大韓機械學會論文集 第18卷 第12號, pp. 3369~3376, 1994

〈技術論文〉

유한요소법에 의한 2차원 응력파 전파 해석에 관한 연구

황갑운* · 조규종**

(1994년 1월 26일 접수)

A Study on Stress Wave Propagation by Finite Element Analysis

G. W. Hwang and K. Z. Cho

Key Words: Stress Wave(응력파), Finite Element Method(유한요소법), Stress Wave Intensity (응력파강도), Longitudinal Stress Wave(종방향 응력파), Shear Wave(전단파)

Abstract

A finite element program for elastic stress wave propagation is developed in order to investigate the shape of stress field and analysis the magnitude of stress wave intensity at time increment. Accuracy and reliance of the finite element analysis are acquired when the element size is smaller than the product of the stress wave speed and the critical value of increasing time step. In the finite element analysis and theoretical solution, the longitudinal stress wave is propagated to the similar direction of impact load, and the stress wave intensity is expressed in terms of the ratio of propagated area. The direction of shear wave is declined at an angle of 45 degrees compared with longitudinal stress wave and the speed of shear wave is half of the logitudinal stress wave.

1. 서 론

탄성체에 동적인 하중이 작용하면 매질입자는 평형상태를 기준으로 진동을 하고, 매질을 통하여 입자의 진동이 전해져 가는 것을 응력파의 전파라 한다. 고체내부에 전파되는 응력파의 전파형태는 복잡하고, 새로운 파가 발생할 가능성이 있으므로 그 응용범위가 넓다고 할 수 있고, 충격하중에 의해 발생하는 응력파의 크기를 측정하여 공학적인 설계에 이용할 가치가 있다.

이러한 응력파 전파에 관한 연구는 19세기 중반부터 연구가 시작되어 Kolsky[1]에 의해 탄성체에서의 전파가 처음 이론으로 성립되었으며, 1970년대 초 1차원 동탄성이론에 대한 연구가 본격적으로 행해지면서 탄성체 내에서의 응력파 전파에 관한 해석적인 방법이 개발되기 시작했다. 수치해석적으로 응력파를 해석하는 방법으로는 경계적분법[2,3]과 Kirchhoff 보존식의 직접 시간적분방법[4,5] 및 Dirichlet-to-Neumann(DtN)법 등[6~8]이 주로 사용되어 왔다.

그러나 경계요소법은 응력파의 시간영역 해를 구하기 위해 Laplace 또는 Fourier 영역을 역변환하는 방법으로써, 경계적분 변환영역의 정확한 해를 구하기 위해서 많은 경계해를 필요로 하게 된다. 따라서 응력파의 전파속도가 낮은 경우에는 해석의 신뢰성이 있으나 응력파의 속도가 높아지면 해석의 정확도가 감소하는 단점을 가지고 있다.

Kirchhoff 보존식의 직접 시간적분방법은 대용량의 기억장치를 필요로 하게 되어, 해석 차원이 높아지게 되면 컴퓨터를 이용한 해석이 불가능하게 된다.

*전남대학교 대학원 기계공학과
**정회원, 전남대학교 기계공학과

DtN법은 Givoli에 의해 경계적분법과 유한요소법을 혼합한 형태로 제안되어 경계적분법의 단점을 어느 정도 보완하게 되었으나, 정확한 경계조건을 필요로 하고 계산결과가 시간과 공간에 대해 특정한 값을 갖지 못하여 시간에 대한 합성(convolution)을 통하여 일반해를 구하는 단점이 있다.

따라서 본 연구에서는 응력파의 전파에 대한 기존의 해석방법의 문제점들을 해결하기 위하여 응력파의 속도에 관계없이 해석의 정확도와 신뢰성을 가질 수 있고, 주어진 시간과 공간에 대해 특정한 값을 가질 수 있으며, 시간영역에 대한 해를 직접 구할 수 있는 유한요소법을 이용하여 응력파 전파에 대한 해석을 하는데 목적을 두고 있다.

2. 유한요소해석

2.1 응력파의 이론 해석

2차원 응력파의 전파형태가 시간에 따라 응력파의 선단이 일정한 속도 c로 평행이동한다고 하면, 응력파의 진행방향에 무관한 응력파의 지배방정식은 다음식과 같이 내력과 관성력의 평형식으로 구성된다.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{1}$$

여기서,

c : 응력파 전파속도

위 식 이론해의 형태는

$$\phi(x, y, t)=\frac{1}{2}[f(lx+my+ct)+f(lx+my-ct)] \tag{2}$$

여기서, $l=\cos\theta$, $m=\sin\theta$

로 되고, 이때 2차원 평면에 전파되는 임의의 두면적 S_1, S_2에 대한 응력파 선단에서의 응력파 강도(stress wave intensity)는 에너지보존의 법칙과 Poynting의 정리[9]로부터

$$\iint_{S_1} I_1 \cdot ndS_1=\iint_{S_2} I_2 \cdot ndS_2 \tag{3}$$

가 된다. 따라서 시간이 t일 때 응력파의 강도를 I_t, 면적을 S_t라 하고, 시간이 $t+\Delta t$일 때 $I_{t+\Delta t}$, $S_{t+\Delta t}$라 하면,

$$I_{t+\Delta t}=I_t\frac{S_t}{S_{t+\Delta t}} \tag{4}$$

로 된다. 2차원 평면의 경우 응력파가 전파된 면적이 시간에 따라 달라지므로 응력파의 강도는 응력파가 전파된 면적에 반비례하게 된다.

2.2 지배방정식의 유한요소해석

유한요소법에 의한 응력파 해석은 시간영역과 공간영역의 이산화방법에 따라 그 정확도와 신뢰성이 결정되므로 유한요소해석을 수행하는데 걸리는 시간은 형상함수에 추가된 자유도의 수보다 훨씬 증가하게 된다. 따라서 본 연구에서는 형상함수를 공간좌표값의 함수로 하고, 함수 ϕ를 시간의 함수로 하여 Galerkin방법[10~12]으로 유한요소 수식화하면, 각각의 요소에 대한 함수 ϕ는

$$\phi^{(e)}=\sum_{i=1}^{n} N_i(x, y\phi_i(t) \tag{5}$$

로 되고, 응력파의 지배방정식 (1)에 외부에서 가한 하중(f)을 고려하면,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-f-k_{tt}\ddot{\phi}=0 \tag{6}$$

이 되고, 위 식을 유한요소 정식화하면

$$\int_{\Omega^{(e)}} N_i\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\phi^{(e)}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\phi^{(e)}}{\partial y}\right)-f-k_{tt}\ddot{\phi}^{(e)}d\Omega^{(e)}\right]=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{7}$$

여기서,

k_x, k_y : x, y 방향의 응력파 전파에 의해 결정되는 상수

k_{tt} : 응력파 전파속도에 의해 결정되는 상수

f : 외력

로 된다. 식(7)에 영역 S_2에 대한 경계조건을 고려하여 요소의 행렬식으로 표시하면 다음과 같다.

$$[K_{tt}]^{(e)}\{\ddot{\phi}\}^{(e)}+[K]^{(e)}\{\phi\}^{(e)}+[K_{S_2}]^{(e)}\{\phi\}^{(e)}+\{R_t(t)\}^{(e)}=\{0\} \tag{8}$$

여기서,

$$k_{ttij}=\int_s^{(e)} kNiNjd\Omega^{(e)}$$

$$k_{tij}=\int_{\Omega^{(e)}}\left(k_x\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+k_y\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)d\Omega^{(e)}$$

$$k_{S_2ij}=\int_{S_2} hN_iN_jdS_2$$

(h : 경계면에서 응력파의 반사 또는 투과에 의해 결정되는 상수

$$R_{ti}=\int_{\Omega^{(e)}} fN_i d\Omega^{(e)}+\int_{S_2^{(e)}} q_i dS_2^{(e)}$$

$$f(x,\ y,\ t)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i,\ t)N_i$$

로 된다.

식(8)과 같이 유한요소 수식화한 결과도 역시 시간에 대한 미분형으로 주어지므로, Newmark-β 법을 이용하여 유한차분적인 개념으로 위 식을 시간에 대해 연속인 식으로 표현하면

$$\begin{aligned}&[[K_{tt}]+\beta\Delta t^2[K]]\{\phi\}_{t+1}\\&=[2[K_{tt}]-(1-2\beta)\Delta t^2[K]]\{\phi\}_t-[[K_{tt}]\\&\quad+\beta\Delta t^2[K]]\{\phi\}_{t-1}+\Delta t^2[\beta\{F\}_{t+1}\\&\quad+(1-2\beta)\{F\}_t+\beta\{F\}_{t-1}]\end{aligned}\qquad(9)$$

로 된다. 이상과 같이 유한요소 수식화된 식으로부터 Fig. 1과 같은 계산과정을 미소시간을 증분시켜 가면서 반복적으로 수행하면 된다.

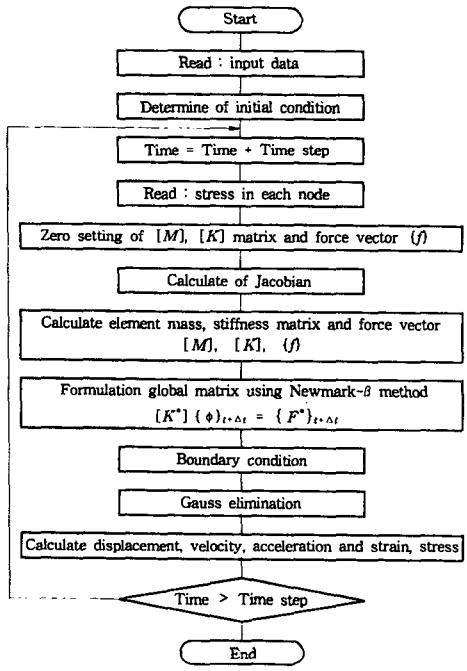


Fig. 1 Flowchart of finite element analysis for stress wave propagation

2.3 유한요소 모델

유한요소해석에 사용한 재질은 pyrex glass를 사용하였으며, Table 1과 같은 기하학적인 형상과 재료의 물리적 특성을 이용하였다. 요소를 4절점의 사각형 요소로 하여 2차원 응력파의 전파에 대한 유한요소해석을 하였으며, 유한요소 프로그램의 수렴성과 정확성을 검증하기 위한 요소의 크기, 요소의 수 및 절점의 수는 Table 2에 보인 바와 같이 가로, 세로 20 cm를 각각 20, 30, 40, 50, 60 등분하여 해석을 하였다.

유한요소해석에 사용한 시간증분 간격(Δt)은 다음 식과 같이 Newmark-β법에 의한 해석의 신뢰성이 검증된 임계값인

$$\Delta t_{cr}=\frac{1}{c}=\frac{1}{5.2\times10^5}=1.92\times10^{-6}\,\text{sec}\qquad(10)$$

(Δtcr : 임계 시간증분 간격)

와 임계값의 1/10인 1.92×10^{-7} sec를 사용하였으며, 응력파가 xy 평면상에서 매질이 서로 다른 두 물체 사이의 경계면에 부딪치면 응력파는 반사와 다른 매질로의 굴절 및 투과가 일어난다. 본 연구에서는 고정점에서 응력파는 100% 반사되고, 고정점 이외의 경계면에서 응력파는 100% 투과된다고 가정하였다.

Table 1과 같이 주어진 2차원 평판에 초기조건으로 $\{\phi\}_0$, $\{\dot{\phi}\}_0$와 $\{\ddot{\phi}\}_0$를 0으로 하고, 경계조건으로 평판의 x좌표값이 0인 한쪽 끝단 전체를 고정하여 응력파가 100% 반사되는 것으로 하였으며, 그 외의 경계면에서는 100% 투과되는 것으로 하였다. 또한 동하중($F_{xy}(t)$)은 1 Kg의 하중을 2 μsec 시간 동안 x좌표값이 20이고, y좌표값이 10인 고정단의 반대쪽 면의 중앙에 집중하중으로 가하였다.

Table 1 The geometrical shape and material properties of bar

Width (cm)	Length (cm)	Young' smodulus (E) (Pa)	Density (ρ_0) (Kg/m^3)	Poisson's ratio	Stress wave speed (m/sec)
20.0	20.0	6.2×10^{10}	2300	0.24	5200

Table 2 The number of total node point and element used in finite element analysis for each element size

	Element size	Node number	Element number
Case 1	1 cm×1 cm	441	400
Case 2	2/3 cm×2/3 cm	961	900
Case 3	0.5 cm×0.5 cm	1681	1600
Case 4	0.4 cm×0.4 cm	2601	2500
Case 5	1/3 cm×1/3 cm	3721	3600

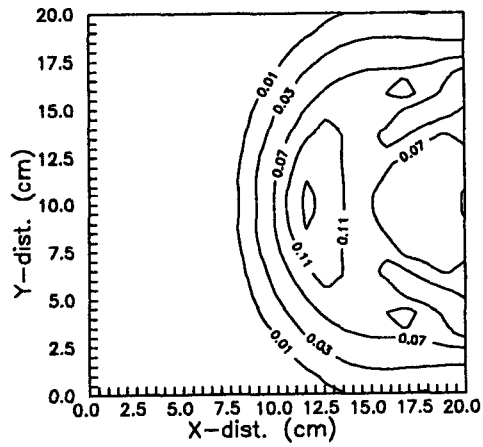
3. 결과 및 검토

식(2)의 이론해로부터 응력파 선단이 법선방향여 현성분 $l=\cos\theta$, $m=\sin\theta$의 값을 가지므로, 동하중에 의해 응력파의 선단은 응력파의 진행방향에 법선방향으로 c의 속도를 가지고 평행 이동하는 형태로 전파됨을 알 수 있다. 또한 식(4)로부터 응력파 강도는 응력파가 진행된 면적에 반비례하여 응력파 강도값이 감소하면서 전파됨을 알 수 있다.

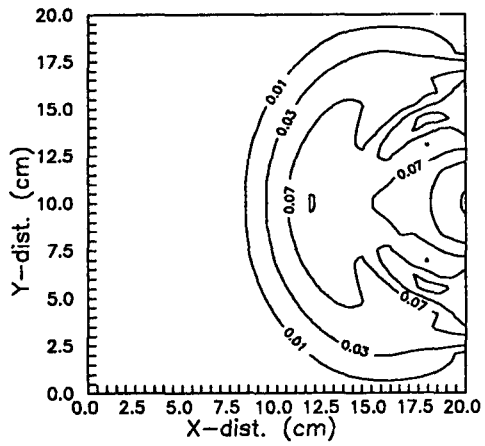
Table 2와 같이 요소를 분할하고 동하중 $F_{xy}(t)$를 가하여 유한요소해석을 수행한 결과는 다음과 같다. 시간증분 간격이 1.92×10^{-6} sec인 경우, 각각의 경우에 대하여 시간이 19.2 μsec 경과한 후 시간의 변화에 따라 평판에 전파되는 응력파의 양상은 Fig. 2와 같다. 위의 결과는 응력파가 이론해석 결과와 같은 응력파 전파속도 c를 가지고 응력파 선단에 대해 법선방향으로 평행 이동함을 알 수 있으며, 응력파 선단이 하중점으로부터 거의 같은 반경을 가지고 있음을 보이고 있으나, 각각의 경우에 대해 응력파의 선단이 요소분할 크기만큼 전위되는 현상을 볼 수 있다. 이와 같은 현상은 요소분할 크기에 따른 해석상의 초기 오차인 것으로 판단된다.

Fig. 3은 시간증분 간격이 1.92×10^{-7} sec인 경우, 각각의 경우에 대하여 시간이 19.2 μsec 경과한 후 평판에 전파되는 응력파의 유한요소해석 결과이다. 위의 결과는 응력파의 전파속도가 이론해석결과와 일치하지 않으며, 각 시간에 대한 응력파 선단이 하중점으로부터 같은 반경을 갖지 못하고, 응력파가 요소의 크기에 관계없이 불규칙적으로 전파되는 양상을 볼 수 있다. 또한 응력파의 전파형태는 응력파 선단에 법선방향으로 팽창 이동하지 않음을 알 수 있다.

따라서 유한요소해석시 시간증분은 임계값(Δt_{cr})을 사용하는 것이 해석의 신뢰성을 가질 수 있을 것으로 판단되므로, 시간증분 간격이 1.92×10^{-6} sec인 경우에 대하여 하중 작용선상에 전파되는 응

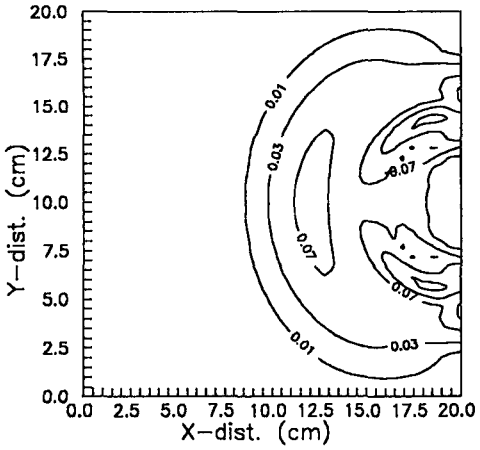


(a) Case 1

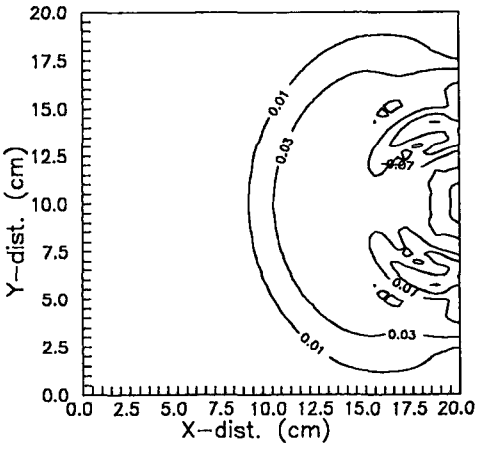


(b) Case 2

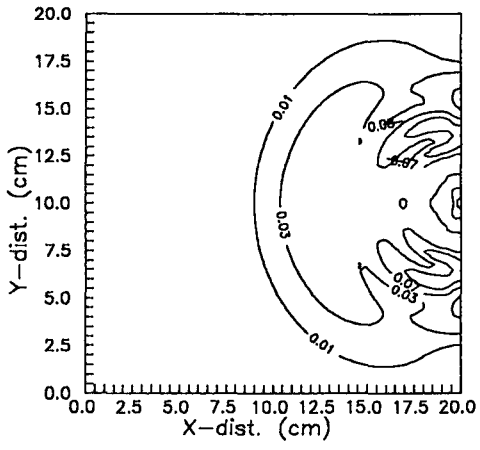
Fig. 2 Continued



(c) Case 3

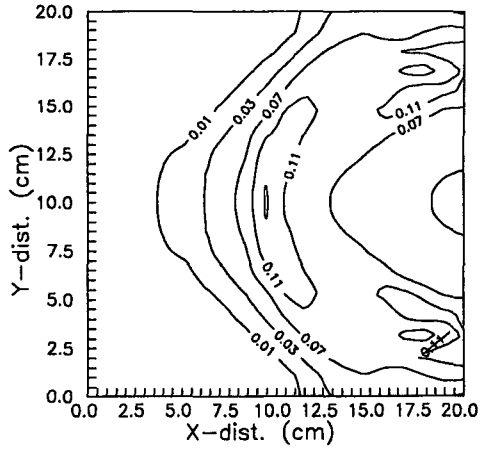


(d) Case 4

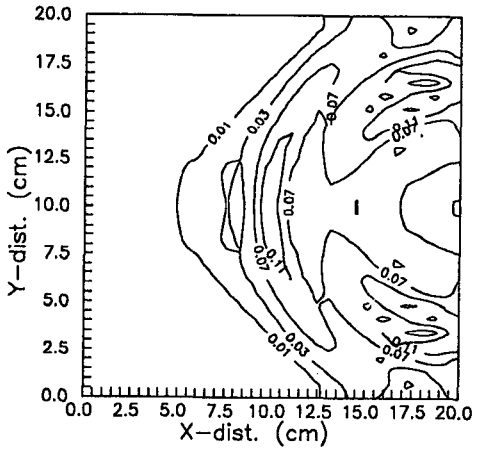


(e) Case 5

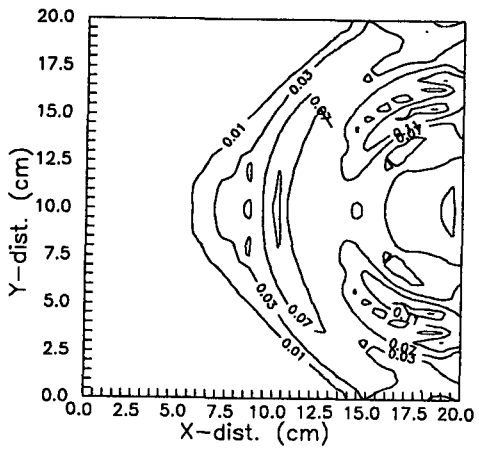
Fig. 2 Iso-stress contour of stress wave propagation for each case at time t=19.2 μsec (time step= 1.92×10^{-6} sec)



(a) Cose 1

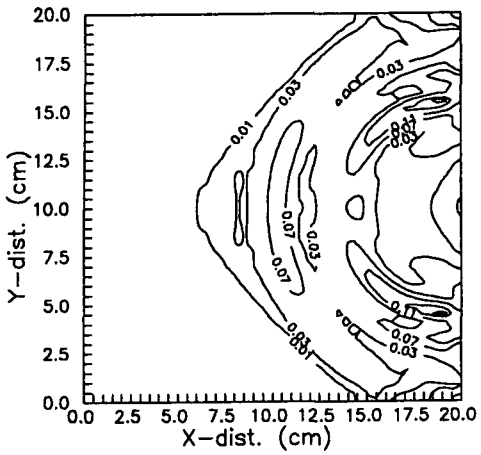


(b) Case 2

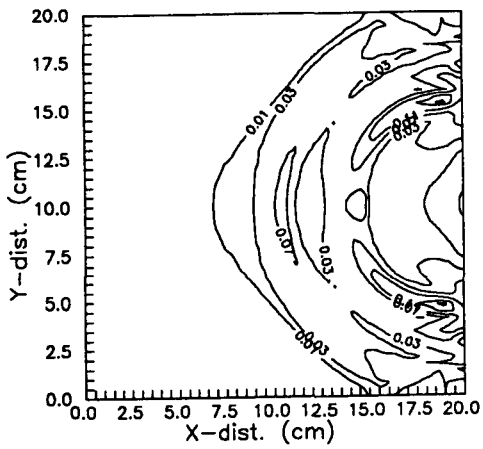


(c) Case 3

Fig. 3 Continued



(d) Case 4



(e) Case 5

Fig. 3 Iso-stress contour of stress wave propagation for each case at time t=19.2 μsec (time step= 1.92×10^{-7} sec)

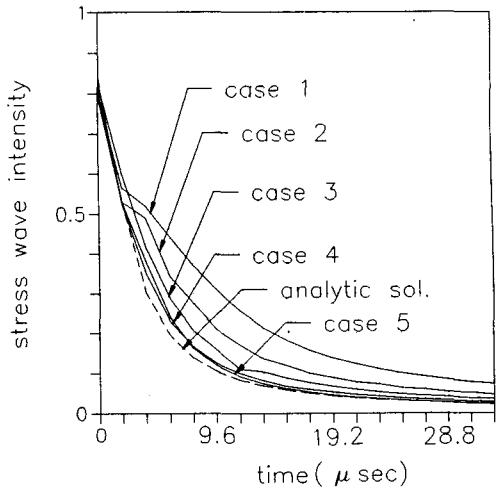


Fig. 4 Decrease of stress wave intensity for stress wave propagation

력파의 강도는 Fig. 4에 보인 바와 같다. 이때 요소의 크기에 따른 최대 응력파 강도값의 오차는 다음 Table 3과 같다.

응력파 전달에 대한 유한요소해석 조건으로써 시간증분 간격은 시간증분의 임계값으로 하고, 요소의 크기는 응력파 전파속도와 시간증분의 곱보다 작게하는 것이 해석의 정확도와 신뢰성을 가질 수 있을 것으로 판단된다. 한편 Fig. 2의 결과로부터 하중 작용선상에 대해 45° 방향으로 종파속도의 1/2에 해당하는 전단파(shear wave)가 발생하여 전파함을 알 수 있다. 이상과 같은 유한요소해석결과의 실험적 검증은 응력파 가시화의 어려움으로 인하여 Shimomura & Date에 의해 발표된 Fig. 5의 실험결과와 비교하여 본 결과, 유한요소 해석결과와 실험결과가 응력파의 전달형태 등 정성적으로 거의 일치함을 알 수 있다.

위의 결과로부터 유한요소해석에 의한 응력파의 전파형태가 실험결과와 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 따라서 2차원 응력파 전파에 대한 유한요소해석을 수행할 경우, 시간증분은 시간증분의 임계값

Table 3 The error percent of stress wave intensity for each element size

	Element size	Maximum error(%)
Case 1	1 cm×1 cm	17.0
Case 2	2/3 cm×2/3 cm	9.9
Case 3	0.5 cm×0.5 cm	7.66
Case 4	0.4 cm×0.4 cm	5.28
Case 5	1/3 cm×1/3 cm	4.37

(a) Time=4.25 μsec

(b) Time=7.25 μsec

Fig. 5 Visualized result of simulated stress wave[13]

(Δt_{cr})으로 하고 요소의 크기는 응력파의 전파속도(c)와 시간증분의 임계값의 곱($\Delta t_{cr} \times c$)보다 작게 함으로써 유한요소해석의 신뢰성 및 정확도를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서 충격하중에 의한 응력파의 전파 양상을 고찰하고자 유한요소 프로그램을 개발하였으며, 그 정확도와 신뢰성에 대하여 고찰하고, 시간의 흐름에 따라 형성되는 응력장의 크기 및 응력파의 강도를 고찰한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 유한요소법에 의해 구한 응력파의 전파속도 및 전파형태가 시간증분(Δt)이 시간증분의 임계값 Δt_{cr}이고, 요소의 크기가 응력파의 속도와 임계 시간증분의 곱($c\Delta t_{cr}$)보다 작을때 이론해석에 의해 구한 응력파의 속도 및 전파형태와 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

(2) 응력파의 전파속도는 요소의 크기에 관계없이 일정한 값을 보이고 있지만 응력파의 강도는 요소의 크기를 작게 할수록 해석의 정확도와 신뢰성을 높일 수 있다. 이상과 같이 유한요소해석의 정확도와 신뢰성을 검증한 유한요소해석과 응력파의 전파를 가시화시킨 실험결과가 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

(3) 유한요소해석 결과는 실험결과와 동일하게 응력파는 충격하중이 작용하는 방향과 같은 방향으로 종파가 진행하고 종파의 진행방향에 약 45° 방향으로 전단파(shear wave)가 종파속도의 약 $\frac{1}{2}$의 크기를 가지고 진행함을 알 수 있다.

참고문헌

(1) Kolsky, H. 1963, *Stress Waves in Solids, New York*, Dover Publications Inc.

(2) Manolis, G. D., and Beskos, D. E., 1981, "Dynamic Stress Concentration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform," *Int. J. Num. Mech. Engineering*, Vol. 17, pp. 244~259.

(3) Manolis, G. D., 1983, "A Comparative Study on Three Boundary Element Method Approaches to Problems in Elastodynamics," *Int. J. Num. Mech. Engineering*. Vol. 19, pp. 73~91.

(4) Mansur, W. J. and Brebbia, C. A., 1982, "Formulation of the Boundary Element Method for Transient Problems Governed by the Scalar Wave Equation," *Applied Mathematics Modelling*, Vol. 6, pp. 307~311.

(5) Dohner, J. L., Shoureshi, R. and Bernhard, R. J., 1987, "Transient Analysis of Three-Dimensional Wave Propagation Using Boundary Element Method," *Int. J. of Numerical Methods Eng.*, Vol. 24, pp. 621~634.

(6) Givoli, D., 1988, "A Finite Element Method for Large Domain Problems," Ph. D. Thesis, Stanford University, May.

(7) Ahner, J. F. and Hsiao, G. C., 1975, "A Neumann Series Representation for Solutions to Boundary-Value Problems in Dynamic Elasticity," *Quart. J. Appl. Math*, pp. 78~80.

(8) Costabel, M. and Stephan, E. P., 1987, "Coupling of Finite Elements and Boundary Elements for Transmission Problems of Elastic Waves,"

Symposium on Advanced Boundary Element Methods, San Antino, Cruse et al.

(9) Stratton, J. A. 1941, *Electromagnetic Thoery,* McGraw-Hill, New York, pp. 131~133.

(10) Reddy, J. N. 1984, *An Introduction to the Finite Element Methods,* McGraw-Hill Book Company, pp. 299~307.

(11) Kikuchi, N. 1985, "Finit Element Methods in Mechanics," Cambridge University Press, p. 297.

(12) Bickford, W. B. 1990, *A First Course in the Finite Element Method,* Richard D. Irwin, Inc., pp. 406~470.

(13) Keiichi Shimomura and Kazuhiro Date, 1988, "Simulation of Acoustic Emission by Photoelastic Visualization Technique," *The Japanese Society for NDI,* pp. 133~139.