

(論 文)

여유자유도 로봇의 기구학, 동역학 및 제어를 위한 확장실공간 해석

장평훈* · 박기철** · 김승호***

(1994년 7월 22일 접수)

Extended Operational Space Formulation for the Kinematics, Dynamics, and Control of the Robot Manipulators with Redundancy

Pyung H. Chang, Ki C. Park and Seung H. Kim

Key Words : Redundant Robot(여유자유도 로봇), Extended Operational Space(확장실공간), Kinematics(기구학), Statics(정역학), Dynamics(동역학), Control(제어)

Abstract

In this paper a new concept, named the Extended Operational Space Formulation, has been proposed for the effective analysis and real-time control of the robot manipulators with kinematic redundancy. The extended operational space consists of operational space and optimal null space. The operational space is used to describe robot end-effector motion; whereas the optimal null space, defined as the tangent space of the self motion manifold, is used to express the self motion for the secondary tasks. Based upon the proposed formulation, the kinematics, statics, and dynamics of redundant robots have been analyzed, and an efficient control algorithm has been proposed. Using this algorithm, one can optimize a performance measure while tracking a desired end-effector trajectory with a better computational efficiency than the conventional methods. The effectiveness of the proposed method has been demonstrated with simulations.

1. 서 론

여유자유도 로봇은 주어진 작업의 수행에 필요한 자유도 보다 더 많은 자유도를 가진 로봇이다. 예를 들어, 3차원 공간에서 로봇말단(end-effector)의 위치와 방향을 결정하기 위해서는 6자유도가 필요하게 되는데, 이때 6자유도 보다 더 많은 자유도를 가진 로봇은 3차원 공간에서 기구학적인 여유

자유도를 갖게 되는 것이다.

여유자유도 로봇은 주어진 말단의 위치에 대해 무수히 많은 관절의 해를 갖는데, 그 해가 모여 매니폴드(manifold)를 형성한다. 이 매니폴드를 따라 관절을 움직이면, 여유자유도 로봇은 말단은 고정된 채 자세(configuration)를 바꿀 수 있는데, 이를 자체운동(self motion)이라 하고 그 매니폴드를 자체운동 매니폴드라고 한다.⁽¹⁾ 인간이 여러 복잡하고 어려운 작업을 수행하면서 보여주는 놀라운 능숙성과 다양성도 바로 팔의 자체운동에 기인하는 바가 크다.

이러한 자체운동을 이용해서 여유자유도 로봇은

*정회원, 한국과학기술원 정밀공학과

**한국과학기술원 대학원 정밀공학과

***정회원, 한국원자력연구소

특이점 회피, 관절한계 회피, 장애물 회피, 그리고 관절토크의 최적화 등 다양한 성능지수를 최적화하며 복잡하고 정교한 작업을 능수능란하게 처리할 수 있다.⁽²⁾ 또한 자세에 따라 말단에서의 특성이 변하는 점을 이용해서 작업에 따라 적절한 특성을 말단에 부여할 수 있는 장점을 갖고 있다. 예로써 충돌시 말단의 유효질량을 최소화함으로써 충격을 줄이는 점 등을 들 수 있다.^(3,4)

그러나 주어진 작업에 대해 무수히 많은 관절운동을 선택할 수 있다는 점은 여유자유도 로봇의 제어를 어렵게 만드는 요인이기도 하다. 따라서 이러한 여유자유도 로봇의 능력을 충분히 이용하기 위해서는 효과적인 제어 알고리즘이 개발되어야 한다. 그런데 여유자유도 로봇의 운동특성은 크게 말단운동과 자체운동으로 표현되므로 효과적인 제어를 위해서는 말단운동과 자체운동에 대한 기구학적, 동역학적 특성에 대한 해석이 요구된다. 즉 말단운동과 자체운동 각각의 기구학, 동역학 및 서로의 동역학적 결합, 그리고 자체운동에 따른 자세의 변화로 말단에서의 여러 특성들이 어떻게 나타나는지를 파악하는 것이 요구된다.

지금까지 많이 연구가 되어 온 관절공간의 기구학과 동역학을 이용한 방법들⁽²⁾에서는 이러한 특성들이 잘 드러나지 않는다. 이에 대해 Khatib⁽⁵⁾는 말단운동의 관점에서 기구학, 정역학 및 동역학적 해석을 통해 실공간(operational space)의 운동법칙을 제안하고, 여유자유도 로봇의 제어에도 이용될 수 있음을 보였다. 그러나 이 방법에는 자체운동에 대한 고려가 없었다.

따라서 말단운동과 자체운동에 대한 여유자유도 로봇의 운동 특성을 효과적으로 나타내기 위해서는 실공간의 개념보다 좀 더 포괄적인 표현이 요망된다. 본 논문에서는 이러한 포괄적인 표현을 제안하고자 하는데 그 핵심이 있다. 상술하면, 먼저 말단운동을 표현하는 실공간과 자체운동의 영공간을 합쳐 확장실공간(extended operational space; 이하 EXOS)이라 정의하고, 이를 바탕으로 하여 말단운동과 자체운동의 관점에서 여유자유도 로봇의 기구학, 정역학, 동역학의 해석 및 제어의 모든 영역을 일관되게 수행하고자 한다. 그리고 이러한 포괄적인 표현을 이용하여 여유자유도 로봇을 비여유자유도 로봇과 같은 구조로 다룰 수 있도록 하는 것도 주목적의 하나이다.

한편, Seraji⁽⁶⁾는 말단운동에 여유자유도 만큼의

부가조건을 추가해서 확장한 작업공간에서 여유자유도 로봇의 기구학과 동역학을 해석하고 제어방법을 제안한 바 있다. 그런데 이 방법은 기구학과 동역학에 부가조건을 정보를 요구하므로, 부가조건에 따라 기구학과 동역학이 달라지게 된다. 이와는 달리 본 논문에서 제안된 방법은 부가조건과는 별개로 자체운동을 표현해 줄 수 있으므로, 부가조건이 달라져도 그 기구학 및 동역학은 변하지 않는다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2절에서는 확장실공간을 정의하고, 확장실공간 자코비안 및 그 특성에 대해 다룬다. 다음 3절에서는 확장실공간의 관점에서 성능지수를 최적화하는 기구학적 제어 알고리즘을 제안하고 기존의 방법과의 관계를 보인다. 4절에서는 제안된 알고리즘의 유효성을 시뮬레이션을 통해 나타낸다. 5절에서는 확장실공간의 정역학과 동역학을 다룬다. 6절에서는 동역학적 제어 알고리즘을 제안하고, 기존의 방법 중 두 가지 방법과 비교를 한 후 시뮬레이션에 적용한다. 그리고 7절에서는 결론을 내린다.

2. 확장실공간

여유자유도 로봇 매니플레이터의 기구학식은

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) \quad (1)$$

으로 주어진다. 여기서, \mathbf{x} 는 매니플레이터 말단의 위치를 표현하는 m -차원 벡터이고, $\boldsymbol{\theta}$ 는 관절각도를 나타내는 n -차원 벡터이다. 그리고 \mathbf{f} 는 m 스칼라 함수로 된 벡터 함수이며, $m < n$ 이다.

여유자유도 로봇은 주어진 로봇말단 위치에 대해 무수히 많은 자세를 가질 수 있는데, 이때 관절각도의 구성은

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^n : \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}\} \quad (2)$$

으로 표현될 수 있다.⁽¹⁾ 여기서, $\boldsymbol{\psi}$ 는 자체운동 매니폴드를 구성하게 되고, 그 차원은 $n-m$ 으로 여유자유도 만큼의 차원이 된다. 이때 주어진 m 개의 말단 위치에 대한 자체운동 매니폴드 상에서 $n-m$ 개의 자체운동 파라미터를 도입하면, 로봇의 자세를 결정할 수 있게 된다. 결국 성능지수에 대한 최적의 자세는 자체운동 매니폴드 상에 있게 되고, 이는 자체운동 파라미터의 특정 값에 해당하게 된다.

그러나 자체운동 매니폴드는 로봇말단의 위치에 따라 변하므로, 자체운동 파라미터를 독립적으로

설정하는 것은 불가능하다. 따라서 이 논문에서는 자체운동 매니폴드 상에서 1차 경사추적(first order gradient search)을 통해 최적의 자세를 찾으려고 한다. 즉 속도수준에서 여유자유도를 분해하는데, 이를 위해 이제 미분기구학 관계를 고려한다.

우선 실공간의 미분기구학을 고려하면, 로봇의 미분기구학식, 또는 자코비안식은

$$\dot{x} = J\dot{\theta} \quad (3)$$

으로 주어진다. 여기서 (\cdot) 은 시간에 대한 미분을 의미하고, $J = \frac{\partial f}{\partial \theta} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 은 자코비안 행렬이다. 자코비안식은 n -차원 벡터 관절속도 공간에서 m -차원 벡터 로봇말단 속도 공간으로의 사상(mapping) 관계를 나타낸다.

다음 자체운동의 미분기구학 관계를 살펴본다. 자체운동 매니폴드의 접선공간(tangent space)에서 기저벡터를 취해 행렬로 표현하고 이를 Z 라 정의한다. 자체운동 매니폴드의 접선공간은 자코비안의 영공간⁽¹⁾이므로 Z 는 J 의 영공간 기저행렬이 된다. 여유자유도 로봇에서는 J 가 관절속도에서 말단속도만을 추출하는 것처럼, 자체운동만을 표현하는 변환 행렬 및 자체운동 속도가 존재한다. 즉 그 변환행렬이 Z 이고, 자체운동 속도는

$$\dot{x}_N \equiv Z\dot{\theta} \quad (4)$$

이 된다. 본 논문에서는 말단운동과 자체운동을 효과적으로 표현하기 위해서, 말단운동을 표현하는 m 차원의 실공간에 $n-m$ 차원의 자체운동 공간을 추가하여 이를 확장실공간이라 정의한다. 그러면 확장실공간 자코비안을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$J_E \equiv \begin{bmatrix} J \\ Z \end{bmatrix} \quad (5)$$

즉 자코비안 행렬에 영공간 기저행렬을 추가한 것이다. 그리고 확장실공간 속도는 실공간 속도에 영공간 속도(자체운동 속도)를 추가해서

$$\dot{x}_E \equiv \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} \quad (6)$$

으로 정의한다. 이제 확장실공간의 미분기구학식은

$$\dot{x}_E = J_E \dot{\theta} \quad (7)$$

으로 표현된다. 주목할 것은 여유자유도 로봇의 기

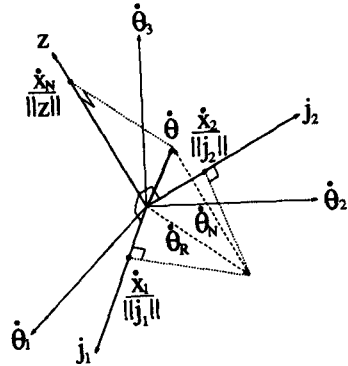


Fig. 1 EXOS kinematic relationship in the joint velocity space

구학식이 비여유자유도 로봇의 기구학식과 같은 표현을 갖고 있다는 것이다.

제한된 개념의 효과를 보다 쉽게 나타내기 위해, 평면 3자유도 매니플레이터의 경우에 대해서 살펴 보도록 한다. 즉 $n=3, m=2$ 인 경우, 자코비안 행렬과 영공간 기저행렬은

$$J = \begin{bmatrix} j_1^T \\ j_2^T \end{bmatrix}, Z = z^T \quad (8)$$

으로 표현된다. Fig. 1은 관절속도공간에서 자코비안의 행공간 기저벡터와 영공간 기저벡터, 관절속도, 그리고 정미분기구학(forward differential kinematics) 관계를 나타내고 있다.

$$\dot{x}_1 = j_1^T \dot{\theta}, \dot{x}_2 = j_2^T \dot{\theta}, \dot{x}_N = z^T \dot{\theta} \quad (9)$$

즉 j_1 과 j_2 의 두 벡터로 이루어진 평면은 로봇 말단의 운동을 표현하는 공간이 되고, 관절속도를 이 공간에 투영한 성분($\dot{\theta}_R$)만이 로봇말단의 운동에 기여하게 된다. 관절속도에서 투영된 속도성분을 뺀 나머지 성분($\dot{\theta}_N$)은 로봇의 자체 운동에 기여하는 성분인데, 이 성분은 j_1 와 j_2 의 선형결합으로는 나타낼 수가 없다. 이 경우 이 평면에 수직인 벡터인 z 는 바로 그 성분만을 추출하고, 로봇의 자체운동만을 나타내게 된다.

이제 일반적인 경우로 확장해서 확장실공간 자코비안의 의미를 고려해본다. 자코비안 행렬에 의해 관절공간과 실공간은 Fig. 2에서 보는 것과 같이 구분된다.⁽⁷⁾ 우선 J 의 열공간(column space)은 로봇말단의 속도를 표현하는 공간으로 실공간을 의미한다. 그리고 관절속도 공간은 서로 직교하는 J 의 행공간(row space)과 영공간(null space)으로 나눌

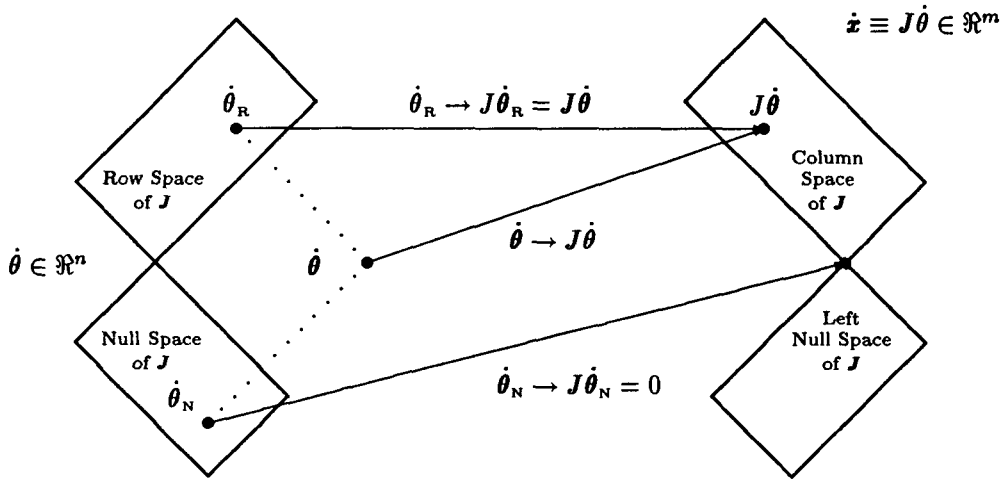


Fig. 2 The role of matrix J

수 있다. 행공간의 관절속도, $\dot{\theta}_R$ 는

$$J\dot{\theta}_R = \dot{x} \tag{10}$$

으로 로봇말단 속도에 영향을 주지만, 영공간의 관절속도 ($\dot{\theta}_N$)는

$$J\dot{\theta}_N = 0_m \tag{11}$$

으로 전혀 영향을 주지 않는다. 이것이 자코비안 행렬 J의 역할이다. 반면 Fig. 3에서 보는 것과 같이 행렬 Z는 말단속도를 일으키는 J의 행공간의 관절속도를

$$Z\dot{\theta}_R = 0_r \tag{12}$$

으로 만들고, 영운동을 일으키는 J의 영공간의 관절속도를

$$Z\dot{\theta}_N = \dot{x}_N \tag{13}$$

으로 추출한다.

즉, n차원의 관절속도는 J와 Z에 의해 m차원의 로봇말단 속도와 n-m차원의 영공간속도로 각각 완전히 분해가 되므로, 확장실공간을 통해 말단운동과 자체운동이 효과적으로 표현됨을 알 수 있다.

한편, 영공간 변환행렬 Z를 구하는 방법은 아래와 같다. Z는 그 행공간이 J의 행공간에 수직인 행렬이므로, J와 Z의 관계는 다음과 같다.

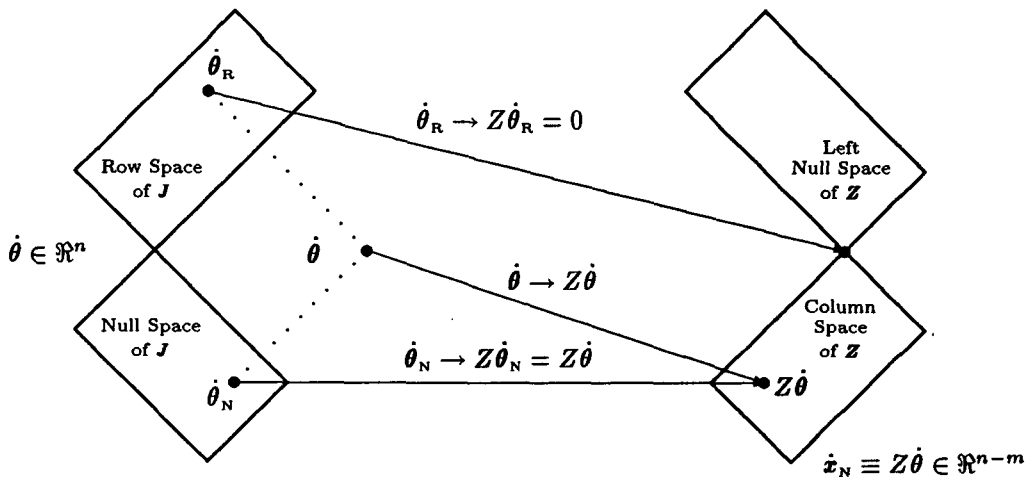


Fig. 3 The role of matrix Z

$$\mathbf{Z} \mathbf{J}^T = \mathbf{0} \quad (14)$$

여기서, \mathbf{Z} 를 찾는 일반적인 방법은 Chang⁽⁹⁾에 의해 다음과 같이 해결되었다. 일반성의 손실없이, \mathbf{J} 는 다음과 같이 두 행렬, \mathbf{J}_m 과 \mathbf{J}_{n-m} 로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_m^T : \mathbf{J}_{n-m}^T] \quad (15)$$

로봇이 기구학적인 특이점에 있지않고, \mathbf{J}_m 이 특이행렬이 아니라면, \mathbf{Z} 는 다음과 같이 닫힌형(closed-form)으로 구해진다.

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{J}_{n-m} \text{Adj}(\mathbf{J}_m) : -\det(\mathbf{J}_m) \mathbf{I}_{n-m}] \quad (16)$$

여기서, $\text{Adj}(\cdot)$ 는 adjoint 행렬을 의미하고, $\det(\cdot)$ 는 행렬식(determinant)을 나타낸다.

무엇보다도 \mathbf{Z} 가 \mathbf{J} 와 마찬가지로 수치적인 방법이 아닌 기호형(symbolic form)으로 구하는 것이 가능하다는 점은 주목할 만하다. 많은 경우 여유자유도 로봇은 한 두 개의 여유자유도를 갖고 있는데, 이 경우 \mathbf{Z} 의 기호형은 간단하게 나타난다. 따라서 계산량의 관점에서 볼 때, 수치적인 방법을 이용하는 것보다 기호형을 이용하는 것이 보다 효율적일 수 있다. 예로써 PUMA형의 6축 로봇에다 팔꿈치와 손목 사이에 직선운동 관절을 추가한 7축 로봇⁽¹⁰⁾을 고려할 수 있다. 이때, 자코비안행렬, \mathbf{J} 은 다음과 같이 기호형으로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_2 C_{23} & l_2 S_3 + a_3 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 S_{23} + l_2 C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_3 S_{23} & -l_2 C_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -S_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_4 & C_4 S_5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & C_4 & S_4 S_5 \\ C_{23} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & C_5 \end{bmatrix} \quad (17)$$

그리고 식(16)에 따라 \mathbf{Z} 를 구하면 아래와 같은 간단한 기호형으로 표현됨을 확인할 수 있다.

$$\mathbf{Z} = \{0 \ a_3 S_5 \ (l_2 S_3 + a_3) S_5 \ a_3 l_2 C_3 S_5 \ l_2 S_3 S_4 S_5 \ l_2 S_3 C_4 S_5 - l_2 S_3 S_4\} \cdot (a_3 S_{23} + l_2 C_2) \quad (18)$$

일반적으로 확장된 자코비안을 이용하는 방법들은 확장된 자코비안의 행렬식에 의해 특이성이 결정된다. 확장실공간 자코비안의 행렬식은

$$\det(\mathbf{J}_E) = \det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \cdot [\det(\mathbf{J}_m)]^{(n-m-1)} \quad (19)$$

로 나타난다. (증명은 부록 참조) 특히 여유자유도가 하나($n-m=1$)일 때는 다음과 같이 간단하게

표현된다.

$$\det(\mathbf{J}_E) = \det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \quad (20)$$

확장실공간 자코비안이 특이행렬이 되는 상황은 $\det(\mathbf{J}_E) = 0$ 인 경우이다. 따라서 기구학적인 특이점 ($\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) = 0$)에서는 당연히 확장실공간 자코비안이 특이행렬이 된다. 그리고 $n-m > 1$ 인 경우에는 $\det(\mathbf{J}_E) = 0$ 인 상황도 특이점이 될 수 있지만, 이 경우에는 다음과 같은 사항을 고려해야 한다.

\mathbf{J}_m 은 \mathbf{Z} 를 구성할 때, 편의상 대표적으로 나타낸 \mathbf{J} 의 마이너행렬로 실제로는 특이하지 않은 모든 마이너행렬을 \mathbf{J}_m 대신해서 이용할 수 있다. 그리고 기구학적 특이점이 아닌 자세에서는 적어도 하나 이상의 특이하지 않은 마이너행렬이 존재한다. 따라서, 확장실공간 자코비안의 경우에는 알고리즘적 특이점이 존재하지 않게 된다.

3. 확장실공간에서의 기구학

본 절에서는 앞 절에서 유도된 확장실공간의 미분기구학식으로부터 새로운 역기구학 방법을 제안하고 기존의 유사한 두가지 방법과의 관계를 보인다. 그리고 시뮬레이션을 통해 제안된 방법의 효과를 확인한다.

3.1 확장실공간 기구학적 방법

확장실공간 기구학을 이용해서 기구학적 제어를 하기 위해서는 원하는 로봇말단 속도와 영공간 속도가 주어져야한다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d \\ \dot{\mathbf{x}}_{Nd} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_E \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (21)$$

여기서, $\dot{\mathbf{x}}_d$ 와 $\dot{\mathbf{x}}_{Nd}$ 는 각각 원하는 로봇말단 속도와 영공간속도를 나타낸다.

여유자유도를 이용해 최적화하고자 하는 성능지수를 H 라 하자. 이러한 목적을 위해서 여기서는 경사투영방법(gradient projection method)을 이용해서 원하는 영공간 속도를 설정한다. 그러면 성능지수의 경사벡터는

$$\mathbf{h} = k_h \nabla H \quad (22)$$

으로 구해진다. 여기서, k_h 는 임의의 상수로 양의 값이면 성능지수의 최대화를, 음의 값이면 최소화를 나타내게된다.

성능지수를 최적화하려면, 경사벡터의 방향으로

관절을 움직여야한다. 그러나 이 운동으로 인해 로봇말단이 움직여서는 안되므로, 자체운동 성분만을 추출해야 한다. 따라서 경사벡터를 영공간으로 사상시키고, 이를 다음과 같이 원하는 영공간속도로 정하면 된다.

$$\dot{x}_{Nd} = Zh \quad (23)$$

이를 식(21)에 대입하면, 다음과 같이 로봇말단체적의 추종과 성능지수의 최적화를 위한 확장실공간의 기구학식을 얻게 된다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_d \\ Zh \end{Bmatrix} = J_E \dot{\theta} \quad (24)$$

그리고 관절속도를 얻기 위해서는 위 식의 양변에 확장실공간 자코비안의 역행렬을 곱하면 된다.

$$\dot{\theta}_d = J_E^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x}_d \\ Zh \end{Bmatrix} \quad (25)$$

즉 비여유자유도 로봇에서 관절속도를 구하는 것과 같은 구조가 된다.

3.2 Resolved Motion 방법과의 관계

Resolved Motion(RM) 방법은 다음과 같이 나타난다.⁽¹¹⁾

$$\dot{\theta}_d = J^+ \dot{x}_d + (I_n - J^+ J) h \quad (26)$$

여기서, $J^+ = J^T (JJ^T)^{-1}$ 은 Moore-Penrose 의사역행렬이고, $(I_n - J^+ J) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 는 영공간 투영 행렬이다. 식(26)의 오른쪽 첫항은 주어진 로봇말단속도를 내는 관절속도의 최소노름(minimum norm) 성분을 나타내고, 둘째항은 성능지수를 최적화하기 위한 영공간의 관절속도를 나타낸다. RM 방법은 가장 일반적인 표현으로, 여유자유도 로봇의 제어를 위해 널리 사용되고 있다.

이제 RM 방법과 확장실공간 방법과의 관계를 살펴보겠다. 다음의 관계식을 고려하자.⁽⁹⁾

$$J^+ = J_E^{-1} \begin{Bmatrix} I_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

그러면 영공간 투영행렬은 다음과 같이 결정된다.

$$I_n - J^+ J = J_E^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ Z \end{Bmatrix} \quad (28)$$

위 두 식을 식(26)에 대입하면, 식(25)를 얻게 된다.⁽⁹⁾

즉, 식(26)과 식(25)는 본질적으로 동등하다. 그

러나 식(25)로 표현되는 확장실공간 방법을 사용함으로써 다음과 같은 중요한 잇점을 얻게 된다.

(1) RM 방법은 영공간 투영행렬의 차원이 $n \times n$ 인데 랭크는 $n-m$ 이므로 필요없는 m 개의 식이 들어 있다. 이에 비해 확장실공간 방법은 영공간 투영행렬을 랭크($n-m$)에 해당하는 항만으로 뚜렷하게 표현할 수 있다. 따라서 그 관계에 대한 명확한 기여도를 알 수 있다.

(2) 영공간 기저행렬인 Z 행렬이 기호형으로 구해지고, 이렇게 미리 구해진 Z 행렬을 이용함으로써 계산량면에서 확장실공간 방법이 보다 효율적이다.⁽⁹⁾

(3) 비여유자유도 로봇과 같은 구조로 일관되게 표현될 수 있다.

따라서 식(25)로 표현되는 확장실공간 방법은 나름대로의 뚜렷한 의미를 갖는다고 볼 수 있다.

이제 여유자유도 로봇의 경기구학을 해결하는데 있어 중요한 논점 중의 하나인 반복성 문제를 고려해본다. 반복성은 로봇말단이 폐경로를 따라 반복작업을 할 때 관절도 역시 폐경로를 따라가는 성질이다. 반복성이 보장되지 않으면, 주어진 로봇말단의 경로에 대한 관절의 경로를 예측할 수 없게 되는 문제점이 발생하게 된다.

이수진과 장평훈⁽¹²⁾은 성능지수의 최적화 필요조건을 만족하는 성능지수 제한계적상에서 그룹을 정의하고, 그룹의 유지 관점에서 반복성 문제를 해석했다. 즉 한 그룹에서는 로봇말단 위치와 관절 위치 사이에 1:1의 관계가 성립되므로, 로봇말단이 폐경로를 따를 때, 초기 그룹을 잘 유지하면 결국 관절도 폐경로를 따르게 된다는 것이다. 지금까지 몇몇 문헌에서 RM형의 방법들이 반복성을 보장하지 않음을 주장했지만, 이는 엄격한 의미에서의 반복성만을 언급한 것이다. 이수진과 장평훈⁽¹²⁾은 반드시 이런 정확한 반복성만이 중요한 것은 아니라고 주장했다. 그들은 초기위치가 성능지수의 최적화 조건을 만족하고 상수 k_n 가 적절하다면, RM형의 방법들도 그룹을 근사하게 잘 유지함을 보이고, 이를 근사한 반복성이 보장된다고 표현했다. 따라서 제안된 방법도 이런 의미에서의 반복성을 보장한다고 할 수 있다.

3.3 Extended Jacobian 방법과의 관계

일반적으로 여유자유도 로봇의 최적화 필요조건식은

$$Z \nabla H = 0 \quad (29)$$

으로 주어진다. ⁽⁶⁾ 이 식을 시간에 대해 미분을 하면

$$0 = J_r \dot{\theta} \quad (30)$$

이 된다. 여기서, $J_r = \frac{\partial Z \nabla H}{\partial \theta}$ 이다. 위 자코비안 식에 위 식을 결합하면

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} = J_e \dot{\theta} \quad (31)$$

이 된다. 여기서, J_e 는 Bailieul의 확장된 자코비안 행렬⁽¹³⁾로

$$J_e = \begin{bmatrix} J \\ J_r \end{bmatrix} \quad (32)$$

이다. 따라서 원하는 관절속도는 위 식에 역을 취함으로써

$$\dot{\theta}_d = J_e^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{x}_d \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

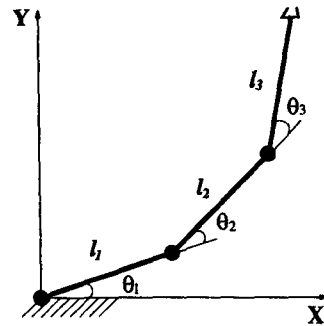
으로 나타난다. 위 식으로 표현되는 Extended Jacobian (EJ) 방법은 개념적으로 간단하지만, J_r 이 매우 복잡한 행렬이므로 계산량이 많아져 기구학적인 제어방법으로는 비효율적인 측면을 갖고 있다. 또한 알고리즘적 특이점에 대한 해석이 복잡하고, 회피가 어렵다는 단점을 갖고 있다. 이에 비해 확장실공간 자코비안은 당연히 계산량이 훨씬 적을 뿐만 아니라 2절에서 보인 바와 같이 알고리즘적 특이점에 대한 문제가 없다는 잇점을 갖고 있다.

3.4 시뮬레이션

본 절에서는 확장실공간의 관점에서 제안된 기구학적 제어 알고리즘을 평면 3축 여유자유도 매니플레이터에 적용하는 시뮬레이션을 한다. 우선 로봇 말단은 움직이지 않고, 성능지수를 최적화하는 자체운동이 일어나는 것을 보인다. 다음 로봇 말단이 실공간에서 원체적을 추종할 경우에도 자체운동을 통해 성능지수의 최적화가 일어남을 보이려한다.

시뮬레이션에 이용되는 매니플레이터는 Fig. 4에서 보는 것처럼 평면 3축 로봇 매니플레이터로 각 링크의 길이는 1m, 질량은 12kg, 관절에서 질량 중심까지의 길이는 0.5m, 그리고 질량중심에서의 관성은 $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 이다.

자체운동을 위해서는 특이점 회피를 위한 성능지수로 널리 쓰이는 다음과 같은 조작성능지수(manip-



All the links have the same properties.
 Link length is 1m.
 Link mass is 12kg.
 Length from the joint to the center of mass is 0.5m.
 Link inertia is $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Fig. 4 3 joint planar robot manipulator for simulation

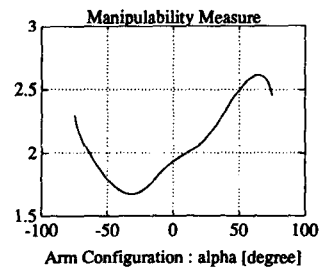


Fig. 5 Manipulability measure for the solution configurations when the location of end-effector is $(x, y) = (2, 0)$. The arm configuration is represented by α , which is $\alpha = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$. The maximum of manipulability measure is obtained at about $\alpha = 65^\circ$

ulability measure)⁽¹⁴⁾를 이용한다.

$$H = \sqrt{\det(JJ^T)} \quad (34)$$

우선 로봇말단은 $(x, y) = (2, 0)$ 에 있다고 하자. 제어 목적은 말단은 그 위치를 유지하게 한 채, 성능지수를 최적화시키는 것이다.

Fig. 5는 모든 가능한 로봇의 자세에 대한 조작성능지수를 나타낸다. 자세는 elbow-up 자세에 대해 $\alpha = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ 로 표현했다. 즉 $f(\theta) = x$ 를 만족하는 무수히 많은 해가 존재하는데, 이 해는 마지막 링크의 방향에 구속을 주면, 한 쌍의 해(elbow-up 또는 elbow-down)로 표현되므로, α 를 이용하면, 미리 모든 해 자세를 설정할 수 있게 된

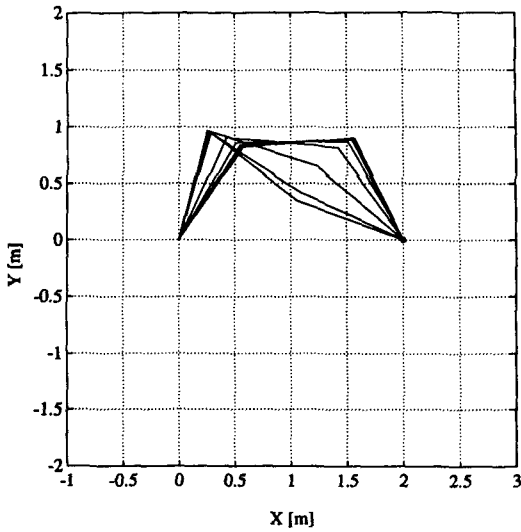


Fig. 6 Self-motion for the proposed kinematic control algorithm when initial configuration is $\alpha = 20^\circ$. Here α is defined as $\alpha = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

다. 이 경우, $\alpha \cong 65^\circ$ 에서 성능지수가 최대가 됨을 알 수 있다.

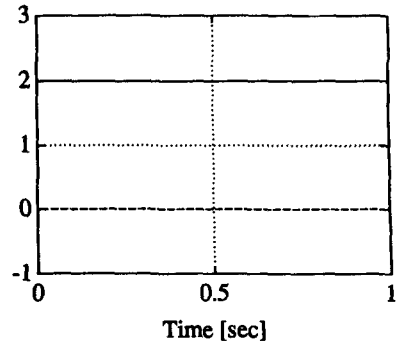
Fig. 6은 초기 자세가 $\alpha = 20^\circ$ 인 상태에서 $k_h = 20$ 으로 제안된 방법에 의해 제어한 경우, 로봇의 자세변화를 보여준다. 로봇말단은 고정된 채, 자체운동을 통해 조작성능지수가 최대인 자세로 이동함을 볼 수 있다. 이에 대한 제어응답은 Fig. 7에 나타난다. Fig. 7(a) 로봇말단의 위치는 초기 위치를 계속 유지하고 있고, Fig. 7(b) 관절의 위치는 초기위치에서 벗어나 다른 어떤 값으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이때 관절위치는 자체운동 매니폴드를 따라 이동하는 것임을 알 수 있다. 그리고 Fig. 7(c) 조작성능지수, H 가 Fig. 6에서 나타난 최대값으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이는 제안된 알고리즘이 정확히 작용되었음을 보여주는 것이다.

이제 원하는 로봇말단의 작업이 다음과 같이 반복적인 경로로 주어진다 고 하자.

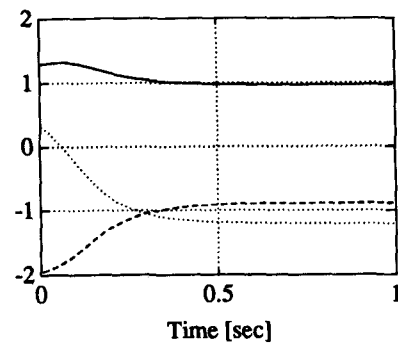
$$x_d(t) = 1 + \sin(2t), \quad y_d(t) = 1 + \cos(2t)$$

이것은 중심이 $(x, y) = (1, 1)$ 에 있고, 반지름이 1 m인 원궤적을 나타낸다. 초기 자세는 성능지수에 관계없이 임의로 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (90^\circ, 0^\circ, -90^\circ)$ 에 있다고 하자.

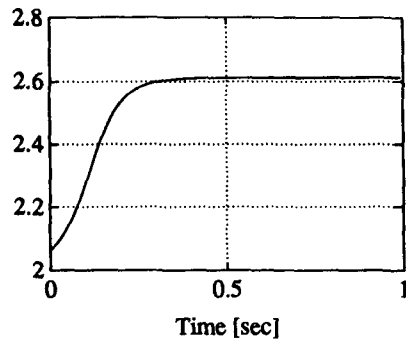
$k_h = 100$ 일 때, 제안된 제어법칙에 의한 결과가



(a) End-effector trajectory [m]



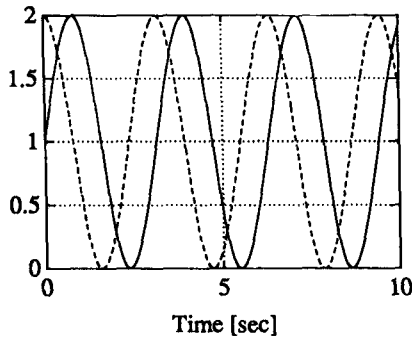
(b) Joint Trajectory [rad]



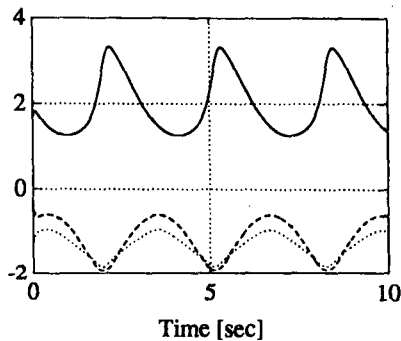
(c) Performance measure

Fig. 7 Self-motion responses for the proposed kinematic control algorithm when initial configuration is $\alpha = 20^\circ$. (a) x (solid), y (dashed). (b) θ_1 (solid), θ_2 (dashed). (c) H

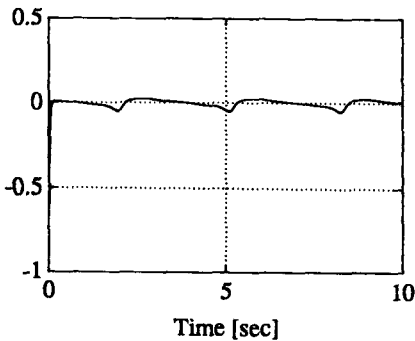
Fig. 8에 나타난다. Fig. 8(a)는 로봇말단이 주어진 궤적을 잘 따라감을 보여주고, Fig. 8(b)는 관절경로를 보여준다. 이때 관절의 경로가 초기에는 최적화된 자세에서 벗어나 있었기때문에, 최적의 자세로 가기위한 일시적인 움직임이 있음을 볼 수 있다. 그 이후에는 근사한 반복성을 보임을 알 수 있다. Fig. 8(c)는 성능지수의 최적화 정도를 보여주



(a) End-effector trajectory [m]



(b) Joint trajectory [rad]



(c) Optimization measure

Fig. 8 Trajectory-motion responses for the proposed kinematic control algorithm. (a) x (solid), y (dashed). (b) θ_1 (solid), θ_2 (dashed), θ_3 (dotted). (c) ϵ_N . (d) ZVH

는 것으로 식(29)의 최적화 필요조건을 정확히 만족하지는 못하지만, $\|ZVH\|$ 값이 어느정도 한계값 내에서 있음을 알 수 있다. 즉 한계 최적화를 보장한다고 볼 수 있다.

Fig. 9에서는 시간 $t=7$ sec에서 $t=10$ sec까지 로봇의 자세를 보여주는데, 조작성능지수의 최적화

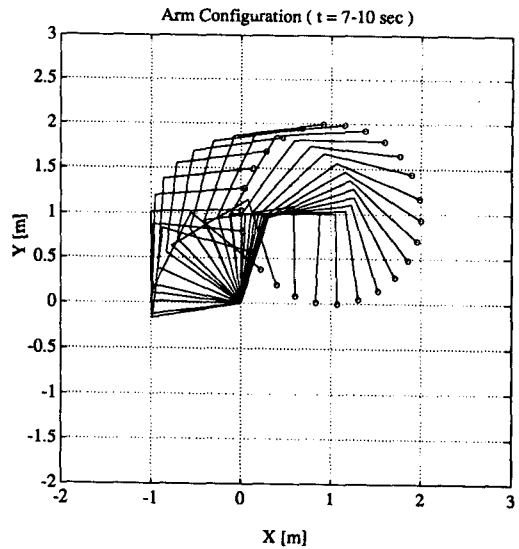


Fig. 9 Trajectory-motion for the proposed kinematic control algorithm during $t=7\sim 10$ sec

특성에 맞는 좋은 자세들이 나타났다. 이로써 로봇 말단의 움직임이 있을 경우에도 제안된 알고리즘이 좋은 성능을 보임을 알 수 있다.

4. 확장실공간에서의 정역학과 동역학

이 절에서는 확장실공간의 관점에서 해석한 정역학과 동역학을 다룬다.

4.1 확장실공간 정역학

일반적으로 정역학적인 관계는 가상일(virtual work)의 원리로부터 구할 수 있다. 여기서는 여유자유도 로봇의 경우도 가상일의 원리를 이용해서 확장실공간에서의 정역학적인 관계를 유도할 수 있음을 보일 것이다.

우선 영공간 변위, δx_N 를 만드는 힘(자체운동을 유발하는 힘)이 존재한다고 가정하고, 이 힘을 영힘(null force), F_N 이라 정의하자. 여유자유도 로봇이 완전한 평형상태를 유지하기 위해서는 실운동 방향 뿐만아니라 자체운동 방향의 가상변위에 대해서도 가상일을 하는 힘이 존재해야 한다. 가상일은

$$\delta W = \tau \cdot \delta \theta - F \cdot \delta x - F_N \cdot \delta x_N = 0 \quad (35)$$

이다. 여기서, (\cdot) 은 벡터의 내적을 의미한다. 이 식은 또한 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\tau^T \delta \theta = F^T \delta x + F_N^T \delta x_N \quad (36)$$

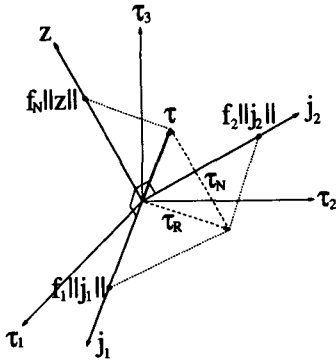


Fig. 10 EXOS static relationship in the joint torque space

확장실공간 자코비안의 정의에 의해 $\delta x_E = J_E \delta \theta$ 이므로, 이를 대입하고 전치를 시키면,

$$\begin{aligned} \tau &= J^T F + Z^T F_N \\ &= J_E^T F_E \end{aligned} \quad (37)$$

의 관계를 얻게된다. 여기서

$$F_E = \begin{Bmatrix} F \\ F_N \end{Bmatrix} \quad (38)$$

이다. Fig. 10은 평면 3자유도 로봇의 경우에 대해 확장실공간 정역학의 관계를 관절토크공간에서 나타내고 있다. 또한 이는 확장실공간에서의 제어입력을 관절토크로 변환해주는 관계를 보여준다. 결국, 식(7)과 식(37)은 비여유자유도 로봇의 경우와 유사하게, 확장 실공간의 기구학과 정역학에서도 이중성(duality)이 존재함을 보여준다.

4.2 확장실공간 동역학

일반적으로 로봇의 관절공간 동역학은 다음과 같이 표현된다.

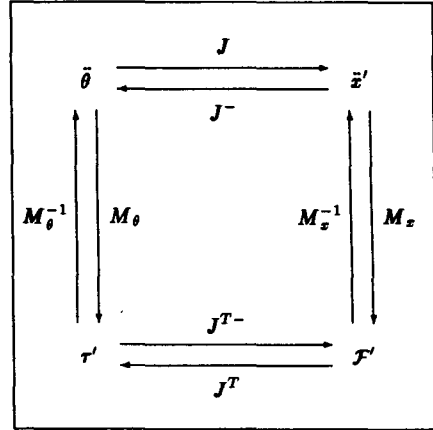
$$\tau = M_\theta(\theta) \ddot{\theta} + N_\theta(\theta, \dot{\theta}) \quad (39)$$

여기서, $M_\theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 는 관성행렬이고, $N_\theta \in \mathbb{R}^n$ 은 원심력, 코리올리력, 중력, 그리고 마찰력 등의 특성을 의미한다.

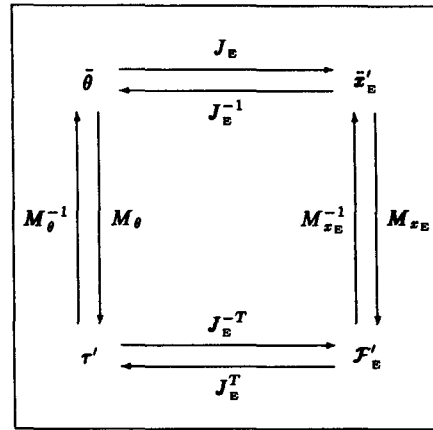
위의 관절공간 동역학은 실공간의 기구학과 정역학의 이중성에 의해 다음과 같이 실공간 동역학으로 변환된다.⁽⁵⁾

$$F = M_x \ddot{x} + N_x \quad (40)$$

여기서, $M_x = J^T M_\theta J^{-1} (\in \mathbb{R}^{m \times m})$ 이고, $N_x = J^T (N_\theta - M_\theta \ddot{J} - \dot{J} \dot{\theta}) (\in \mathbb{R}^m)$ 이다. 이러한 관계를 보다



(a) Dynamic premultiplier diagram



(b) Extended dynamic premultiplier diagram

Fig. 11 Premultiplier Diagram for kinematics, statics, and dynamics

쉽게 나타내기 위해, $\dot{x}' \equiv \dot{x} - \dot{J}\theta$, $\tau' \equiv \tau - N_\theta$, $F' \equiv F - J^T N_\theta$ 라 하면 Fig. 11(a)의 Dynamic Premultiplier Diagram(DPD)⁽⁴⁾을 만들 수 있다. DPD는 실공간에서의 기구학, 정역학, 그리고 동역학간의 관계를 이해하기 쉽게 보여준다. 여기서 J^- 는 순간 운동에너지를 최소화하기 위한 관성가중치 의사역행렬로 DPD로부터 다음과 같이 얻어진다.^(4,5)

$$J^- = M_\theta^{-1} J^T (J M_\theta^{-1} J^T)^{-1} \quad (41)$$

이에 비해 확장실공간 동역학은 확장실공간의 기구학과 정역학의 이중성, 식(7)과 식(37)를 이용해 관절공간 동역학, 식(39)로부터 다음과 같이 유도

된다.

$$F_E = M_{xE} \ddot{x}_E + N_{xE} \quad (42)$$

여기서, $M_{xE} = J_E^T M_\theta J_E^{-1} (\in \mathbb{R}^{n \times n})$ 이고, $N_{xE} = J_E^T (N_\theta - M_\theta J_E^{-1} \dot{J}_E \dot{\theta}) (\in \mathbb{R}^n)$ 이다. Fig. 11 (b)는 확장실공간에서 유도된 Extended DPD (EXDPD)로 확장실공간에서의 기구학, 정역학, 그리고 동역학간의 관계를 나타낸다. 여기서, $x_{E'}^u = x_{E'}^u - \dot{J}_E \dot{\theta}$ 그리고 $F_{E'} = F_E - J_E^T N \theta$ 이다. 이때 확장실공간 자코비안이 정방행렬이므로, 그 역행렬이 쉽게 표현됨을 알 수 있다.

실공간 동역학, 식(40)은 n 차원의 동역학을 m 차원의 동역학으로 변환했는데, 이 경우 영공간의 동역학은 분명 존재함에도 불구하고, 드러나지 못함을 볼 수 있다. 이에 비해 확장실공간 동역학은 실공간 뿐만 아니라 영공간의 동역학 및 그 관계를 표현할 수가 있다. 이를 위해 확장실공간 관성행렬의 역행렬을 자세히 나타내면 다음과 같다.

$$M_{xE}^{-1} = \begin{bmatrix} J M_\theta^{-1} J^T & J M_\theta^{-1} Z^T \\ Z M_\theta^{-1} J^T & Z M_\theta^{-1} Z^T \end{bmatrix} \quad (43)$$

이 행렬은 주어진 힘, F_E' 에 의해 발생하는 가속도, \ddot{x}_E' 의 크기를 나타낸다. 이 행렬의 대각성분을 통해 로봇말단에서 나타나는 특성뿐만 아니라 영공간의 특성까지 알 수 있게 된다. 그리고 실공간과 영공간 동역학의 결합정도를 알 수 있게 해준다. 즉 식(14)에 의해 기구학적으로는 비결합되어 있을 지라도 이 행렬의 비대각성분에서 있는 관성행렬에 의해 실공간과 영공간의 동역학적 결합이 발생하게 된다.

예를들어 평면 3축 여유자유도 로봇의 경우에 대해 살펴보자. Fig. 12는 로봇 말단이 $(x, y) = (2, 0)$ 에 있고 자체운동 매니폴드를 따라 자세가 변할 때, 각 자세에서 M_{xE}^{-1} 의 요소들을 나타낸 것이다. ρ_{ij} 는 M_{xE}^{-1} 의 i 행, j 열의 요소를 의미한다. Fig. 12 (a) ρ_{11} , ρ_{22} 는 각각 x -축, y -축에 대한 실공간의 힘-가속도 관계이고, ρ_{12} 는 x -축, y -축간의 동역학적 결합을 보여주는 값이다. 여기까지는 실공간 동역학만을 고려했을 때에도 나타나는 특성이다. Fig. 12(b)는 자체운동이 추가됨에 따라 더해지는 동역학적 특성을 보여준다. 즉, ρ_{33} 은 영공간의 힘-가속도 관계이고, ρ_{13} , ρ_{23} 는 영공간과 실공간의 동역학적 결합을 보여주는 값이다. 즉 자세에 따라 동역학적 특성이 달라짐을 알 수 있다. 따라서 원

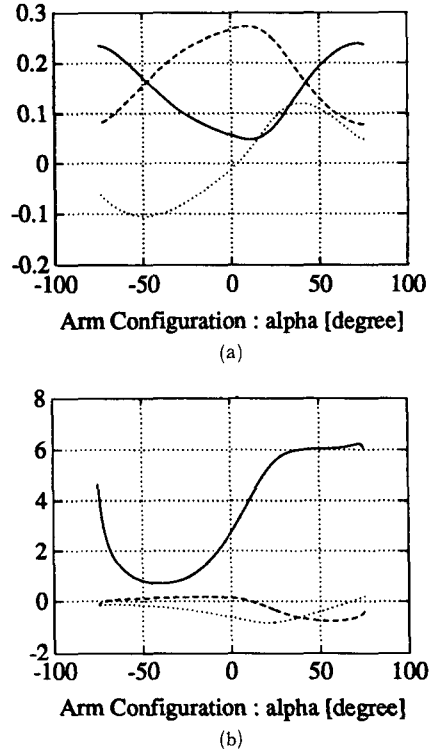


Fig. 12 Elements of inverse of EXOS inertia matrix along the self motion manifold for showing dynamic and coupling effects, When the location of end-effector is $(x, y) = (2, 0)$, the arm configuration is represented by α , which is $\alpha = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$. Let ρ_{ij} be an element at i th row and j th column of M_{xE}^{-1} . (a) ρ_{11} (solid), ρ_{22} (dashed), ρ_{12} (dotted). (b) ρ_{33} (solid), ρ_{13} (dashed), ρ_{23} (dotted)

하는 제어를 위해서는 이러한 동역학 성분을 적절히 보상할 수 있는 알고리즘이 요구된다. 이런 영향을 관절공간 동역학이나 실공간 동역학에서는 파악할 수가 없다.

5. 확장실공간에서의 동역학적 제어 알고리즘

여유자유도 로봇의 제어는 크게 두 가지를 목적으로 하고 있다. 첫째, 주어진 로봇말단의 경로를 원하는 성능으로 추종한다. 둘째, 여유자유도를 이용한 자체운동을 통해 다양한 성능지수를 최적화한다. 동역학적인 효과를 무시할 수 없는 로봇의 경우, 이러한 목적을 달성하기 위해서는 그 동역학

성분을 적절히 보상할 수 있는 방법이 요구된다.

5.1 제안된 동역학적 제어 알고리즘

확장실공간에서는 실공간의 위치, 속도, 가속도 및 영공간의 속도, 가속도를 설정할 수 있다. 다음의 제안 1에서는 주어진 임의의 경로를 원하는 성능으로 추종하는 제어법칙을 제안한다.

제안 1

제어입력, τ 이 다음과 같이 주어진다 하자.

● Type 1

$$\tau = M_e J_E^{-1} (\ddot{x}_E^* - \dot{J}_E \dot{\theta}) + N_e \tag{44}$$

● Type 2

$$\begin{aligned} \tau &= J_E^T F_E \\ F_E &= M_{x_e} \ddot{x}_E^* + N_{x_e} \end{aligned} \tag{45}$$

이때 원하는 확장실공간 가속도는

$$\ddot{x}_E^* = \begin{pmatrix} \ddot{x}^* \\ \ddot{x}_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_d + K_v \dot{e} + K_p e \\ \ddot{x}_{Nd} + K_N \dot{e}_N \end{pmatrix} \tag{46}$$

이다. 여기서, $e \equiv x_d - x \in \mathbb{R}^m$ 는 실공간위치 추종 오차벡터이고, $\dot{e}_N \equiv \dot{x}_{Nd} - \dot{x}_N \in \mathbb{R}^r$ 는 영공간 속도 추종 오차벡터이다. $K_v \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 그리고 $K_N \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 는 상수 피드백 이득 행렬이다. 만약 매니퓰레이터가 특이점을 통과하지 않는다면, 위의 제어법칙은 추종 오차가 지수함수적으로 줄어들음을 보장한다. (부록참조)

제어법칙 type 1과 type 2는 각각 관절공간 동역학과 확장실공간 동역학을 바탕으로 Computed Torque Method (CTM)⁽¹⁵⁾을 이용해서 구현하는 제어방법이다. 이 제어법칙은 CTM 뿐만이 아니라 동역학 성분을 보상할 수 있는 다른 여러 방법에도 적용될 수 있다.

일반적으로 영공간의 제어는 다양한 성능지수를 최적화하는 데 그 목적이 있다. 다음의 제안 2에서는 로봇말단이 고정되어 있을 때, 3절에서 정의된 영공간 속도로 영공간을 제어하면, 성능지수가 점근적으로 최적화된다는 것을 보인다. (제안 2는 Hsu 등의 제안 3⁽¹⁷⁾에 기초하고 이를 제안된 방법을 위해 수정한 것이다.)

제안 2

$t \geq 0$ 인 모든 시간에서, $\dot{x}(0) = 0_m$, 그리고 $x_d(t) = x(0)$ 이라 하자. 성능지수 $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 는 C^2 함수이고, 구속집합 $\psi(x(0))$ 에 의해 제한되며, 관절

각도 θ^* 에서 고립된 극소점을 갖는다고 하자. 이 경우 원하는 관절속도의 방향은 $h = k_h \nabla H$, 원하는 영공간 속도는 $\dot{x}_{Nd} = Zh$ 라 하자. 여기서 편의상 k_h 가 음의 상수라 하자. 그리고 제어입력, τ 는 제안 1에서와 같이 주어진다 하자. 로봇 매니퓰레이터가 특이점을 통과하지 않는다고 한다면,

$$\theta(0) \in A \tag{47}$$

$$\|\dot{e}_N(0)\| < \epsilon \tag{48}$$

의 관계로 인해

$$\theta(t) \rightarrow \theta^* \tag{49}$$

이 되게하는 $\epsilon > 0$ 과 θ^* 의 이웃 $A \subset \Psi$ 이 존재한다. (부록참조)

주의 1

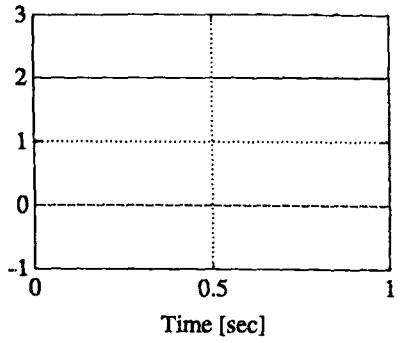
● 제안 2에서 집합 A 의 크기는 목적함수 H 와 관계가 있다. H 가 잘 거동한다면, 집합 A 는 아주 클 것이다. 예를 들어 H 가 convex하면, 집합 A 는 전체 구속집합이 된다.⁽¹⁷⁾

● 제안 2는 로봇말단이 고정된 상태 ($\dot{x} = 0$)에서 제어법칙에 의해 성능지수가 최적화됨을 증명한 것이다. 그러나 $\dot{x} \neq 0$ 인 경우의 수렴에 대한 증명은 ψ 와 θ^* 이 로봇말단의 위치의 함수이므로 훨씬 어렵다. 만약 \dot{x} 가 k_h 값에 대해 상대적으로 작다면, 로봇이 위와 유사하게 거동한다는 것을 보이는 것은 쉽다.⁽¹⁷⁾

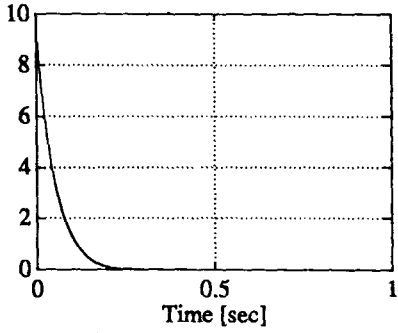
● 상수 k_h 는 제안 2에서 볼 수 있듯이 H 의 최대/최소화의 선택 뿐만 아니라, 최적화되는 속도, 그리고 최적화 경계치까지 결정한다. 즉 k_h 가 큰 음의 값이면, 빠른 속도로 성능지수를 최소화하며, 작은 최적화 경계치를 갖게 되는 것이다. 그러나 k_h 의 크기에는 어느정도 제한이 있게된다. 즉, 과도한 k_h 값은 시스템을 불안정하게 만들 수 있다는 것이다. chung⁽¹⁶⁾은 관절 토크의 한계로 부터 k_h 의 한계를 유도한 바 있다.

5.2 다른 동역학적 제어 알고리즘과의 관계

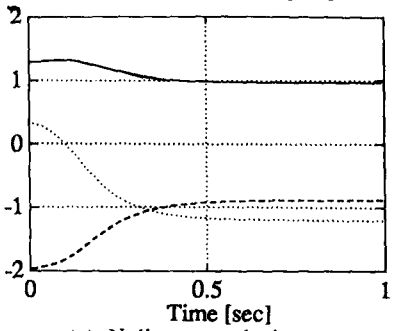
Hsu 등⁽¹⁷⁾은 주어진 로봇 말단 경로의 추종을 보장하고, 의사역행열에 기초한 속도수준의 여유자유도 분해를 통해 자체운동을 가능하게 하는 동역학적 제어 알고리즘을 처음으로 제안했다. Hsu 등의 연구 이전까지는 자체운동을 제어하는 일반제어항 (homogenous control term)조차 없거나, 가속도 수준에서 여유자유도를 분해했기 때문에 자체운동을 만족스럽게 보장하지는 못했었다. Seraji⁽⁶⁾는 여유



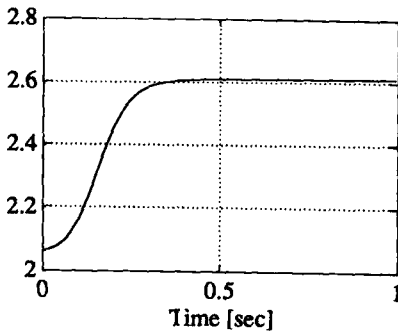
(a) End effector trajectory [m]



(b) Joint trajectory [rad]

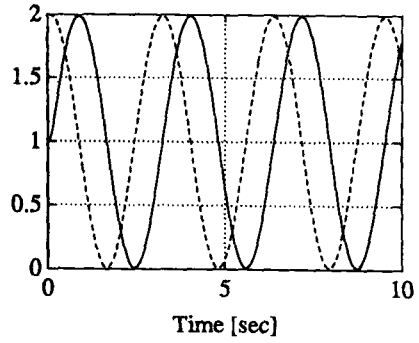


(c) Null space velocity error

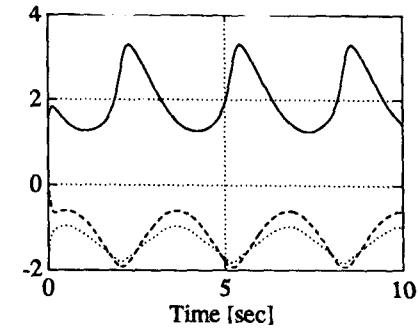


(d) Performance measure

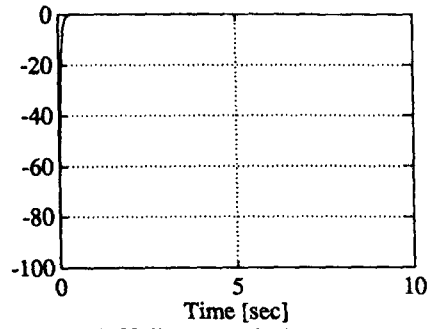
Fig. 13 Self-motion responses for the proposed dynamic control algorithm when initial configuration is $\alpha=20^\circ$. (a) x (solid), y (dashed). (b) θ_1 (solid), θ_2 (dashed), θ_3 (dotted). (c) e_N . (d) H



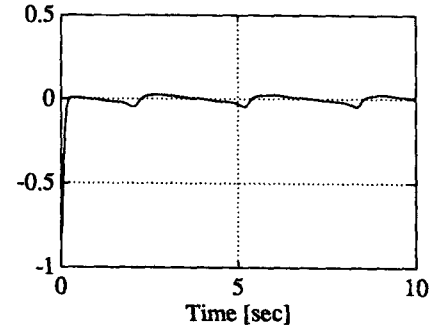
(a) End effector trajectory [m]



(b) Joint trajectory [rad]



(c) Null space velocity error



(d) Optimization measure

Fig. 14 Trajectory-motion responses for the proposed dynamic control algorithm. (a) x (solid), y (dashed). (b) θ_1 (solid), θ_2 (dashed), θ_3 (dotted). (c) e_N . (d) $Z\bar{\nabla}H$

자유도 만큼의 구속조건을 정하고 이를 위치 수준에서 제어하는 자세 제어 방법을 도입했다. 즉 Hsu 등이 기구학적 제어에서의 RM 방법⁽¹¹⁾을 동역학적 제어에 응용한 것이라면, Seraji의 경우는 역기구학 방법(Inverse Kinematic Method)⁽⁶⁾과 EJ 방법⁽¹³⁾을 응용한 것이라 볼 수 있다. 따라서 이 방법들간의 비교는 기구학적 제어방법에서와 비슷하게 이뤄질 수 있다.

즉 Seraji의 방법은 비여유자유도 로봇의 제어방법과 같은 구조로 되어있고, 위치수준에서 제어를 하기때문에 반복성이 강하다. 그러나 확장된 자코비안 행렬이 복잡해서 계산량이 많고, 알고리즘적 특이점으로 인해 경로가 제한된다. 반면 Hsu 등의 방법은 반복성은 상대적으로 약하지만, 알고리즘적 특이점에 대한 문제가 없다. 그러나 Hsu 등의 방법도 계산량면에서 개선되어야할 여지가 많다. 이에 대해 제안된 방법은 Hsu 등의 방법과 같이 속도수준에서 여유자유도를 분해하지만, 비여유자유도 로봇의 제어방법과 같은 구조로 되어 있으면서 알고리즘적 특이점에 의한 문제가 없고, 계산량이 상대적으로 적다.⁽¹⁸⁾

5.3 시뮬레이션

본 절에서는 확장실공간의 관점에서 제안된 동역학적 제어 알고리즘을 평면 3축 여유자유도 매니플레이터에 적용하는 시뮬레이션을 한다. 시뮬레이션 내용은 앞의 기구학적 제어에서와 같다. 제어 이득은 $K_v=40I_2$, $K_p=400I_2$, 그리고 $K_N=20$ 이다.

자체운동의 제어응답은 Fig. 13에 나타난다. Fig. 13 (c)영공간 속도오차, \dot{e}_N 가 지수함수적으로 줄어드는 것을 통해서 모든 제어응답이 Fig. 7의 기구학적 제어응답과 유사하게 됨을 알 수 있다.

로봇말단이 원계적을 추종할 때의 응답은 Fig. 14에 나타난다. 역시 Fig. 14(c)의 영공간 속도 오차, \dot{e}_N 가 지수함수적으로 줄어드는 것을 확인할 수 있는데, 이는 제어법칙이 의도한대로 작용되었음을 나타내는 것이다. 따라서, 로봇의 동역학이 지배적인 경우에도 제안된 동역학적 제어 알고리즘은 동역학을 무시할 수 있는 경우의 기구학적 제어 방법과 같은 결과를 보여줄 수 있다.

6. 결 론

여유자유도 로봇은 비여유자유도 로봇에 비해 많

은 장점을 갖고 있고, 복잡한 작업수행시 놀라운 유연성과 능숙성을 제공한다. 이러한 여유자유도 로봇의 특성은 로봇말단은 고정된 상태에서도 다양한 자세로 변할 수 있는 자체운동에서 비롯된다. 따라서 여유자유도 로봇을 효과적으로 해석하고 제어하기 위해서는 로봇말단운동과 자체운동을 함께 다룰 수 있는 포괄적인 방법이 요구된다. 이를 위해 본 연구에서는 확장실공간 해석을 제시했다.

확장실공간은 로봇말단 운동을 표현하는 실공간에 자체운동의 영공간을 확장한 공간으로 정의된다. 본 논문에서는 이러한 관점에서 일관되게 여유자유도를 가진 로봇 매니플레이터의 기구학, 정역학 및 동역학을 해석했다. 그리고 이를 바탕으로 기구학적 제어방법을 나타내고, 효율적인 동역학적 제어 방법을 제안했다.

지금까지의 속도수준의 여유자유도 분해방법이 주로 자코비안의 영공간에서 이뤄지는데 비해, 제안된 방법에서는 최적의 집합인 영공간 기저행렬의 열공간에서 이뤄지므로, 표현상의 단순함뿐만 아니라 개념적으로 명확한 구조를 갖게 되었다.

기구학에서는 효율적인 기구학적 제어방법이 제안되고, 기존의 방법으로 RM 방법 및 EJ 방법과의 비교가 이루어졌다. 제안된 방법은 기존의 두 방법에 비해 계산량 면에서 효율적이다. 본질적으로 RM 방법과 같은 결과를 보여주지만 제안된 방법은 보다 일관적이며 체계적인 구조를 갖고 있다. 그리고 EJ 방법에서 중요한 문제점인 알고리즘적 특이점이 제안된 방법에서는 쉽게 해결됨을 알 수 있다. 정역학에서는 가상일의 개념을 도입해서 자체운동을 일으키는 힘으로 영힘이 정의되어 기구학과 정역학의 이중성이 확장실공간에서도 존재함을 볼 수 있었다. 그리고 동역학에서는 EXDPD를 통해서 확장실공간에서의 기구학, 정역학, 그리고 동역학이 서로 어떻게 연결되는 지를 보였다. 이를 통해 말단운동과 자체운동의 동역학적 특성 뿐만 아니라 두 운동이 서로 어떻게 결합되었는지가 확장실공간 동역학식으로 표현되었다.

로봇의 동역학을 고려해서 로봇말단의 경로 추종 및 성능지수의 최적화를 보장하는 효과적인 동역학적 제어 알고리즘이 제안되고, 기존의 방법과 비교되었다. 그리고 제안된 알고리즘의 성능을 시뮬레이션을 통해 확인했다. 로봇말단이 고정되어 있을 경우나 움직일 경우나 모두 원하는 응답을 얻을 수 있었다.

이상의 결과를 종합해 볼 때, 확장실공간의 관점에서 여유자유도를 해석하는 것이 유용하고, 자체 운동이 가능한 여유자유도 로봇의 실시간 제어 알고리즘으로 제안된 방법이 효과적으로 이용될 수 있다고 기대된다.

참고문헌

(1) Burdick, J. W., 1989, "On the Inverse Kinematics of Redundant Manipulators: Characterization of the Self-Motion Manifolds," *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp. 264~270.

(2) Nenchev, D. N., 1989, "Redundancy Resolution through Local Optimization: A Review," *J. Robotic Systems*, Vol. 6, No. 6, pp. 769~798.

(3) Walker, I. D., 1990, "The Use of Kinematic Redundancy in Reducing Impact and Contact Effects in Manipulation," *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp. 434~439.

(4) Gertz, M. W., Kim, J. O. and Khosla, P. K., 1991, "Exploiting Redundancy to Reduce Impact Force," *IEEE/RSJ IROS*, pp. 179~184.

(5) Khatib, O., 1987, "A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 1, pp. 43~53.

(6) Seraji, H., 1989, "Configuration Control of Redundant Manipulators: Theory and Implementation," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 5, No. 4, pp. 472~490.

(7) Strang, G., 1980, *Linear Algebra and Its Applications*, 2nd ed., Academic Press, Inc.

(8) Chang, P. H., 1987, "A Closed-Form Solution for Inverse Kinematics of Robot Manipulators with Redundancy," *IEEE J. Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 5, pp. 393~403.

(9) Chang, P. H., 1987, "Analysis and Control of Robot Manipulators with Kinematic Redundancy," Technical Report 1022, MIT Artificial Intelligence Laboratory.

(10) Luh, J. Y. S. and Gu, Y. L., 1985, "Industrial Robots with Seven Joints," *Proc. IEEE Int. Conf.*

Robotics and Automation, pp. 1010~1015.

(11) Lie'geois, A., 1977, "Automatic Supervisory Control of the Configuration and Behavior of Multibody Mechanisms," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. SMC-17, No. 2, pp. 868~871.

(12) 이수진, 장평훈, 1994, "여유자유도 로봇 제어방법의 문제점 분석 및 해결방법," 대한기계학회 춘계학술대회논문집, pp. 717~722.

(13) Bailieul, J., 1985, "Kinematic Programming Alternatives for Redundant Manipulators," *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation*, pp. 722~728.

(14) Yoshikawa, T., 1984, "Analysis and Control of Robot Manipulators with Redundancy," *Robotics Research: The First International Symposium*, edited by M. Brady and R. Paul, MIT Press, Cambridge, pp. 735~748.

(15) Craig, J. J., 1989, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Co.

(16) Chung, W. J., Chung, W. K. and Youm, Y., 1993, "Dynamic Control of Redundant Manipulators using Full Row-Rank Minors of Jacobian," *IEEE/RSJ IROS*, pp. 1053~1058.

(17) Hsu, P., Hauser, J. and Sastry, S., 1989, "Dynamic Control of Redundant Manipulators," *J. Robotic Systems*, Vol. 6, No. 2, pp. 133~148.

(18) 박기철, 장평훈, 1993, "속도수준 확장실공간에 기초한 여유자유도 매니플레이터의 동력학적 제어 알고리즘," 대한기계학회 춘계학술대회논문집, pp. 309~314.

부 록

식(19)의 증명
먼저 다음의 두 행렬을 정의한다.

$$J' \equiv [I_m : J_c^T], \quad Z' \equiv [J_c : -I_{n-m}] \quad (50)$$

여기서, $J_c \equiv J_{n-m} J_m^{-1}$ 이다. 그러면 다음의 관계가 성립한다.

$$J = J_m^T J', \quad Z = \det(J_m) Z \quad (51)$$

두 행렬은 원래의 행렬과 마찬가지로 다음과 같이 서로 직교하는 성질을 유지한다.

$$\mathbf{Z}'\mathbf{Z}'^T = \mathbf{0} \quad (52)$$

이제 새로운 확장 자코비안을 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{J}'_E \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{J}' \\ \mathbf{Z}' \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{J}'_c \\ \mathbf{J}_c & -\mathbf{I}_{n-m} \end{bmatrix} \quad (54)$$

행렬 \mathbf{J}'_E 의 행렬식은 다음과 같이 구해진다.

$$\det(\mathbf{J}'_E) = \det(\mathbf{I}_m) \cdot \det(-\mathbf{I}_{n-m} - \mathbf{J}_c \mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{J}'_c) \\ = (-1)^{n-m} \cdot \det(\mathbf{I}_{n-m} + \mathbf{J}_c \mathbf{J}'_c) \quad (55)$$

여기서, $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}'^T = \mathbf{I}_{n-m} + \mathbf{J}_c \mathbf{J}'_c$ 이므로,

$$\det(\mathbf{J}'_E) = (-1)^{n-m} \cdot \det(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}'^T) \quad (56)$$

이 된다. 그리고

$$\mathbf{J}'_E \mathbf{J}'_E{}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{J}'\mathbf{J}'^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}'\mathbf{Z}'^T \end{bmatrix} \quad (57)$$

이 된다. 이 식에 행렬식을 취하고 정리하면,

$$[\det(\mathbf{J}'_E)]^2 = \det(\mathbf{J}'\mathbf{J}'^T) \cdot \det(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}'^T) \quad (58)$$

을 얻게 된다. 이 식에 식(56)을 대입하고 정리하면,

$$\det(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}'^T) = \det(\mathbf{J}'\mathbf{J}'^T) \quad (59)$$

의 관계를 얻게 된다. 이제 이 관계를 \mathbf{J} 와 \mathbf{Z} 에 적용해 보면,

$$\mathbf{J}\mathbf{J}^T = \mathbf{J}_m^T \mathbf{J}'\mathbf{J}'^T \mathbf{J}_m \quad (60)$$

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = [\det(\mathbf{J}_m)]^2 \mathbf{Z}'\mathbf{Z}'^T \quad (61)$$

이 된다. 이 식의 양변에 행렬식을 취하고 정리하면,

$$\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) = [\det(\mathbf{J}_m)]^2 \cdot \det(\mathbf{J}'\mathbf{J}'^T) \quad (62)$$

$$\det(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T) = [\det(\mathbf{J}_m)]^{2(n-m)} \cdot \det(\mathbf{Z}'\mathbf{Z}'^T) \quad (63)$$

이 된다. 여기에 식(59)의 관계를 이용하면,

$$\det(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T) = \det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \cdot [\det(\mathbf{J}_m)]^{2(n-m-1)} \quad (64)$$

을 얻게된다. 따라서 확장실공간 자코비안의 행렬식은 다음과 같이 구해진다.

$$\det(\mathbf{J}_E) = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \cdot \det(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T)} \\ = \det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \cdot [\det(\mathbf{J}_m)]^{(n-m-1)} \quad (65)$$

(Q. E. D.)

제안 1의 증명

관절공간 동역학에 type 1의 제어입력을 가하면,

$$\mathbf{M}_\theta \ddot{\theta} + \mathbf{N}_\theta = \mathbf{M}_\theta \mathbf{J}_E^{-1} (\ddot{\mathbf{x}}_E^* - \dot{\mathbf{J}}_E \dot{\theta}) + \mathbf{N}_\theta \quad (66)$$

의 페루프 시스템을 얻게 되고, 마찬가지로 확장실공간 동역학에 type 2의 제어입력을 가하면,

$$\mathbf{M}_{xE} \ddot{\mathbf{x}}_E + \mathbf{N}_{xE} = \mathbf{M}_{xE} \ddot{\mathbf{x}}_E^* + \mathbf{N}_{xE} \quad (67)$$

의 페루프 시스템을 얻을 수 있다. 위의 식은

$$\ddot{\mathbf{x}}_E = \ddot{\mathbf{x}}_E^* \quad (68)$$

으로 단순화된다. 결국 제어법칙에 의해 다음과 같은 오차 동역학을 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_v \mathbf{e} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} = \mathbf{0}_m \quad (69)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_N + \mathbf{K}_N \mathbf{e}_N = \mathbf{0}_r \quad (70)$$

여기서, \mathbf{K}_v , \mathbf{K}_p 그리고 \mathbf{K}_N 을 적절히 선정한다면, 추적 오차인 \mathbf{e} 와 \mathbf{e}_N 은 지수함수적으로 줄어들게 된다. (Q. E. D.)

제안 2의 증명

성능지수 H 를 시간에 대해 미분하고, 이를 전개하면

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \dot{\theta} \\ = \nabla H^T \dot{\theta} \quad (71)$$

이 된다. 여기서, $\mathbf{J}^+ \mathbf{J} + \mathbf{Z}^+ \mathbf{Z} = \mathbf{I}_n$ 이므로,⁽⁸⁾ 이를 대입하면,

$$\dot{H} = \nabla H^T (\mathbf{Z}^+ \mathbf{Z} \dot{\theta} + \mathbf{J}^+ \mathbf{J} \dot{\theta}) \quad (72)$$

이 된다. 여기서, $\mathbf{J} \dot{\theta} = \dot{\mathbf{x}}$ 와

$$\dot{\mathbf{e}}_N = \dot{\mathbf{x}}_{Nd} - \dot{\mathbf{x}}_N \\ = \mathbf{Z} \mathbf{h} - \mathbf{Z} \dot{\theta} \\ = k_h \mathbf{Z} \nabla H - \mathbf{Z} \dot{\theta} \quad (73)$$

에서의 $\mathbf{Z} \dot{\theta} = k_h \mathbf{Z} \nabla H - \dot{\mathbf{e}}_N$ 를 위 식에 대입하면,

$$\dot{H} = \nabla H^T \mathbf{Z}^+ (-k_h \mathbf{Z} \nabla H - \dot{\mathbf{e}}_N) + \nabla H^T \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{x}} \\ = k_h \nabla H^T \mathbf{Z}^+ \mathbf{Z} \nabla H - \nabla H^T \mathbf{Z}^+ \dot{\mathbf{e}}_N + \nabla H^T \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{x}} \quad (74)$$

이 된다. 여기서, $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^+ = \mathbf{I}_r$, $(\mathbf{Z}^+ \mathbf{Z})^T = (\mathbf{Z}^+ \mathbf{Z})$ 이고, $k_h = -|k_h|$ 이므로, 이를 대입하면,

$$\dot{H} = -|k_h| \nabla H^T \mathbf{Z}^+ (\mathbf{Z}\mathbf{Z}^+) \mathbf{Z} \nabla H - \nabla H^T \mathbf{Z}^+ \dot{\mathbf{e}}_N \\ + \nabla H^T \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{x}} \\ = -|k_h| \nabla H^T (\mathbf{Z}^+ \mathbf{Z})^T \mathbf{Z}^+ \nabla H - \nabla H^T \mathbf{Z}^+ \dot{\mathbf{e}}_N \\ + \nabla H^T \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{x}} \\ = -|k_h| \cdot \|\mathbf{Z}^+ \mathbf{Z} \nabla H\|^2 - \{(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^+)^{-1} \mathbf{Z} \nabla H\}^T \dot{\mathbf{e}}_N \\ + \nabla H^T \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{x}} \quad (75)$$

을 얻을 수 있다. 가정에서 로봇의 말단은 고정되어 있으므로 $\mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ 이 된다. 그리고 부등식 조건을 이용한다면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{H} \leq -|k_h| \cdot \|\mathbf{Z}^* \mathbf{Z} \nabla H\|^2 + \|(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T)^{-1} \mathbf{Z} \nabla H\| \|\dot{\mathbf{e}}_N\| \quad (76)$$

이제 일반성의 손실없이 $H(\boldsymbol{\theta}^*) = \theta$ 이라 가정하자. $\boldsymbol{\theta}^*$ 는 ψ 에 구속된 H 의 고립된 극소점이므로,

$$A = \{\boldsymbol{\theta} \in \psi : H(\boldsymbol{\theta}) \leq c, \boldsymbol{\theta} \text{ path-connected with } \boldsymbol{\theta}^*\} \quad (77)$$

을 만족하는 $c(>0)$ 가 존재한다. 여기서, A 는 compact하고, ψ 에 구속된 H 의 유일한 정지점(stationary point), $\boldsymbol{\theta}^*$ 을 포함한다. 따라서 $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}^*$ 인 $\boldsymbol{\theta} \in A$ 에 대해서는 $\mathbf{Z} \nabla H \neq \mathbf{0}$ 이 된다.

이제 다음과 같이 일련의 집합을 정의하자.

$$S_i \equiv \{\boldsymbol{\theta} \in A : H(\boldsymbol{\theta}) < c \cdot 2^{-i}\}, \quad i=1, 2, \dots \quad (78)$$

우리는 $\|\dot{\mathbf{e}}_N(0)\|$ 이 충분히 작다면, 시간 $t \geq t_i$ 에 대해 $\boldsymbol{\theta}(t) \in S_i$ 가 되는 $t_i > 0$ 가 존재함을 보일 것이다. $\mathbf{Z} \nabla H$ 가 연속이고, $A - S_i$ 가 각각의 i 에 대해 compact하므로,

$$\delta_i \equiv \min_{\boldsymbol{\theta} \in A - S_i} \|\mathbf{Z}^* \mathbf{Z} \nabla H\| \quad (79)$$

$$\rho_i \equiv \min_{\boldsymbol{\theta} \in A - S_i} \|(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T)^{-1} \mathbf{Z} \nabla H\| \quad (80)$$

는 각각 잘 정의되고, 모든 i 에 대해 $\delta_i > 0$, $\rho_i > 0$ 이 된다.

이제 모든 시간 $t > 0$ 에 대해 $\|\dot{\mathbf{e}}_N(t)\| \leq \epsilon$ 이 성립하도록 $\epsilon = |k_h| \delta_i^2 / 2\rho_i$ 을 설정하자. 그러면 식(76)에 의해 $A - S_i$ 에서 $\dot{H} \leq -|k_h| \delta_i^2 / 2$ 가 되고, A 를 빠져나가는 모든 경로는 반드시 $A - S_i$ 를 통과해야하므로, 결국 $\boldsymbol{\theta}(0) \in A$ 는 모든 시간 t 에서 $\boldsymbol{\theta}(t) \in A$ 를 의미하게 된다.

제안 1은 제어법칙에 의해 $\dot{\mathbf{e}}_N$ 이 지수함수적으로 0으로 줄어들음을 나타낸다. 따라서 시간 $t \geq \tau_i$ 에 대해 $\|\dot{\mathbf{e}}_N(t)\| \leq |k_h| \delta_i^2 / 2\rho_i$ 가 성립하는 $\tau_i \geq 0$ 가 각각의 i 에 대해 존재하게 된다. 이것은 결국 시간 $t \geq \tau_i$ 에 대해 $A - S_i$ 에서 $\dot{H} \leq -|k_h| \delta_i^2 / 2$ 이 됨을 의미한다. 그래서 시간 $t \geq t_i$ 에 대해 $H(\boldsymbol{\theta}(t)) < c \cdot 2^{-i}$ 가 성립되는 시간 $t_i \geq \tau_i$ 가 존재하게 된다. 각각의 $i \geq 1$ 에 대해 이 관계가 성립되므로, $\boldsymbol{\theta}(t) \rightarrow \boldsymbol{\theta}^*$ 가 된다. 결국 매니퓰레이터는 H 가 극소점을 갖는 관절각도를 구성하게 된다. (Q. E. D.)