

(論 文)

## 유연보의 진동제어를 위한 구조계와 제어계의 동시최적화

김창동\* · 정의봉\*\*

(1994년 1월 22일 접수)

### Simultaneous Optimization of Structural and Control Systems for Vibration Control of Flexible Beams

Chang-Dong Kim and Weui-Bong Jeong

**Key Words :** Simultaneous Optimization(동시최적화), Flexible Beam(유연보), Finite Element Method(유한요소법), Modal Analysis(모드 해석), LQG Control(LQG제어)

#### Abstract

An approach to the simultaneous optimal design of structure and control system for large free-free flexible beam is presented. The flexible beam is modeled by the finite element method. And the reduced model of small degree of freedom is constructed by use of modal analysis. The tapered beam is considered so that the number of design variables is not dependent on the increasing number of finite elements. The width of several points of tapered beam and control gain are taken as design variables. The shape of beam and control gain are optimized simultaneously for the minimum weight of total structure including control system subject to the constraints of the magnitude of displacement of beam. It is shown that the simultaneous optimal design of structure and control systems is indeed useful.

#### 1. 서 론

위성안테나 등의 우주구조물이나 산업용 로봇 팔과 같은 동적 하중을 받는 유연구조물의 특징은 경량화된 구조물로서 감쇠가 매우 작고 고유진동수가 낮아 작은 외란에도 쉽게 가진되므로 자세제어나 형상제어가 필요하게 된다. 그러나 이와 같은 특징은 구조물 자체의 성질로서 제어계만에 의한 설계로는 성능향상의 한계가 있으므로, 구조계의 형상과 제어계를 동시에 고려하여 설계하면 보다 향상된 성능을 얻을 수 있을 것이다. 그러나 지금까지의 연구는 유연 구조물의 설계와 제어계의 설계가 분리되어 온 실정이다. 만일 제어계를 고려한

구조계를 설계단계에서부터 고려할 수 있으면, 제어력의 감각과 성능의 향상을 기대할 수 있을 것이다. 그러므로 구조계와 제어계가 결합된 기계계에 대한 진정한 최적설계를 할 수 있는 동시최적화법의 개발이 절실히 필요하다.

최근 구조계와 제어계를 동시에 고려한 동시최적화법에 관한 연구가 이루어지고 있다. Tada<sup>(1)</sup>는 입체 트러스구조물에 대하여 직접 속도·변위 feedback(DVDFB) 제어를 이용한 경우 구조중량이 일정한 구속조건 하에서의 동시최적화를 수행하였다. Blevin<sup>(2)</sup>은 보의 에너지와 제어력에 대한 2차형식을 목적함수로 하여 동시최적화를 수행하였다. Lim<sup>(3)</sup>은 구조계와 제어계가 결합된 계에 대하여 출력 피드백 제어시 강인한 안정성을 위한 최적 고유치 배치를 수행하였다. Bendsoe<sup>(4)</sup>은 첫번째와 두번째 모드에서의 에너지와 spill-over를 최소화하

\*부산대학교 대학원 정밀기계공학과

\*\*정회원, 부산대학교 정밀기계공학과 및 기계기술연구소

기 위해서 고유치 배치에 주안점을 두고 있으며, 모드수 만큼의 구동기를 필요로 했다. Kim과 Jeong<sup>(6)</sup>은 유색잡음의 노면입력을 받는 차체의 탄성을 고려한 1/2 차량 모델에 대하여 차체의 응답 성능 향상을 위한 현가장치 구조계와 제어계의 동시최적화를 수행하였다. Yamakawa<sup>(6)</sup>는 구조중량과 최적 레귤레이터의 혼합문제를 평가함수로 구성하고, 수치적분법에 의하여 평가함수의 감도를 구하여 외팔보에 적용하였다. Kajiwara<sup>(7)</sup>는 2차 형식의 평가함수 및 극점의 감도를 구하였으며, 백색잡음의 외란을 받는 3자유도 진동모델의 위치제어를 위한 동시최적화를 수행하였다. Onoda<sup>(8)</sup>는 우주구조물의 자세제어를 위하여 최적제어를 이용한 경우의 2차 형식의 목적함수가 아닌 질량의 최소화를 위한 동시최적화를 수행하였으나 유한요소 모델로 인하여 설계변수가 많이 필요하였다. 그러나 이와 같은 대부분의 연구들은 Riccati 방정식이나 Lyapunov 방정식으로부터 직접 계산이 가능한 2차형식의 목적함수를 이용하고 있으며, 제어하고자 하는 모드수 만큼의 구동기를 필요로 하고 있다. 그리고 유한요소법을 이용할 때 요소의 두께를 설계변수로 사용하기 때문에 요소 분할수가 증가하면 설계변수의 수가 급격히 증가하는 단점이 있다. Iwatsubo<sup>(9)</sup>는 초기조건을 갖는 외팔보의 응답특성 향상을 위한 동시최적화를 수행하였으며 유한요소 분할로 인한 설계변수의 증가를 방지하기 위하여 단면의 변화율을 설계변수로 설정하였다. 그러나 보의 중앙에서의 폭은 일정해야 하는 단점과 보의 끝단에서의 폭이 너무 작아지는 단점이 있었다. 본 연구에서는 유한요소 모델 이용시의 요소 분할수가 증가할 경우에도 설계변수의 증가를 억제하기 위한 Iwatsubo<sup>(9)</sup>의 방법을 개선하여 설계변수로 설정한 단면과 단면사이는 taper를 갖도록 하였으며, 2차 형식이 아닌 목적함수에 대한 동시최적화를 수행하고자 한다. Onoda<sup>(8)</sup>의 모델을 기초로 한 분포하중 외란을 받는 길이가 긴 양단 자유 유연보의 자세제어를 위하여, 변위의 제약조건하에서 구조물과 제어계의 전체 질량이 최소가 되는 유연보의 형상을 동시최적설계 하고자 한다. 유연보는 유한요소법을 이용하여 수학적 모델을 구성하고 자유도의 증가를 억제하기 위하여 모드해석에 의하여 관심주파수 범위만을 고려한 축소모델을 구성한다. 제어제를 전상태 feedback 제어인 LQG 제어이론과 센서와 작동기가 같은 위치에 있으며 직접 속

도·변위를 feedback 시키는 DVDFB(Direct Velocity Displacement Feedback) 제어이론을 적용한다. 분포하중 외란은 백색잡음으로 크기가 중심에서부터의 거리에 비례하는 것으로 가정한다.

### 2. 구조물의 모형화

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 백색잡음의 분포하중 외란을 받는 양단 자유 유연보의 자세제어를 위한 동시최적화를 수행한다. 유연보는 연속체이므로 이산화한 유한요소 모형을 구성한다. 굽힘모멘트를 받는 tapered 유연보 요소의 국부 좌표계에서의 형상은 Fig. 2와 같으며 위치  $\xi$ 에서의 변위  $v(\xi, t)$ 는 다음과 같이 가정한다.

$$v(\xi, t) = [N(\xi)]\{v(t)\}_e \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \{v(t)\}_e^T &= [v_1(t) \ \theta_1(t) \ v_2(t) \ \theta_2(t)] \\ [N(\xi)] &= [N_1(\xi) \ N_2(\xi) \ N_3(\xi) \ N_4(\xi)] \end{aligned}$$

여기서,

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

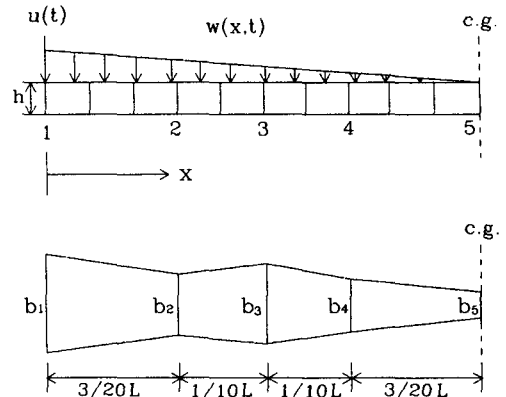


Fig. 1 1/2 shape of free-free flexible symmetric beam model

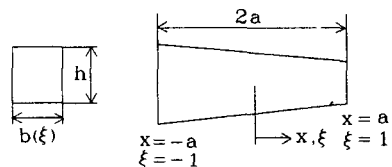


Fig. 2 Geometry of tapered beam element

$$N_3(\xi) = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3)$$

$$N_4(\xi) = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

그리고 단면의 높이  $h$ 는 일정하고 폭  $b(\xi)$ 이 선형적으로 변하는 tapered 보로 가정하면, 단면적  $A(\xi)$  및 단면 관성모멘트  $I_x(\xi)$ 는 다음과 같다.<sup>(10)</sup>

$$A(\xi) = A(0) \left\{ 1 + \frac{b(+1) - b(-1)}{b(+1) + b(-1)} \xi \right\}$$

$$I_x(\xi) = I_x(0) \left\{ 1 + \frac{b(+1) - b(-1)}{b(+1) + b(-1)} \xi \right\}$$

단,  $A(0) = hb(0)$ ,  $I_x(0) = \frac{hb(0)^3}{12}$

운동에너지  $K.E.$ 는

$$\begin{aligned} K.E. &= \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \rho A \dot{v}^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \{ \dot{v} \}_e^T \rho a \int_{-1}^{+1} A(\xi) [N(\xi)]^T \\ &\quad [N(\xi)] d\xi \{ \dot{v} \}_e \end{aligned} \quad (2)$$

탄성에너지  $P.E.$ 는

$$\begin{aligned} P.E. &= \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} EI_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \{ \dot{v} \}_e^T \frac{E}{a^3} \int_{-1}^{+1} I_x(\xi) \left[ \frac{d^2 N(\xi)}{d\xi^2} \right]^T \\ &\quad \left[ \frac{d^2 N(\xi)}{d\xi^2} \right] d\xi \{ v \}_e \end{aligned} \quad (3)$$

분포하중  $P_y$ 에 의한 가상일  $\delta W_e$ 는

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_{-a}^{+a} P_y \delta v dx \\ &= \{ \delta v \}_e^T a \int_{-1}^{+1} P_y(\xi) [N(\xi)]^T d\xi \end{aligned} \quad (4)$$

이다. 식(2)~식(4)로부터 질량행렬, 강성행렬, 하중벡터는 Gauss 적분법을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [M]_e &= \rho a \int_{-1}^{+1} A(\xi) [N(\xi)]^T [N(\xi)] d\xi \\ &= \rho a \sum_{j=1}^4 H_j A(\xi_j) [N(\xi_j)]^T [N(\xi_j)] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} [K]_e &= \frac{E}{a^3} \int_{-1}^{+1} I_x(\xi) \left[ \frac{d^2 N(\xi)}{d\xi^2} \right]^T \left[ \frac{d^2 N(\xi)}{d\xi^2} \right] d\xi \\ &= \frac{E}{a^3} \sum_{j=1}^4 H_j I_x(\xi_j) \left[ \frac{d^2 N(\xi_j)}{d\xi^2} \right]^T \left[ \frac{d^2 N(\xi_j)}{d\xi^2} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\{f\}_{ea} = a \sum_{j=1}^4 H_j p_y(\xi_j) [N(\xi_j)]^T \quad (7)$$

단,  $\xi_j$ 와  $H_j$ 는 Gauss점 및 가중치로서

$$\xi_{1,2} = \mp \sqrt{\frac{3 + \sqrt{4.8}}{7}}, \quad \xi_{3,4} = \mp \sqrt{\frac{3 - \sqrt{4.8}}{7}}$$

$$H_{1,2} = \left[ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36} \right], \quad H_{3,4} = \left[ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36} \right]$$

그러므로 유한요소 모델에 의한 tapered 유연보의 이산화된 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} \\ = [B_s]\{u\} + [D_s]\{w\} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,

- $\{q\}$  변위벡터
- $\{u\}$  제어력벡터
- $[M]$  질량행렬
- $[C]$  감쇠행렬
- $[K]$  강성행렬
- $\{w\}$  외란하중벡터
- $[D_s]$  외란하중의 입력행렬
- $[B_s]$  제어력의 입력행렬

유연보의 감쇠는 충분히 작다고 가정하고, 감쇠행렬  $[C]$ 는 다음과 같이 비례 점성감쇠로 가정한다.<sup>(11)</sup>

$$[C] = \eta_1 [K] + \eta_2 [M]$$

구조물의 응답이 저차  $n$ 개의 모드로 충분히 표현할 수 있다고 가정하면, 수학적 모델의 자유도를 줄이고, 제어하지 않는 모드로부터 제어하려는 모드를 비연성화시키기 위해서 다음과 같이 모드 좌표의 변환을 행하였다.

$$\{q\} = [\phi] \{p\} \quad (9)$$

$$\text{단, } [\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (10)$$

여기서,  $[\Phi]$ 는 저차  $n$ 개의 고유모드 벡터이며,  $\{p\}$ 는 모드 좌표이다. 모드 좌표에서의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\ddot{p}\} + [A]\{\dot{p}\} + [\Omega]\{p\} \\ = [\Phi]^T [B_s]\{u\} + [\Phi]^T [D_s]\{w\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } [A] &= \text{diag}\{2\zeta_1\omega_1, \dots, 2\zeta_n\omega_n\} \\ [D] &= \text{diag}\{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\} \end{aligned}$$

여기서,  $\zeta_i$ 는  $i$ 차 모드 감쇠비이며  $\omega_i$ 는  $i$ 차 고유진동수이다. 식(11)을 상태변수를 이용하여 상태방정식으로 다시 표시하면 다음과 같다.

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} + [D]\{w\} \quad (12)$$

$$\text{단, } [A] = \begin{bmatrix} -[A] & -[D] \\ [I] & [0] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [\Phi]^T [B_s] \\ [0] \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} [\Phi]^T [D_s] \\ [0] \end{bmatrix}, \quad \{x\}^T = [\{p\}^T \{ \dot{p} \}^T]$$

구조물의 외란은 분포하중으로 유연보의 중심에서부터의 거리  $x$ 에 비례하는 백색잡음으로 가정하면 다음과 같다.

$$p(x, t) = xw(t)$$

여기서,  $w(t)$ 는 백색잡음이다.

### 3. 제어 기초이론

제어력  $\{u\}$ 을 상태변수  $\{x\}$ 의 선형결합으로 표시하면

$$\{u\} = -[F]\{x\} \quad (13)$$

이므로 식(12)는 다음과 같이 표현되어진다.

$$\{\dot{x}\} = ([A] - [B][F])\{x\} + [D]\{w\} \quad (14)$$

구조물의 변위 및 속도의 크기에 대한 2차 형식

$$\sigma_1 = E[\{x\}^T [Q] \{x\}] \quad (15)$$

과 제어력의 크기에 대한 2차 형식

$$\sigma_2 = E[\{u\}^T [R] \{u\}] \quad (16)$$

는 성능평가의 기준으로 널리 사용되고 있다.<sup>(12)</sup> 여기서, 양의 한정행렬인  $[R]$ 과 양의 반한정행렬  $[Q]$ 는 각 성분의 상대적인 중요도에 따라 결정되는 가중치 행렬이다. 그리고  $E[\cdot]$ 는 기대치를 의미한다. 식(14)와 같이 백색잡음의 외란을 받는 구조물의 경우 2차 형식의 기대치  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ 는 다음과 같이 계산되어진다.<sup>(12)</sup>

$$\sigma_1 = tr[[P_1][D][W][D]^T] \quad (17)$$

$$\sigma_2 = tr[[P_2][D][W][D]^T] \quad (18)$$

여기서,  $[P_1]$ ,  $[P_2]$  행렬은 다음과 같은 Lyapunov 방정식의 해로 주어지며

$$[P_1]([A] - [B][F]) + ([A] - [B][F])^T [P_1] + [Q] = [0] \quad (19)$$

$$[P_2]([A] - [B][F]) + ([A] - [B][F])^T [P_2] + [F]^T [R] [F] = [0] \quad (20)$$

백색잡음의 강도행렬  $[W]$ 는 다음과 같다.

$$E[\{w(t)\}\{w(\tau)\}^T] = [W]\delta(t - \tau) \quad (21)$$

한편, LQG 제어이론에 의하면 2차 형식의 제어성능 평가함수

$$J = E[\{x\}^T [Q] \{x\} + \{u\}^T [R] \{u\}] \quad (22)$$

를 최소화하는 feedback gain  $[F]$ 는 다음과 같이

주어진다.

$$[F] = [R]^{-1}[B]^T [P] \quad (23)$$

단,  $[P]$ 는 다음의 Riccati 방정식의 해이다.

$$\begin{aligned} [A]^T [P] + [P] [A] + [Q] \\ - [P] [B] [R]^{-1} [B]^T [P] = [0] \end{aligned} \quad (24)$$

한편, LQG제어를 이용하기 위해서는 전상태 feedback이 필요하다. LQG제어가 곤란한 경우에는 측정가능한 량만에 의한 출력 feedback이 유효하다. 센서와 액추에이터가 같은 위치에 위치하고 속도와 변위의 직접 feedback을 이용하는 DVDFB제어는 안정성을 보장할 수 있음이 알려져 있다.<sup>(13)</sup> 측정가능한 량  $\{y(t)\}$ 를 다음과 같이 상태변수의 선형결합으로 가정하면

$$\{y(t)\} = [C]\{x(t)\} \quad (25)$$

단,  $[C] = \begin{bmatrix} [B_s]^T [\phi] & [0] \\ [0] & [B_s]^T [\phi] \end{bmatrix}$

출력 feedback에 의한 제어력은

$$\{u(t)\} = -[F_1]\{y(t)\} \quad (26)$$

이다. 출력 feedback 게인  $[F_1]$ 에 의한 등가 전상태 feedback gain  $[F_1][C]$ 와 전상태 feedback 게인  $[F]$ 의 성분이 오차의 제곱합을 최소화하는 출력 feedback 게인  $[F_1]$ 은 최소 Norm법<sup>(14)</sup>에 의하면 다음과 같이 결정된다.

$$[F_1] = [F][C]^T ([C][C]^T)^{-1} \quad (27)$$

구조물의 변위의 크기에 대한 2차 형식  $\sigma_3$ 와 제어력의 크기에 대한 2차 형식  $\sigma_4$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma_3 = tr[[P_3][D][W][D]^T] \quad (28)$$

$$\sigma_4 = tr[[P_4][D][W][D]^T] \quad (29)$$

여기서,  $[P_3]$ 와  $[P_4]$ 는 다음의 Lyapunov 방정식의 해이다.

$$\begin{aligned} [P_3]([A] - [B][F_1][C]) \\ + ([A] - [B][F_1][C])^T [P_3] + [Q] \\ = [0] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} [P_4]([A] - [B][F_1][C]) \\ + ([A] - [B][F_1][C])^T [P_4] + [F_1]^T [R] [F_1] \\ = [0] \end{aligned} \quad (31)$$

### 4. 동시최적화

최적화 설계를 하기 위해서는 성능평가를 나타내는 목적함수가 필요하다. 우주구조물의 경우에는 구조물의 질량이 증가함에 따라 비용이 증가한다. 따라서 본 연구에서는 Fig. 1과 같은 양단 자유 tapered 유연보의 구조물 질량과 제어기 질량의 합을 목적함수로 설정한다. 그리고 제어 구동기의 질량은 제어력 크기의 분산에 비례한다고 가정하면 목적함수  $J$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$J(\zeta) = m_s + \alpha \sigma_2 \tag{32}$$

단,  $m_s$ 는 구조물의 질량이고  $\sigma_2$ 는 제어력 크기의 분산이며  $\alpha$ 는 질량변환 상수이다. 양단 자유 구조물의 자세제어를 고려할 때 구조물의 변위응답의 분산  $\sigma_1$ 은 최대 허용값  $\sigma_1^*$ 보다 작아야 한다.

$$\sigma_1 \leq \sigma_1^* \tag{33}$$

그러므로 동시최적화 문제는 식(33)의 제약조건 하에서 식(32)의 목적함수  $J$ 를 최소화하는 구조물의 형상을 결정하는 문제가 된다. 제어이론<sup>(12)</sup>에 의하면 다음식

$$\sigma = \sigma_1 + k\sigma_2 \tag{34}$$

을 최소화하는 상태 feedback 게인  $[F]$ 는

$$[F] = k^{-1}[R]^{-1}[B]^T[P] \tag{35}$$

이다. 단,  $[P]$ 는 다음 Riccati 방정식의 해이다.

$$\begin{aligned} [A]^T[P] + [P][A] + [Q] \\ - k^{-1}[P][B][R]^{-1}[B]^T[P] = [0] \end{aligned} \tag{36}$$

feedback 게인  $[F]$ 는 식(34)의  $\sigma$ 를 최소화하기 위한 게인이지만 본 연구의 목적함수인 식(32)의  $J$ 를 최소화하는 게인은 아니다. 따라서 식(33)의  $\sigma_1$ 의 제약조건을 만족하면서 제어력  $\sigma_2$ 를 최소화하는 feedback 게인  $[F]$ 의 결정이 필요하다. 제어력 가중치  $k$ 가 주어지면 식(35)로부터 feedback 게인이 결정되어지게 된다. 그러므로 동시최적화를 위한 설계변수는 구조물의 형상을 결정하는 tapered 유연보의 폭  $b$ 와 제어 가중치  $k$ 로 설정한다. 최적화 기법으로는 식(33)의 제약조건을 penalty 함수를 이용하여 제약조건이 없는 문제로 변환하는 SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Techniques)<sup>(15)</sup>를 이용하였으며, 목적함수는 다음과 같

이 제약조건이 없는 식으로 표현된다.

$$J_o(\zeta) = m_s + \alpha \sigma_2 + \gamma \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_1^*} \tag{37}$$

여기서,  $\zeta$ 는 설계변수로서 구조물의 폭  $b$ 와 제어력 가중치  $k$ 이다. SUMT의 알고리즘은 다음과 같다.

① 설계변수의 초기치  $\zeta^0$ 에 대한  $\{d^0\} = \nabla J_o(\zeta^0)$ 를 감도해석<sup>(15)</sup>을 이용하여 구한다. 장애함수의 가중치  $\gamma$ 의 초기치  $\gamma_0$ 를 정한다.

②  $i=0, 1, \dots, n$ 에 대하여  $J_o(\{\zeta^{(i)}\} + s^{(i)}\{d^{(i)}\})$ 를 최소로 하는  $s^{(i)}$ 를 황금분할 탐색법과 같은 1차원 탐색법을 이용하여 구한다.

③ 다음을 계산한다.

$$\begin{aligned} \{\zeta^{(i+1)}\} &= \{\zeta^{(i)}\} + s^{(i)}\{d^{(i)}\} \\ \{d^{(i+1)}\} &= -\nabla J_o(\{\zeta^{(i+1)}\}) + \beta^{(i)}\{d^{(i)}\} \end{aligned}$$

$$\text{단, } \beta^{(i)} = (\|\nabla J_o(\{\zeta^{(i+1)}\})\| / \|\nabla J_o(\{\zeta^{(i)}\})\|)^2$$

④ 수렴판정하고 수렴하지 않았으면  $\gamma^{k+1} = R\gamma^k$  ( $R < 1$ )로 장애함수의 가중치를 변화시켜서 ②과정으로 되돌아 간다.

그리고 동시최적화를 수행한 결과의 전상태 feedback 및 출력 feedback의 주파수 특성은 다음과 같이 구해진다. 먼저 식(12) 및 식(13)의 전상태 feedback에 대한 모드 좌표에서의 상태변수의 응답 스펙트럼은 다음과 같다.

$$\{x(\omega)\} = (j\omega[I] - [A_1])^{-1}[D]\{w(\omega)\} \tag{38}$$

$$\text{단, } [A_1] = [A] - [B][F]$$

식(38)을 물리적 좌표계로 변환하기 위해서 식(9)를 이용하면, 상태변수  $\{x(\omega)\}$ 는 물리좌표  $\{q\}$ 와 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}(\omega) \\ q(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\Phi] & [0] \\ [0] & [\Theta] \end{Bmatrix} \{x(\omega)\} = [Z]\{w(\omega)\} \tag{39}$$

$$\text{단, } [Z] = \begin{Bmatrix} [\Phi] & [0] \\ [0] & [\Theta] \end{Bmatrix} (j\omega[I] - [A_1])^{-1}[D]$$

그러므로 응답의 power 스펙트럼은 다음의 식으로부터 구해진다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix} \{ \dot{q} \}^T \{ q \}^T &= [Z]\{w(\omega)\} \{w(\omega)\}^T [Z]^T \\ &= [Z][W][Z]^T \end{aligned} \tag{40}$$

그리고 제어력에 대한 power 스펙트럼은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \{u(\omega)\}\{u(\omega)\}^T \\ & = [F]\{x(\omega)\}\{x(\omega)\}^T [F]^T [F](j\omega[I] - [A_1])^{-1} \\ & \quad [D][W][D]^T (j\omega[I] - [A_1])^{-T} [F]^T \end{aligned} \quad (41)$$

DVDFB 제어에 대한 응답 스펙트럼은 전상태 feedback의  $[F]$  대신  $[F_1][C]$ 를 이용하여 마찬가지로 방법으로 구할 수 있다.

### 5. 수치결과 및 고찰

시뮬레이션에서 이용한 구조물의 재료는 탄성계수  $E=0.71 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ , 비중  $\rho=27.55 \times 10^{-7} \text{ kg/mm}^3$ , 구조물의 전체길이는  $l=10^5 \text{ mm}$ , 구조물의 높이는  $20 \text{ mm}$ 로 하였으며 질량변환 상수  $\alpha=10.0$ 으로 하였다. 분포하중 외란은 유연보의 중심으로부터 거리에 따라서 비례적으로 증가하는 백색잡음으로 가정하였다. 구조계와 제어계의 동시최적화를 위하여 외란에 대한 구조물의 변위 크기를 제한조건으로 하고 제어계를 포함한 구조물 질량을 최소화하기 위한 tapered 유연보의 형상과 제어계를 동시최적설계 하였다. 식(33)의 변위의 크기에 대한 제약조건  $\sigma_i^*$ 에 따른 동시최적화 수행결과를

Figs. 3~6에 나타냈다. 설계변수는 좌우대칭을 고려한 tapered 유연보의 5점에서의 폭과 제어 가중치  $k$ 로 설정하였으며 균일보로 가정한 경우와 성능을 비교하였다. 그림에서  $\square$  및  $+$ 는 유연보의 5점에서의 폭과 제어 가중치를 설계변수로 설정한 경우의 LQG 제어 및 DVDFB 제어로 동시최적화를 수행한 결과이며,  $\circ$  및  $\triangle$ 는 균일보에 대하여 LQG 및 DVDFB 제어로 동시최적화를 수행한 결과이다. Fig. 3은 변위 제약조건  $\sigma_i^*$ 에 따른 식(32)의 목적함수  $J$ , Fig. 4는 구조물의 질량  $m_s$ , Fig. 5는 제어력의 크기  $\sigma_2$ , Fig. 6은 제어 가중치  $k$ 의 결과이다. 구조물의 변위 구속조건  $\sigma_i^*$ 가 증가할

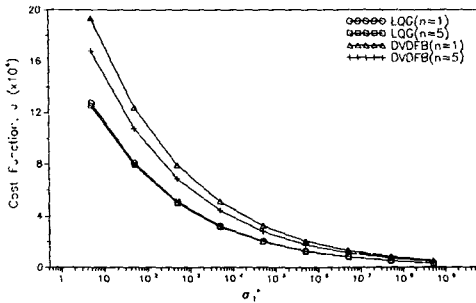


Fig. 3 Cost function

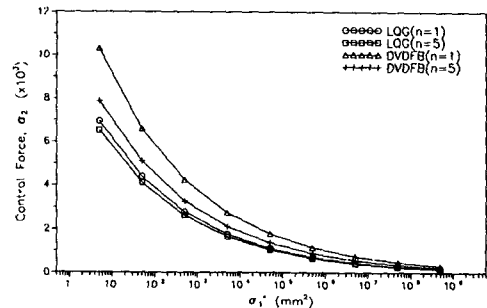


Fig. 5 Variance of the magnitude of control force

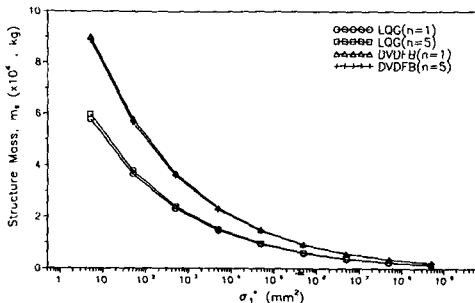


Fig. 4 Structural mass

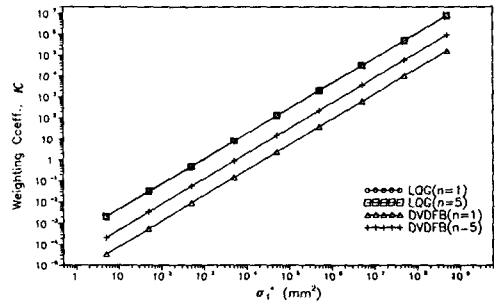


Fig. 6 Weighting coefficient of control force

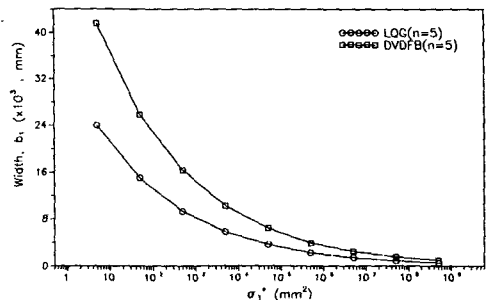


Fig. 7 Optimal width of beam at position 1

수목 목적함수, 구조물 질량 및 제어력이 감소하며, 제어력 가중치가 커짐을 알 수 있다. 그리고 LQG 제어에 의한 동시최적화가 설계변수의 개수에 관계없이 DVDFB 제어에 의한 동시최적화보다 성능이 뛰어난 것을 알 수 있다. 구조물의 폭에 대한 설계변수의 수가 증가하여도 구조물의 질량에는 큰 차이를 나타내지 않았으나 제어력은 감소함을 알 수 있다. Figs. 7~11은 tapered 유연보의 5점에서의 폭과 제어 가중치를 설계변수로 선정하여 변위 응답의 최대 허용값  $\sigma^*$ 에 따른 동시최적화 수행 결과이다. 변위 응답의 최대 허용값  $\sigma^*$ 가 커질수록 beam의 폭이 작아져서 구조물의 질량이 작아짐을

알 수 있습니다. 5점의 위치는 Fig. 1에 나타내져 있다. Fig. 7의  $b_1$ 은 보의 끝단에서 폭을 의미하며, 차례로 Fig. 11의  $b_5$ 는 보의 중앙에서의 폭을 의미한다. Fig. 12는 설계변수를 균일보의 폭과 제어 가중치  $k$ 로 설정한 경우의 최적 구조물 형상의 변화를 나타낸다. 그림에서 ○는 LQG 제어에 의한 동시최적화 수행 결과이며, □는 DVDFB 제어에 의한 동시최적화 수행 결과이다. 변위 제약조건  $\sigma^*$ 가 증가할수록, 즉 구조물의 변위가 커질수록, 구조물의 폭은 감소함을 알 수 있다. LQG 제어와 DVDFB 제어에 의한 동시최적화 결과를 비교하면 변위 제약조건이 커질수록 구조물이 비슷한 형상을 가지나, 변위 제약조건이 작아지면 유연보의 중앙부에서의 형상은 비슷하지만 끝단에서의 형상의 차이가 커짐을 알 수 있다. Fig. 13은 변위 제약조건  $\sigma^*=5.0$ 인 경우의 유연보의 형상을 나타낸다. 유연보의 5점의 폭을 설계변수로 설정한 경우가 균일보로 설정한 경우보다 중앙부에서는 폭이 작게, 끝단부에서는 폭이 크게 되었다. Figs. 14, 15는 변위 제약조건  $\sigma^*=5.0$ 이고 보의 5점의 폭과 제어 가중치를 설계변수로 설정한 경우의 식 (40)로부터

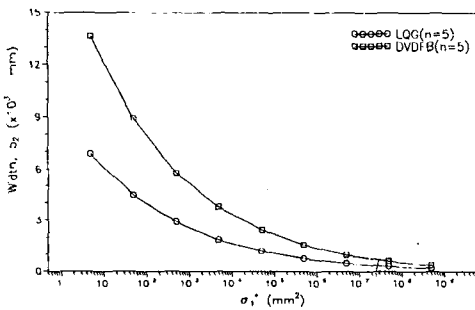


Fig. 8 Optimal width of beam at position 2

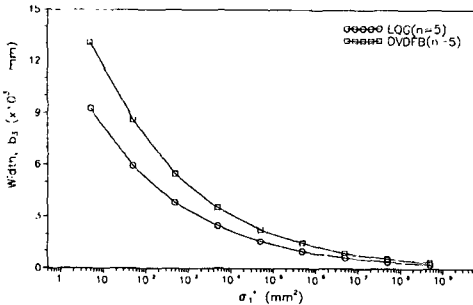


Fig. 9 Optimal width of beam at position 3

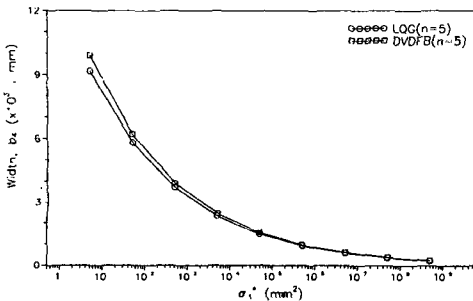


Fig. 10 Optimal width of beam at position 4

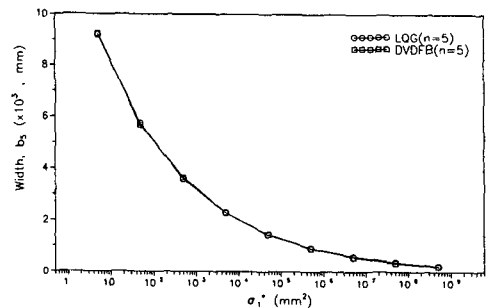


Fig. 11 Optimal width of beam at position 5 (center of beam)

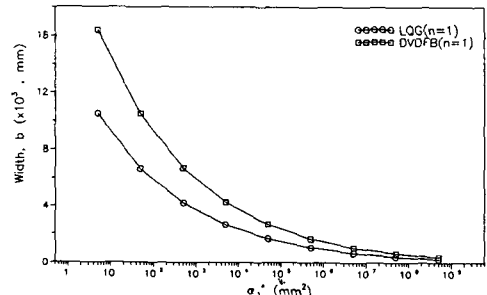


Fig. 12 Optimal width of uniform beam

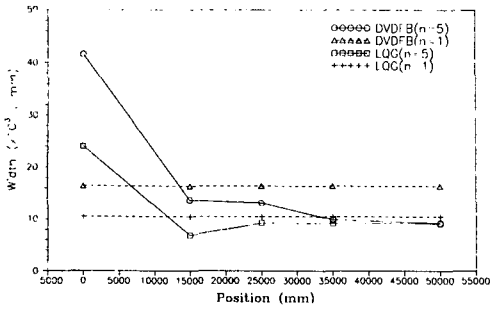


Fig. 13 1/2 Shape of free-free tapered flexible beam ( $\sigma_1^* = 5.0$ )

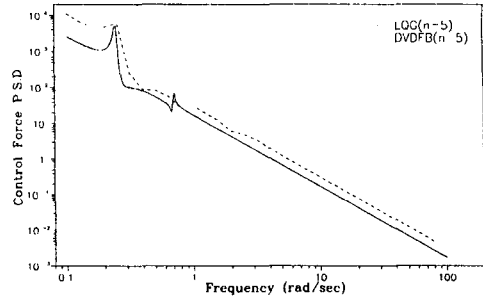


Fig. 16 Power spectral density function of the magnitude of control force located at position 1 ( $\sigma_1^* = 5.0$ )

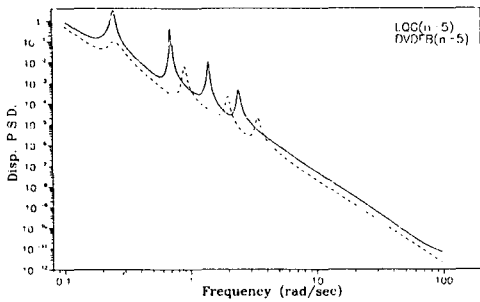


Fig. 14 Response power spectral density function of displacement at position 1 ( $\sigma_1^* = 5.0$ )

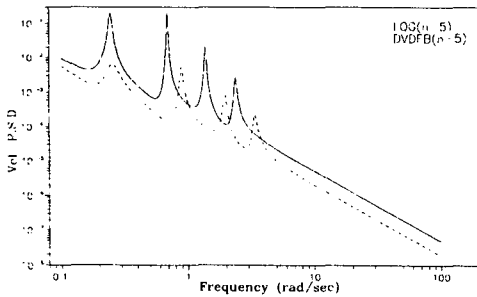


Fig. 15 Response power spectral density function of velocity at position 1 ( $\sigma_1^* = 5.0$ )

추정한 보의 끝단에서의 변위응답 및 속도응답의 파워스펙트럼을 나타낸다. 실선은 LQG 제어, 점선은 DVDFB 제어에 의한 동시최적화 결과이다. 그리고 Fig. 16은 식(41)로부터 추정된 제어력의 파워스펙트럼을 나타낸다. LQG 제어를 이용한 경우가 DVDFB 제어를 이용한 경우보다 응답이 약간 크게 나타났지만, 제어력의 크기는 모든 주파수에서 작아서 구조계와 제어계를 합한 질량인 목적함수는 더 작은 값을 갖는다.

## 6. 결 론

- (1) 제어계 내장 구조계의 성능향상을 위한 동시 최적화기법을 개발하였으며, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 유용성을 검증하였다.
- (2) 백색잡음의 분포하중을 받는 양단 자유 tapered 유연보의 변위응답 제약 조건하에서 구조계와 제어계의 질량의 합을 최소화하기 위한 구조물의 형상과 제어계의 동시최적설계를 수행하였다.
- (3) 유한요소 모델에 의한 최적형상설계시 설계 변수가 많아지는 단점을 선형 tapered 유연보 모델을 이용하여 요소분할수를 많이 하여도 적은 수의 설계변수로 동시최적화가 가능하게 하였다.
- (4) 센서와 구동기의 동위치 제어인 DVDFB 제어를 이용하여 안정성이 보장되었으며, 모드의 수와 구동기의 수가 일치할 필요가 없었다.
- (5) 유연보의 강체 모드뿐만 아니라 탄성모드의 제어를 동시에 고려하였다.
- (6) 동시최적화를 수행함으로써 제어성능을 현저히 향상시킬 수 있었다.

## 참고문헌

- (1) 多田, 田村, 池田, 1992 “制御を考慮するトラス構造物の最適設計,” 日本機械學會論文集(C編), Vol. 58, No. 545, pp. 99~105.
- (2) Blevin, W. K. and Park, 1988 “Structural Tailoring and Feedback Control Synthesis: An Interdisciplinary Approach,” *J. Guidance*, Vol. 13, No. 3, pp. 424~429.



- (3) Lim, K. B. and Junkins, 1988 "Robust Optimization of Structural and Controller Parameters," *J. Guidance*, Vol. 12, No. 1, pp. 89~96.
- (4) Bendsoe, Olhoff, Taylor, 1987 "On the Design of Structure and Controls for Optimal Performance of Actively Controlled Flexible Structures," *Mech. Struct. & Mach.*, Vol 15., No. 3, pp. 265~295.
- (5) 김창동, 정의봉, 1993 "능동형 차량 현가장치의 성능향상을 위한 구조 최적화," 대한기계학회 논문집, Vol. 17, No. 6, pp. 1381~1388.
- (6) Yamakawa, H., 1989 "A Unified Method for Structural and Control Optimization of Non-linear Mechanical and Structural Systems," *Computer-Aided Optimum Design of Structure*, Vol. 2, Springer-Verlag, pp. 287~298.
- (7) 梶原, 長松, 1990 "感度解析による構造系の同時最適設計法," 日本計測自動制御學會論文集, Vol. 26, No. 10, pp. 1140~1147.
- (8) Onoda, J. and Haftka, R. T., 1987 "An Approach to Structure/Control Simultaneous Optimization for Large Flexible Spacecraft," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 8.
- (9) 岩登, 池田, 河村, 安達, 1991 "柔軟構造物の構造と制御系の同時最適設計法の開発," 日本機械學會論文集, Vol. 57, No. 534, pp. 407~412.
- (10) Petyt, M., 1990 "Introduction to Finite Element Vibration Analysis," Cambridge University Press, pp. 22~52.
- (11) 長松昭男, 1993 모드解析入門, コロナ社, pp. 79~141.
- (12) 棋木, 添田, 中溝, 1985 確率システム制御の基礎, 日新出版.
- (13) 粧谷, 池田, 本田, 1989 "Collocated Feedbackによる宇宙構造物の最適制御," 日本計測自動制御學會論文集, Vol. 25, No. 8, pp. 882~888.
- (14) Kosut, R. L., 1970 "Suboptimal Control of Linear Time-Invariant Systems Subject to Control Structure Constraints," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-15, No. 5, pp. 557~563.
- (15) Arora J. S., *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill, pp. 278~340, 1989.