점들(보통 수십개)을 분포시켜 그 다음 한 주기 뒤에 이것들이 이동하는 점들을 다시 찾는다.

여기서, 점과 점 사이의 거리는 보통 지수적으로 증가하므로 한 주기 동안 일정한 간격으로 거리를 체크 하여 어떤 상한치(여기서는 0.03~0.05)를 벗어나면 선형보간으로 새로운 점들을 그 사이에 추가해 나간다.  $(x_0, y_0)$ 부터 시작하여 이와 같이 구한 점들을 연결하게 되면 선이 되는데 초기의 몇 주기(보통 2~3주기)의 점들을 버리게 되면 거의 불안정 다양체에 근사한 모양을 얻게 된다.

#### 2.4 Lyapunov 지수

Lyapunov 지수는 아주 가까이 존재하는 두 유체입자가 시간에 따라 지수적 멀어지는 정도를 나타내는 양으로서, 이것이 바로 교반의 효과를 비교할 수 있는 것으로 여겨지고 있다. 유동장이 주기적일 때 무차원화된 Lyapunov 지수  $\Lambda$ 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \frac{d_N}{d_0} \quad (3a)$$

$$\Lambda_N = \frac{1}{N} \ln \frac{d_N}{d_0} \quad (3b)$$

여기서  $d_0$ 는 두 입자 사이의 초기거리,  $d_N$ 은  $N$  주기 후의 거리,  $a$ 는 무차원 주기로서,  $a = \omega_n / \omega$ ,  $\omega_n$ 은 공진각속도로서,  $\omega_n = \pi \sqrt{gh} / l$ 이다.

Poincare 단면을 구할때 처럼, 여기서도 효율적 계산을 위해 초기에 많은 점들을 분포시키고 공간적으로 평균하는 방법을 취하였다. 그리고  $\ln d_N / d_0 = \ln d_1 / d_0 + \ln d_2 / d_1 + \dots$ 이 되므로  $\ln$ 내의 분모인  $d_0, d_1, \dots$ 등은 항상 0.001이 되도록 조정하였다. (단, 두점간의 방향은 유지되도록 하였음) Lyapunov 지수의 기본 개념에 대해서는 참고문헌<sup>(5)</sup>등을 통해 알아볼 수 있다.

### 3. 실험방법

실험에 사용된 유체는 차량용 부동액이며, Ostwald 점도계로 측정된 결과 동점성계수는 온도 20°C에서 약  $\nu = 1.742 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 이었다. 교반특성을 조사하기 위한 가시화실험은 기존의 왕복운동

실험장치를 이용하였으며, 유체표면에 제도용 잉크를 한방울 떨어뜨려 이것이 늘어지는 모양을 연속적으로 사진 촬영하였다.

### 4. 결과 및 고찰

본 연구에서는 레이놀즈수  $Re = l^2 \omega / \nu$ , 무차원 주기  $a$ 를 다양하게 변화시켜 가면서 혼합특성을 조사하였다. 그리고 요동운동의 무차원 진폭  $b = 0.1$ 로, 탱크의 무차원 세로길이는 0.583이며 평판의 무차원 길이는 0.292, 위치는 중앙이다.

$Re = 700$ 에서의 몇가지  $a$ 값에 대한 Poincare 단면을 Fig. 2에서 보여준다. 우선  $a$ 값이 증가할 수록 혼돈영역이 커짐을 알 수 있다. 그러나 반면에 같은 혼돈영역이라도 그 외곽지역에서는 규칙적 특성을 가짐을 알 수 있는데,  $a$ 가 증가할 수록 이러한 특성을 지닌 지역이 더 커짐을 알 수 있다.

Fig. 3에서는 여러가지 다른  $Re$ 와  $a$ 값에서의 Poincare 단면을 보여 주고 있다.  $Re$ 가 증가하면, 4개 구석 주위의 정규영역이 점점 커짐을 알 수 있다. 혼돈영역의 크기는 바로 교반효과에 직결된다. 즉 혼돈영역이 크면 그만큼 교반이 잘되는 지역이 넓음을 의미한다.

교반의 효과를 정량화하기 위해서는 궁극적으로 Lyapunov 지수를 구해야 한다. 이를 위해, 우선, 불안정 다양체를 이해할 필요가 있다.

평판의 좌우측 및 상부에서 원형의 유체몽치의 크기와 초기위치의 선정이 불안정 다양체에 미치는 영향에 대하여 수치해석과 실험을 통해 검토하였다. 한 주기씩 시간이 경과할 때 원형의 유체몽치가 변형되는 과정을 나타낸 것이 Fig. 4이며, 평판 우측에서 수치해석한 결과이다. 이것은 궁극적으로 불안정 다양체(Fig. 6의  $a = 1.75$ )에 접근함을 알 수 있다. 유체몽치의 초기위치와 크기를 다양하게 변화시켜 본 결과, 그것이 혼돈영역 내에 있거나 하면, 초기위치와 크기에 무관하게, 그 궁극적인 변형은 불안정 다양체를 따라간다; 이것은 불안정 다양체가 유체몽치의 변형에 있어서 일종의 끌개(attractor)의 기능을 갖고 있음을 보여 준 결과이다.

Fig. 5는  $Re = 700$ ,  $a = 1.75$ 때의 불안정 다양체 자체의 변형과정을 한 주기 동안 그린 것이다.  $t_s = 0$ 때( $t_s$ 는 stroboscopic time을 뜻하며 여기서는  $t$ 와 같은 의미)의 모양에서 곡선이 잘 지나가지 않

은 지역(회계 보이는 지역)을 4개의 기호  $L_1, L_2, R_1, R_2$ 로 표시하였다.  $t_0$ 의 증가에 따라 이 4개 지역은 그 위치를 옮기면서, 동시에 변형함을 알 수

있다.  $t_0=0.75\pi$ 때 평판 끝의 좌측 가까이에  $R_0$ 의 지역이 새로 생겼으며,  $t_0=1.75\pi$ 때 우측에  $L_0$ 가 새로 생겼다. 결국, 한 주기 후인  $t_0=2\pi$ 때에 가서

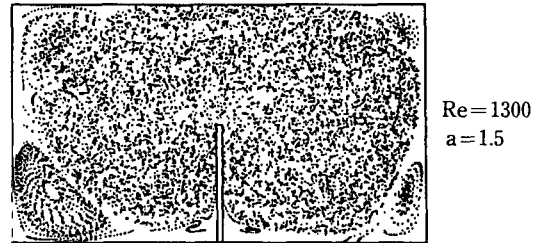
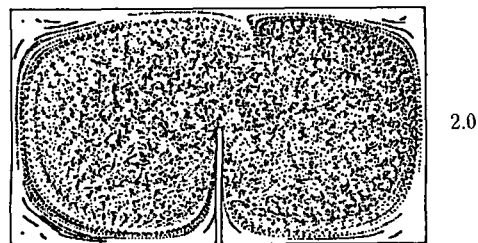
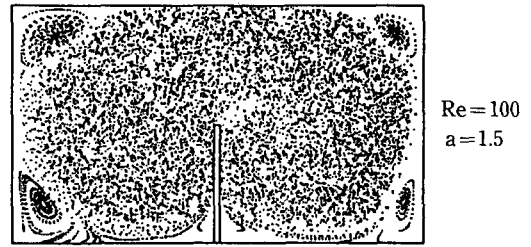
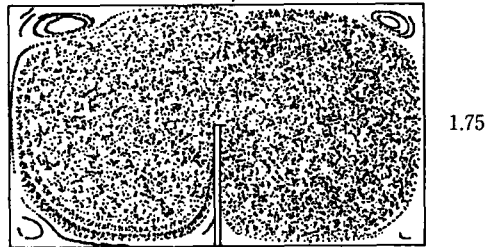
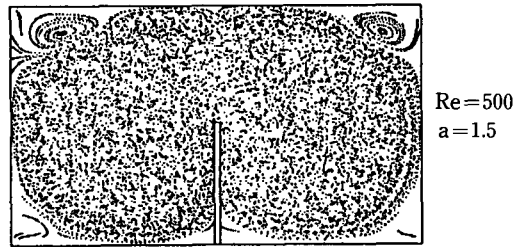
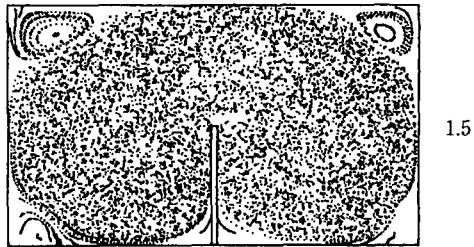
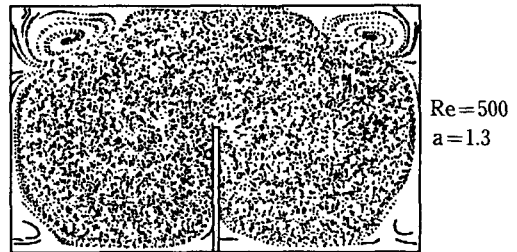
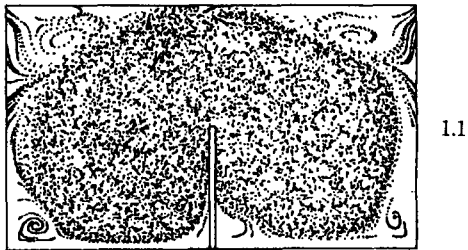
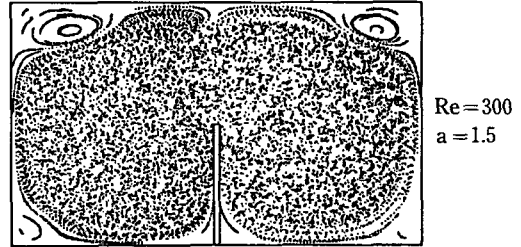
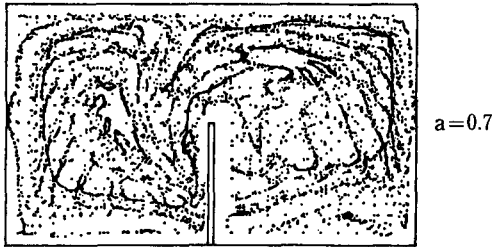


Fig. 2 Poincaré maps at  $Re=700$  for various values of  $a$  shown.

Fig. 3 Poincaré maps for various combinations of  $Re$  and  $a$

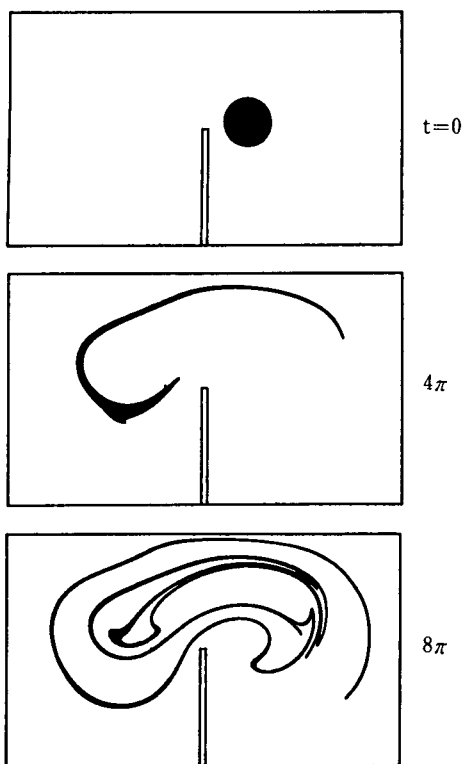


Fig. 4 Deformation of a circular blob at  $Re=700$ ,  $a=1.75$ . Radius of the circle was 0.06, and its center was at  $(0.607, 0.31)$

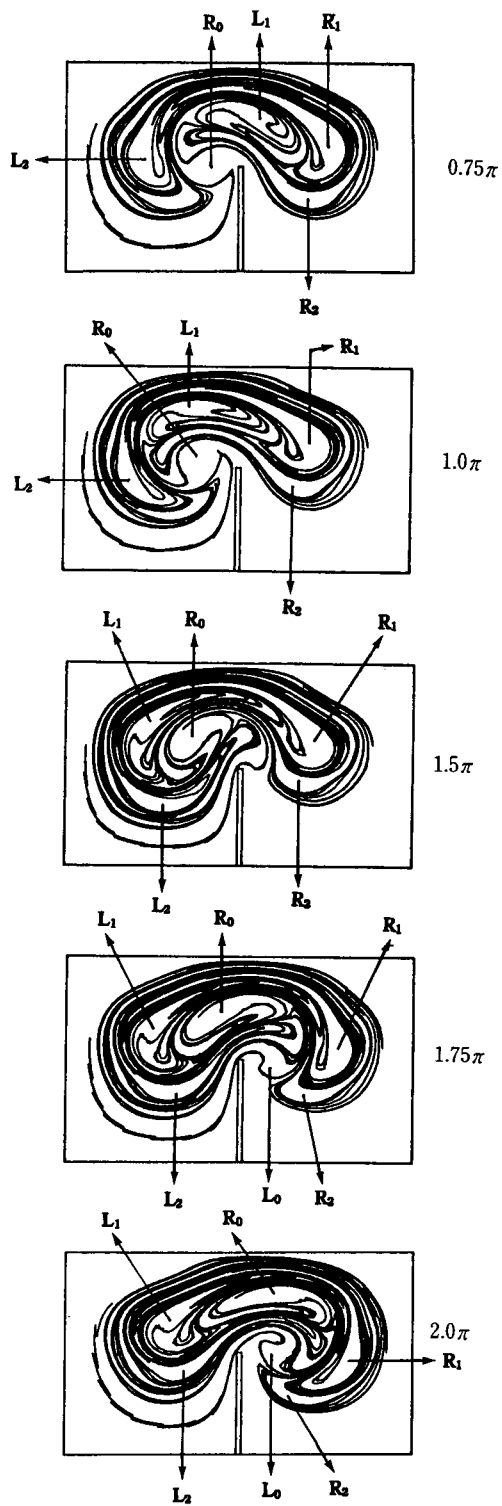
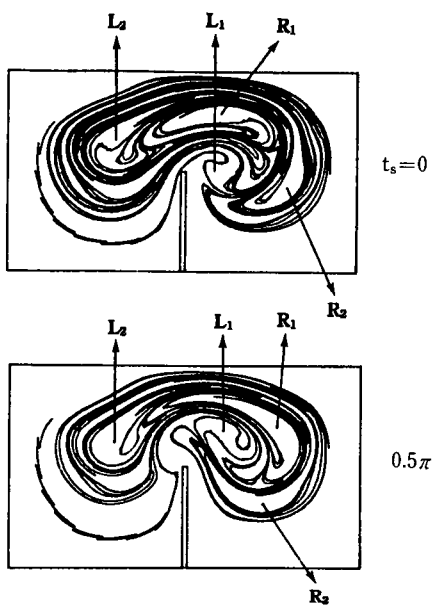


Fig. 5 Unstable manifolds for  $Re=700$ ,  $a=1.75$ , at  $t$  values shown



는,  $L_0$ 와  $R_0$ 가 새로 생겼으며  $L_1$ 은  $L_2$ 의 위치로  $R_1$ 은  $R_2$ 의 위치로 옮겨 갔으며 전체적인 형상은 변함없이 된 것을 알 수 있다.

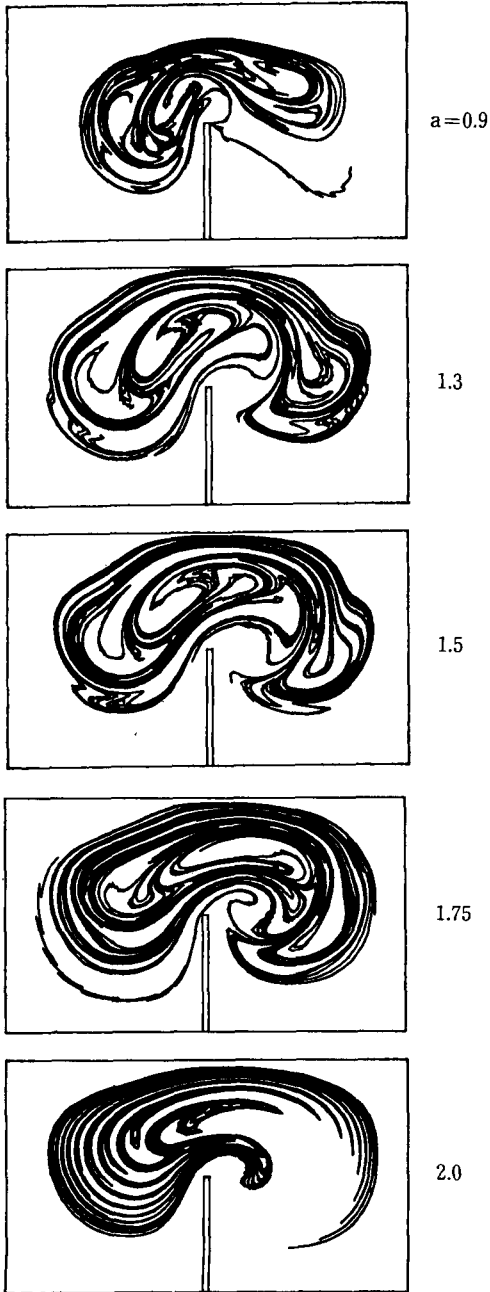


Fig. 6 Unstable manifolds at  $Re=700$  for various values of  $a$  shown. The stroboscopic time  $t_s$  is 0

$Re=700$ 에 있어서 여러가지 다른  $a$ 값에 대한 불안정 다양체를 Fig. 6에 나타내었다.  $a=0.9$ 에서는 그 퍼진 모양이 작으며,  $a=1.3$ 과  $1.5$ 에서는 전반적으로 접힘과 신장이 좋음을 알 수 있고  $a=1.75$ ,  $2.0$ 에서는 다시 그 접힘효과가 감소하는 것을 알 수 있다.

Fig. 7에서는 여러가지 다른  $Re$ 와  $a$ 에 대한 불안정 다양체를 나타낸다.  $Re$ 가 증가할 수록 접힘-신장의 모양이 다양하여 교반효과가 좋은 것으로 생각된다.

위에서 구한 불안정 다양체는 어떤물질(예를 들면 염료)의 늘어지는 모양을 대변하기도 하지만, 이것으로 부터 물질의 늘임-접힘의 과정을 살펴 볼 수도 있는 것이다. 또한, 불안정 다양체는 끝이 없는 접힘을 갖고 있으므로 아무리 미세한 격자망을 사용 하더라도 그 세부적인 모양을 모두 다 나타낼 수는 없을 것이다. 본 연구의 격자망은 공학적인 측면에서 볼 때 충분하다고 판단된다. (아래의 실험 결과와의 비교로부터)

이제 교반에 관한 실험결과를 살펴보자. 초기에 흑색잉크를 한방울 떨어 뜨린 뒤 이것이 늘어지는 과정을 연속 촬영한 것이 Fig. 8이다. 시간이 더욱 지남에 따라 그 외곽이 조금씩 커지나 그 모양은 이 그림의 마지막의 형태와 거의 같다. 사진에서 희게 보이는 지역이 변형하는 과정을 살펴보면, 앞의 Fig. 5의 과정과 거의 흡사함을 알 수 있다. 이제, 이 실험의 결과와 가장 잘 맞는 불안정 다양체를 Fig. 6과 Fig. 7에서 골라 본다면,  $R_1$ 모양(Fig. 5의  $t_s=0$ 때의 모양에서)으로 본다면,  $Re=1000$ ,  $a=1.75$ 의 것(Fig. 7)이,  $L_1$ 모양으로 본다면,  $Re=700$ ,  $a=1.75$ 의 것(Fig. 6)이 잘 맞음을 알 수 있다.

Fig. 9는 다른  $a$ 값과  $Re$  수에 대한 가시화 실험의 결과이다.  $a$ 가 증가할 수록 교반효과가 떨어짐을 알 수 있는데 이는  $Re$ 가 동시에 감소하기 때문에 그 효과가 더욱 뚜렷하다 할 수 있다. 수치해석의 결과와 비교한다면,  $a=2.0$ 의 경우에는  $Re=1000$ ,  $a=2.0$  (Fig. 7)의 것과 비슷하며,  $a=2.2$ 의 경우에는  $Re=700$ ,  $a=2.0$ (Fig. 6)과 비교할 수 있다. 이처럼 동일한  $Re$  값 보다 오히려 더 낮은  $Re$  값에서의 수치해석 결과와 잘 맞는 것은, 바닥에서의 Ekman 층에 의한 것이라 추측되며, 천수 근사방정식으로는 처리할 수 없는 효과로 사료된다.<sup>(2)</sup>

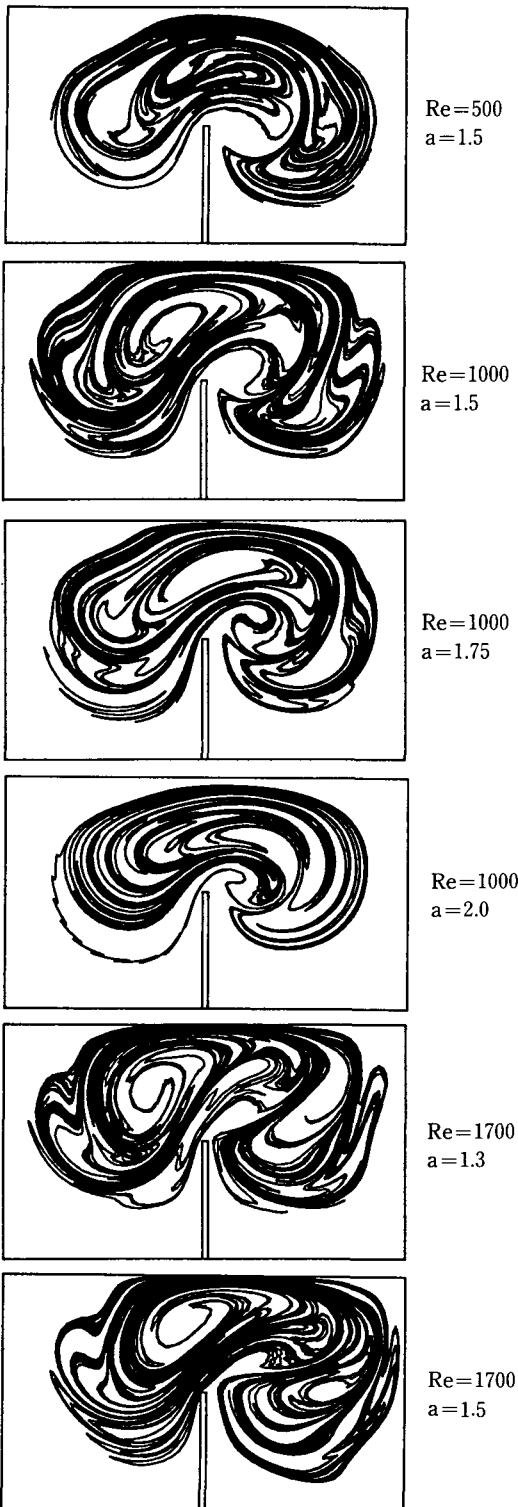


Fig. 7 Unstable manifolds for various combination of Re and a.  $t_s=0$ .

다음 Lyapunov 지수  $\Lambda_N$ 을 구하였다. 본 연구에서는 유동장내에 콜고루 분포시킨 279개의 점들을 갖고 평균하였다.

Fig. 10은 초기의 5개 주기 동안의 결과는 버리고 그 후의 것을 갖고 평균한 결과를  $N$ 의 증가에 따라 나타낸 것이다.  $N=40$ 에서도 계속 감소하는 경향을 보이고 있으나, 계산시간이 많이 소요되어  $N=40$ 까지만 계산을 수행하였다. 그러나  $\Lambda_{40}$ 으로

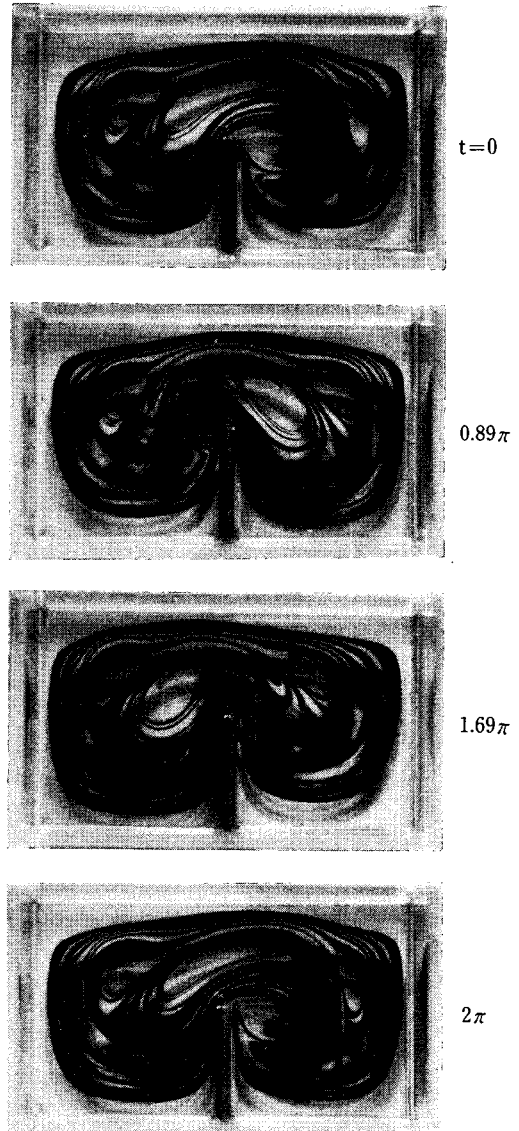
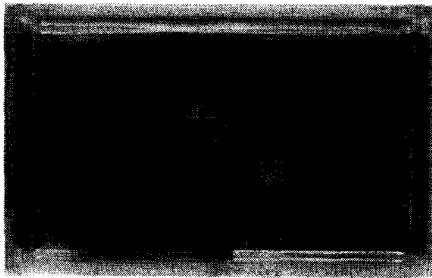


Fig. 8 Experimental results at  $Re=3876$ ,  $a=1.749$  for visualization of deformation of a small ink blob

도 상대적인 비교를 할 수 있을 것으로 생각된다. Table 1에서는 그 결과를 나타낸다. 우선  $Re=700$ 에서  $a$ 의 변화에 따른  $\Lambda_{40}$ 의 변화를 보면  $a=1.3$ 에서 국부적으로 최대가 되고  $a$ 가 감소할 수록 이것이 대체로 작아지다가  $a=0.5, 0.6$ 에서 급격히 증가된 것을 알 수 있다. 그러나, 이 범위에서는 충격파가 강하게 나타나서(아래 참조) 수치해석의 신뢰도에서 문제가 있기 때문에 옳은 값으로 볼 수

가 없다. 이렇게 생각한다면,  $a=1.3\sim 1.5$ 의 범위에서 가장 교반효과가 뛰어나며, 이는 앞의 Poincare 단면에서의 정성적 분석 결과와도 일치한다. 다음,  $a=1.5$ 에서  $Re$ 의 변화에 따른  $\Lambda_{40}$ 의 변화를 보면,  $Re=1000$ 까지는 계속 증가하다가 그 후는 오히려 감소한다. 즉  $Re=1000\sim 1300$ 의 범위에서 교반효과가 뛰어나며, 이 원인으로서는, 앞의 Poincare 단면에서도 지적한 바와 같이, 높은  $Re$  값에서는 하부 구석주위의 정규영역(또는 국부적 혼돈영역)이 커지기 때문이다. 또한,  $Re=1700$ 에서는 유동이 비대칭적인데<sup>(2)</sup> 이것도 하나의 원인이 되는지는 알 수 없다.

낮은  $a$ 값의 범위에서는, 자유표면의 기울기가 급격한 부분이 얇게 존재하며 이것이 진행되는 것이다. 이것은 압축성 유동의 충격파와 같은 성격을 갖는다(앞으로 충격파라 부른다). 압축성 유동에서



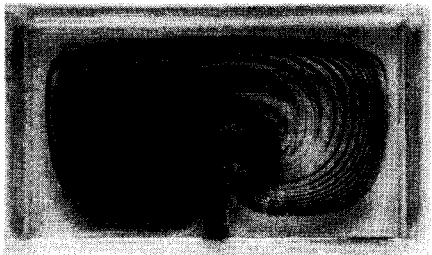
a=1.3  
(Re=5214)



1.5  
(Re=4518)



2.0  
(Re=3389)



2.2  
(Re=3081)

Fig. 9 Experimental results at various  $a$  values and  $Re$  for visualization of deformation of a small ink blob.  $t_s=0$  for all cases

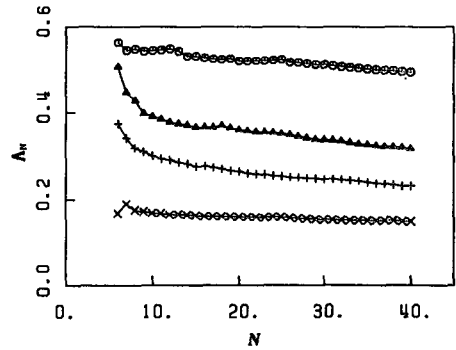


Fig. 10 History of Lyapunov exponent  $\Lambda_N$  after  $N$  periods for four cases;  $\circ$ ,  $Re=1000$ ,  $a=1.5$ ;  $\triangle$ ,  $Re=700$ ,  $a=1.5$ ;  $+$ ,  $Re=500$ ,  $a=1.5$ ;  $\times$ ,  $Re=300$ ,  $a=1.5$

Table 1 Lyapunov exponent  $\Lambda_{40}$  at various combinations of  $Re$  and  $a$

a	Re					
	300	500	700	1000	1300	1700
0.5	-	-	0.50	-	-	-
0.6	-	-	0.52	-	-	-
0.7	-	-	0.21	-	-	-
0.9	-	-	0.30	-	-	-
1.1	-	-	0.28	-	-	-
1.3	-	-	0.36	-	-	-
1.5	0.15	0.23	0.32	0.49	0.44	0.37
1.75	-	-	0.25	0.29	-	-
2.0	-	-	0.12	-	-	-



충격파 전후 지역의 성질들이 매우 다르듯이, 여기서도, 그 좌우지역의 속도는 매우 다르다. 즉 충격파의 좌우지역의 유동은 모두 충격파를 향한 방향이다. 따라서 충격파가 존재하는 지역에서 유체가 서로 충돌한다고 볼 수 있다. 또한, 이 충격파가 진행하여 벽면에 닿게 되면 유체와 벽면 사이에 충돌이 생긴다. (이러한 이유로 충돌에 약한 미생물 세포의 성장을 위해 본 모델을 사용할 때는 낮은  $a$ 의 범위를 피해야 한다.<sup>(6)</sup>) 충격파의 진행성으로 인하여 한 점에서의 유동의 속도는 짧은 시간동안 급격히 변화게 된다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 와류쉐딩에 의한 직사각형 통내에서의 교반특성을 조사하였다. 4개의 Runge-Kutta 방법으로 입자의 운동방정식을 적분하여 가시화 실험과 비교해 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 레이놀즈수가 증가함에 따라 하부의 면 근처에서 규칙영역이 증대하며, 이로 인해 교반효과가 감소하는 것으로 추측된다. 그리고 레이놀즈수가 감소하면 와류쉐딩이 강하지 못해 교반이 미약하다.

(2) 그릇의 요동주기가 커짐에 따라 좌우의 와류가 서로 강화시키는 상호작용이 약하여 교반효과가 떨어지며, 주기가 작아짐에 따라서는 와류가 쉼딩할 시간적 여유가 없어 역시 교반효과가 떨어진다

(3)  $a=1.5$ 에서  $Re=1000\sim 1300$  때,  $Re=700$ 에

서  $a=1.3\sim 1.5$ 때 가장 효과적인 교반이 일어난다.

(4) 낮은  $a$ 값의 범위에서는 충격파가 형성되므로 미생물의 배양 등에는 불리하리라 생각된다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단의 92 일반목적기초연구 지원(과제번호 921-0900-091-1)에 의해 이루어졌으며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Aref, H., 1984, "Stirring by Chaotic Advection," *J. Fluid Mech.*, Vol. 143, pp. 1~21.
- (2) 서용권, 문중춘, 1993, "보텍스 쉼딩에 의한 얇은 직사각형 통내에서의 유동특성," 대한기계학회논문집, 제17권 제8호, pp. 2122-2130.
- (3) Suh, Y.K., 1992, "Chaotic Advection Between Wavy Walls," *5th Asian Cong. Fluid Mech.*, pp. 715~718.
- (4) Guckenheimer, J. and Holmes, P., 1983, *Non-linear oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag.
- (5) Lichtenberg, A.J. and Lieberman, M.A., 1983, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag.
- (6) Mantell, S.H. and Smith, H., 1983, *Plant Biotechnology*, Cambridge University Press.