3246 大韓機械學會論文集 第18卷 第12號, pp. 3246~3252, 1994

〈論 文〉

기어구동에 의한 화인진동해석

최연선* · 신용호** · 김기범***

(1994년 6월 16일 접수)

Whine Vibration in Gear Drive

Yeon-Sun Choi, Yong-Ho Shin and Gi-Bum Kim

Key Words: Superharmonic Frequency(고차 조화주파수), Backlash(백래시), Meshing Frequency(맞물림주파수), Transmission Error(전달오차), Whine Noise(화인소음), Profile Error(형상오차)

Abstract

The vibration of meshing gear system is originated from teeth deformation, teeth contact ratio, profile error, etc. The gear vibration is classified as whine vibration during meshing and as rattle vibration during idling. In this study, the whine vibration is investigated under the assumption of piecewise linearity of elastic stiffness due to the variation of meshing. Numerical, theoretical and experimental investigations show the existence of the superharmonic components of the second and the third order. consistently It can be concluded that the superharmonic components in whine vibration of meshing gear is originated from the stiffness variation. It also shows that the higher order harmonics are reduced on the increase of motor speed.

1. 서 론

동력을 전달시키는 방법으로 기어는 강력한 전달력과 확실한 속도비를 가지고 회전력을 전달할 수 있기 때문에 자동차, 산업기계, 건설기계, 선박, 항공기에 이르기까지 널리 사용되고 있다. 그러나 기어는 가공오차, 조립오차, 치의 변형, 마모 등으로 인하여 전달오차(transmission error)가 발생하게 된다.[1] 이와 같은 전달오차는 운동과 힘이 불완전하게 전달되어 기어계의 불연속적인 운동으로 인한 소음, 진동을 발생시키며 기계계의 성능을 저하시킨다. 기어의 신뢰성 향상, 진동 및 소음절감, 고정도 가공 등과 관련 이미 많은 연구결과가 발표되고 있다.[2] 특히, 기어소음과 진동은 치의 강성,[3,4] 형상오차[5](profile error), 접촉률,[6,7] 백래시 등에 의해 발생한다. 고속, 정밀기어 및 자동차 변속기와 관련하여 발생되는 기어의 진동에 관하여 Azar와 Crossley[8]는 기어계의 운동을 직선모델로 가정하고 연구하였으나 실험과 다소 차이가 있었다. Yang과 Sun[9]은 Azar가 연구한 직선 모델을 회전모델로 바꾸어 연구함으로써 백래시가 존재하는 기어계의 기본모델을 제시하였다. Comparin과 Xie는[10,11] 자동차의 수동기어에 백래시가 존재하여 진동-충격으로 발생하는 소음진동의 주원인인 Rattle 진동에 대하여 많은 연구를 하였다. 또한 Wesley와 Singh은[12]은 기어이의 전달오차와 탄성력 변화에 의해 불연속적인 운동으로 발생하는 화인소음(whine noise)에 관하여 연구하였다. 그러나 근본적으로 기어의 소음진동은 기어의 불연속성, 즉 비선형에 기인하는 것이다. 이에 본 연구에

*정회원, 성균관대학교 기계설계학과
**정회원, 성균관대학교 대학원
***대우고등기술연구원

서는 실제 기어계에서 불연속적인 운동으로 발생하는 화인진동에 관하여 비선형 모델을 선정하여, 물림주파수와 고차 조화주파수 성분이 발생하는 원인을 연구하였다. 이를 위하여 수치해석, 이론해석을 하고, 실제 기어계를 설계, 제작하여 실제응답을 측정분석하고 이론결과와 비교, 검토하였다.

2. 표준 평치차 모델

2.1 표준 평치차

표준 평치차는 각속도비, 각도비, 잇수비를 식(1)과 같이 비례식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_2}=\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{R_{b2}}{R_{b1}}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{Z_2}{Z_1} \tag{1}$$

R_b : 기초원의 반지름

R : 피치원의 반지름

Z : 잇수

그러나 실제의 기어계에서는 전위량의 발생, 치의 변형, 또는 백래쉬 등에 의해 불연속적인 운동이 발생함으로 식(1)은 만족하지 않는다.

2.2 운동방정식

기어의 변형은 작용선상에서 이루어지며 상대 변위는 $R_{b1}\theta_1$과 $R_{b2}\theta_2$의 차로 나타난다. 기어는 편적 선형 탄성력을 가진 2개의 회전체에 대한 운동으로 Fig. 1로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1&=T_1(t)+[F(t)+G(t)]R_{b1}\\ J_2\ddot{\theta}_2&=T_2(t)-[F(t)+G(t)]R_{b2}\end{aligned} \tag{2}$$

2.3 기어의 탄성력 변화

기어이의 상호접촉을 인벌루트 치형의 접촉점, 즉 피치점을 중심으로 두 개의 원통이 접촉하는 것으로 가정하면 Fig. 2와 같다.

Herz 접촉이론[13]으로부터 접촉면 b와 힘 F와의 상관관계를 나타내면 다음과 같다.

$$b=\sqrt{\frac{8(1-\nu^2)F}{\pi EL}\cdot\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}} \tag{3}$$

L은 기어의 두께이다.

Fig. 2로부터 접촉변위 δ의 크기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\delta=r_1+r_2-r_1\sqrt{1-\left(\frac{b}{r_1}\right)^2}\\ -r_2\sqrt{1-\left(\frac{b}{r_2}\right)^2}\end{aligned} \tag{4}$$

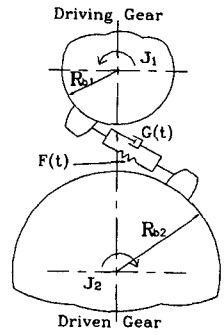


Fig. 1 Model of meshing gear

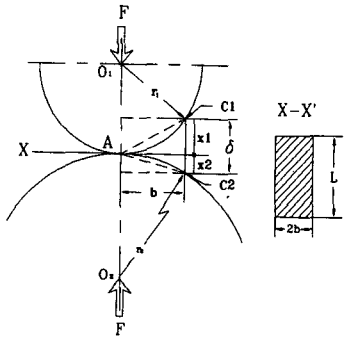


Fig. 2 Contact between two cylinders

식(4)에서 제곱근항을 근사화 시키고 정리하면 식(5)와 같다.

$$\begin{aligned}\delta&=r_1+r_2-r_1\left(1-\frac{b^2}{2r_1^2}\right)-r_2\left(1-\frac{b^2}{2r_2^2}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)b^2\end{aligned} \tag{5}$$

식(3)을 식(5)에 대입하면 다음과 같다.

$$\delta=\frac{4(1-\nu^2)}{\pi EL}F \tag{6}$$

탄성력 F에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$F=\frac{\pi EL\delta}{4(1-\nu^2)}\equiv K\delta \tag{7}$$

위의 식에서 δ는 기어이의 접촉에 의한 변형으로 $\delta=(R_{b1}\theta_1-R_{b2}\theta_2)$로 나타낼 수 있다. 식(7)은 하나의 기어이가 접촉한 경우로서 탄성력은 선형적으로 나타난다. 그러나 실제 이의 접촉은 물림률에 따라 한쌍 혹은 두쌍씩 접촉하게 되어 Fig. 3과 같이 편적 선형형태로 나타난다.

Fig. 4로부터 작용선상에서 B_2부터 A_2까지는 두 개의 이가 접촉하여 다음과 같다.

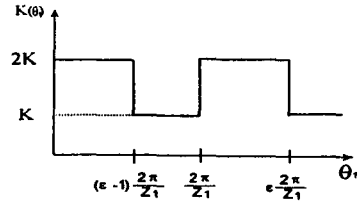


Fig. 3 Variation of stiffness

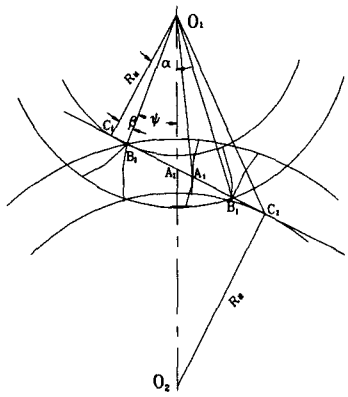


Fig. 4 Geometrical relationships of teeth contact

$$K(\theta)=2K=\frac{\pi EL}{2(1-\nu^2)} \tag{8}$$

A_2부터 A_1까지는 한 개의 이가 접촉하여 식(9)와 같다.

$$K(\theta)=K=\frac{\pi EL}{4(1-\nu^2)} \tag{9}$$

또한, A_1부터 B_1까지는 B_2부터 A_2까지와 같다.

그러므로 탄성력의 변화를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K(\theta_1)=\begin{cases}K & \text{for } \phi_{A2}\le\theta_1<\phi_{A1}\\ 2K & \text{for } \phi_{A1}\le\theta_1<\phi_{B1}\end{cases} \tag{10}$$

따라서 기어이가 접촉하고 있는 동안의 상태를 운동방정식으로 나타내면 식(11)과 같다.

$$\begin{aligned}J_1\ddot{\theta}_1&=T_1-R_{b1}[K(\theta_1)(R_{b1}\theta_1-R_{b2}\theta_2)\\&\quad+D(R_{b1}\dot{\theta}_1-R_{b2}\dot{\theta}_2)]\\J_2\ddot{\theta}_2&=T_2+R_{b2}[K(\theta_1)(R_{b1}\theta_1-R_{b2}\theta_2)\\&\quad+D(R_{b1}\dot{\theta}_1-R_{b2}\dot{\theta}_2)]\end{aligned} \tag{11}$$

3. 수치해석

3.1 수치해석방법

앞절에서 유도된 탄성력 변화를 고려한 기어의 운동방정식 (11)은 탄성력이 회전변위의 함수이므로 해석적으로 간단히 풀수는 없다. 여기서 Table 1의 실험장치의 설계변수를 대입하여 IMSL의 DGEAR루틴을 이용하고 수치적분하여 수치해석을 수행하였다.

Table 1 The design parameters of gears

$E_1=E_2$	2.068×10^5 N/mm^2
Poisson's ratio	$\nu_1=\nu_2=0.3$
Gears radius	$r_1=40$ mm, $r_2=60$ mm
No. teeth	$Z_1=32$, $Z_2=48$
Damping ratio	$\zeta=0.082$

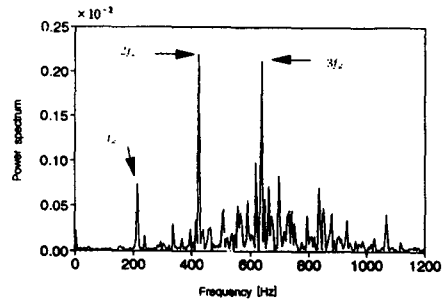


Fig. 5 Frequency components of driving gear at the speed of 400 RPM. (Numerical analysis)

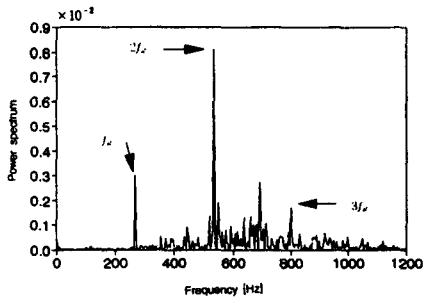


Fig. 6 Frequency components of driving gear at the speed of 500 RPM. (Numerical analysis)

3.2 수치해석 결과

Figs. 5~10은 구동부의 속도를 400 RPM에서 1000 RPM까지 변화시키며 얻은 결과이다. 400 RPM에서 600 RPM까지는 물림주파수와 물림주파수의 2배, 3배 성분이 나타나나, 700 RPM부터는 물림주파수와 물림주파수의 2배 성분만 나타난다.

즉 구동부의 속도가 고속으로 갈수록 고차조화주파수 성분이 점점 약해지는 것을 알 수 있다.

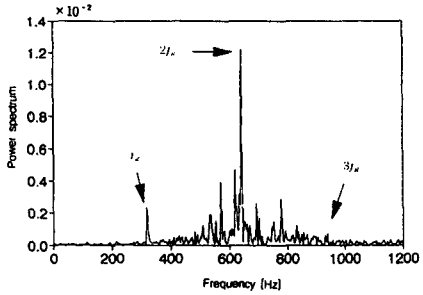


Fig. 7 Frequency components of driving gear at the speed of 600 RPM. (Numerical analysis)

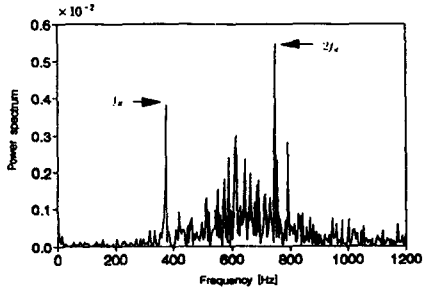


Fig. 8 Frequency components of driving gear at the speed of 700 RPM. (Numerical analysis)

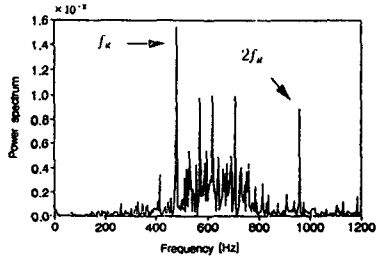


Fig. 9 Frequency components of driving gear at the speed of 900 RPM. (Numerical analysis)

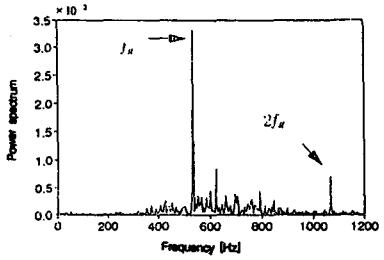


Fig. 10 Frequency components of driving gear at the speed of 1000 RPM. (Numerical analysis)

4. 정상상태의 해

정상상태의 해를 구하기 위해 θ_1의 함수인 탄성력을 $\theta_1=\omega t$로 가정하여 탄성력을 $K(\omega t)$의 함수로 대치시키면 다음과 같은 해석해가 가능하다. 식(11)를 작용선 방향의 운동으로 변환하기 위하여

$$M_1=\frac{J_1}{R_{b1}^2},\quad M_2=\frac{J_2}{R_{b2}^2}$$
$$x_1=R_{b1}\theta_1,\ x_1=R_{b2}\theta_2$$
$$\frac{T_1}{R_{b1}}=\frac{T_2}{R_{b2}}=W \tag{12}$$

인 관계를 이용하면 다음과 같이 정리된다.

$$M_1\ddot{x}_1+K(\omega t)\cdot(x_1-x_2)=W(\omega) \tag{13}$$
$$M_2\ddot{x}_2-K(\omega t)\cdot(x_1-x_2)=W(\omega) \tag{14}$$

식(13)과 식(14)를 정리하면 다음과 같다.

$$M\ddot{X}+2\zeta\sqrt{MK(\omega t)}\,\dot{X}+K(\omega t)X=W(\omega) \tag{15}$$

여기서, $M=\frac{M_1\cdot M_2}{M_1+M_2}$로 나타난다.

식(15)로부터 기어이의 물림 변화에 따라 2개의 선형방정식을 얻을 수 있다. 두 식의 해는 다음과 같다.

$$X(t)=e^{-\zeta\omega_{n1}t}\cdot[A_1\cos(\omega_{n1}t)+B_1\sin(\omega_{n1}t)]+\frac{f}{2K}$$
$$X(t)=e^{-\zeta\omega_{n2}t}\cdot[A_2\cos(\omega_{n2}t)+B_2\sin(\omega_{n2}t)]+\frac{f}{K} \tag{16}$$

물림률이 같아지는 점에서 변위, 속도는 각각 같아져야 하므로 식(16)에서 A_1, B_1, A_2, B_2의 상수를 계산할 수 있다. Fig. 11은 식(16)에서 정상

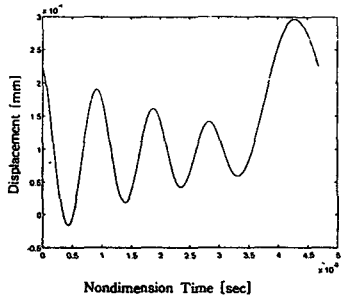


Fig. 11 Steady state response(400 RPM)

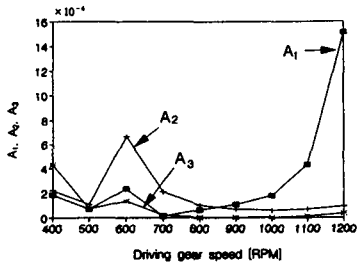


Fig. 12 Frequency component v. s. motor speed

상태를 구하여 ω가 400 RPM일때의 한주기를 나타낸 것이며 Fourier급수로 전개하면 ω, 2ω, 3ω에 해당하는 Fourier계수를 계산할 수 있다.

수치해로부터 물림주파수의 2배, 3배 성분을 검토하기 위하여 정상상태의 해를 다음과 같이 정의하고,

$$x(t)=A_1\cos(\omega t)+A_2\cos(2\omega t)+A_3\cos(3\omega t) \tag{17}$$

비선형 응답을 강조하기 위하여 감쇠력을 무시하면 다음과 같다.

$$M\ddot{x}+K(\omega t)x=W(\omega) \tag{18}$$

식(17)를 식(18)에 대입하여 A_1, A_2, A_3를 구하면 Fig. 12와 같다. Fig. 12에서 보듯이 회전수의 증가에 따라 고차 조화주파수 2ω, 3ω 성분이 점점 약해지는 반면 물림주파수 성분이 크게 나타난다.

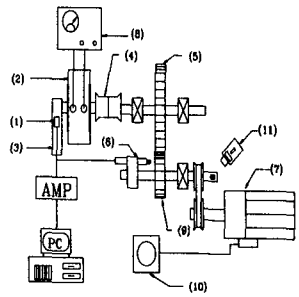
5. 평치차의 실험

기어 구동에 의한 화인진동 특성을 알아 보기위해 Fig. 13와 같은 실험장치를 설계 제작하여 회전수 변화에 따른 기어의 진동특성을 측정하였다.

5.1 실험장치 및 방법

구동은 0.7 kW, 1500 RPM의 DC 모터로 하고, 1 : 2 풀리와 V벨트를 사용하여 구동부 기어에 동력을 전달했으며, 한쌍의 기어로 종동부에 동력을 전달하였다.

부하는 종동부의 끝부분에 파우더 클러치(powder clutch, 5 kg-m)를 설치하여 조절하였으며, 부하 크기는 파우더 클러치의 종동축에 부착된 토션바(Torsion bar)에 의해 측정된다. 토션바는 외팔보의 원리를 이용했고, 스트레인게이지를 부착하여 부하를 측정하였다.



(1) Strain gauge
(2) Powder clutch
(3) Torsion bar
(4) Flexible Coupling
(5) Driven gear
(6) Gap sensor
(7) DC motor
(8) Driving gear
(9) Powder clutch controller
(10) DC motor controller
(11) Hand tachometer

Fig. 13 Schematic diagram of the experimental apparatus

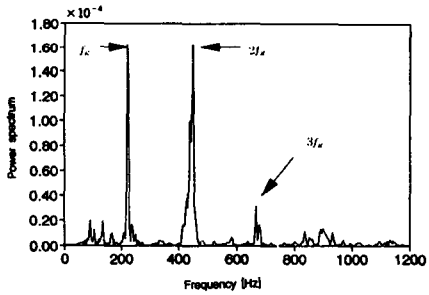


Fig. 14 Frequency components of driving gear at the speed of 400 RPM. (Experiment)

기어의 진동은 구동부 기어의 측면에서 gap sensor로 측정하였다. 측정된 신호는 A/D변환기를 거쳐 파워스펙트럼(power spectrum)을 계산하였다.

본 실험에서 구동부 기어는 400 RPM에서 1000 RPM까지 구동시키며 화인진동 특성을 측정하였다.

5.2 실험결과 및 고찰

Figs. 14~19는 구동부의 회전수를 400 RPM에서 1000 RPM까지 변화시키며 측정한 결과이다. 실험에서도 400 RPM에서 600 RPM까지는 물림주파수

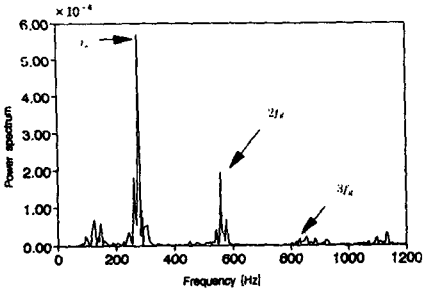


Fig. 15 Frequency components of driving gear at the speed of 500 RPM. (Experiment)

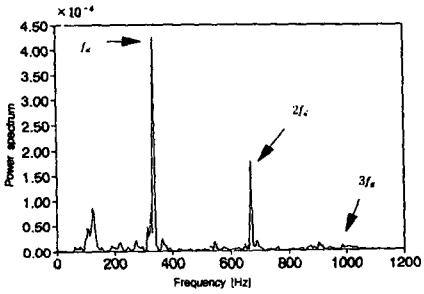


Fig. 16 Frequency components of driving gear at the speed of 600 RPM. (Experiment)

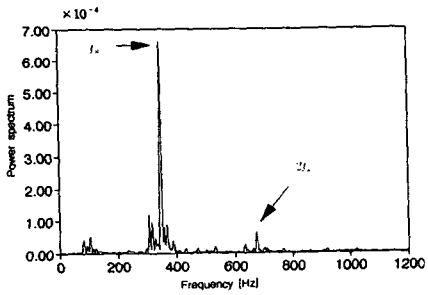


Fig. 17 Frequency components of driving gear at the speed of 700 RPM. (Experiment)

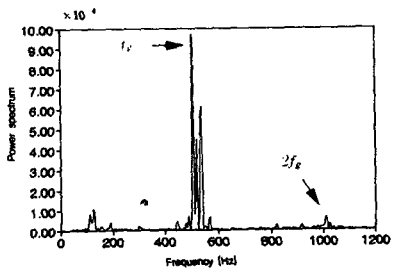


Fig. 18 Frequency components of driving gear at the speed of 900 RPM. (Experiment)

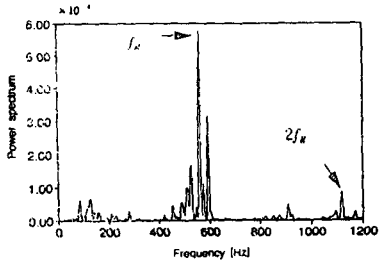


Fig. 19 Frequency components of driving gear at the speed of 1000 RPM. (Experiment)

와 물림주파수의 2배, 3배 성분이 나타나나, 700 RPM부터는 물림주파수와 물림주파수의 2배의 성분만 나타났다. 구동부의 속도가 고속으로 갈수록 고차조화주파수 성분이 약해진다.

6. 결 론

기어구동에 의한 화인진동을 규명하고자 기어구동에 따른 탄성력의 변화를 편적 선형형태의 비선형방정식으로 유도하여 이론해석과 수치해석을 수행하였다. 그리고 실험을 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 비선형 운동방정식을 수치해석과 이론적으로 계산한 결과, 물림주파수의 2배, 3배 주파수 성분이 존재함을 알았다.

(2) 기어구동 실험장치를 제작하여 기어의 진동을 측정한 결과 물림주파수는 물론, 물림주파수의 2배, 3배 주파수 성분이 발생함을 증명하였다. 따라서 편적 선형형태의 탄성력이 고차 조화주파수 성분의 원인임을 알았다.

(3) 맞물림주파수에 대한 고차 조화주파수 성분은 저속에서는 크게 나타나며, 고속에서는 약해짐을 알 수 있었다.

참고문헌

(1) 鈴木義友, 1987, "トランスミツシヨンキヤノス研究(かえあい傳達誤差に關する一考察)," 自動車技術會論文集, 第 36號, pp. 174~180.

(2) 寺內喜男, 1985, "齒車を考える一メカトロ時代の齒車を展望する一," 機械設計, 第 29卷, 第 11號, pp. 25~30.

(3) Tobe, T. and Sato, K., 1977, "Statical of

Dynamics Loads on Spur Gear Teeth," *JSME*, Vol. 20, pp. 882~889.

(4) Benton, M. and Seireg, A., 1981, "Factors Influcting Instablity and Resonances in Geared Systems," *Trans. of ASME*, Vol. 102, pp. 372~378.

(5) Cai, Y. and Hayashi, T., 1990, "The Estimation of Vibration of a Pair of Spur Gears Due to Their Tooth Profile Errors," *JSME*, Vol. 56, pp. 1424~1430.

(6) Cai, Y. and Hayashi, T., 1992, "The Optimum Modification of Tooth Profile for a Pair of Spur Gears to Make its Rotational Vibration Equal Zero," *ASME International Power Transmission and Gearing Conference*, Vol. 2, pp. 453~460.

(7) Liou, C. H. and Lin, H. H., 1992, "Effect of Contact Ratio on Spur Gear Dynamic Load," *ASME International Power Transmission and Gearing Conference* Vol. 1, pp. 29~33.

(8) Azar, R. C. and Crossley, F. R. E., 1977, "Digital Simulation of Impact Phenomenon in Spur Gear System," *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol. 99, pp. 792~798.

(9) Yang, D. C. H. and Sun, Z. S., 1985, "A Rotary Model for Spur Gear Dynamics, Journal of Mechanisms," *Transmission and Automation in Design*, Vol. ,107, pp. 529~535.

(10) Comparin, R. J. and Xie, H., 1989, "Analysis of Automative Neutral Gear Rattle," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 131, pp. 177~196.

(11) Johnson, O. and Hirami, N., 1991, "Diagnosis and Objective Evaluation of Gear Rattle," *SAE*. 911082, pp. 1547~1562.

(12) Wesly, G. and Singh, R., 1992, "New Rating Indices for Gear Noise Based upon Vibro-Acoustic Measurements," *Noise Control Engineering Journal*, Vol. 38, No. 2, pp. 81~92.

(13) Johnson, K. L., 1982, "One Hundred Year of Hertz Contact," Cambridge University Engineering Laboratory, *Proc Insta Mech Eng.*, Vol. 196, pp. 363~377.