

〈論 文〉

직사각형 용기 내에서의 유동 및 교반특성
— 중앙평판 길이의 영향 —

문종춘* · 서용권**
(1994년 3월 2일 접수)

Fluid Flow and Stirring in a Rectangular Tank
— Effect of the Plate Length —

Jong Chun Moon and Yong Kweon Suh

Key Words : Stirring(교반), Chaos(혼돈), Vortex Shedding(와류shedding), Poincaré Section(푸앵카레 단면), Unstable Manifold(불안정 다양체), Lyapunov Exponent(리아푸노프 지수)

Abstract

In this paper, the fluid flow and stirring in a rectangular tank focussing on the effect of the plate length is studied numerically and experimentally. the flow model and the method of analysis are the same as those reported previously. The stirring effect changes considerably when the plate length is varied. When the plate is short, the friction at the bottom wall reduces the strength of the vortical flow resulting in a lower stirring effect. When the plate is long, the stirring effect is decreased due to the growth of the regular regions near the lower corners. The stirring effect is the best when the plate length is roughly half the width of the container.

기 호 설 명

- a : 무차원 변수 (ω_n/ω)
- b : 무차원 변수 (r/l)
- B : 평판의 길이 (Fig. 1)
- d : 무차원 변수 (H/l)
- d_0 : 두 입자 사이의 초기 무차원 거리
- d_N : 두 입자 사이의 N 주기 후의 무차원 거리
- e : 평판의 무차원 길이 (B/l)
- g : 중력가속도
- H : 용기의 폭 (Fig. 1)
- l : 용기의 가로길이 (Fig. 1)
- r : 용기의 운동진폭 (Fig. 1)
- Re : 레이놀즈 수 ($l^2\omega/\nu$)
- t : 무차원 시간

- t^* : 시간 (Fig. 1)
- x^* : 용기의 가로 방향 좌표 (Fig. 1)
- y^* : 용기의 세로 방향 좌표 (Fig. 1)
- Λ : 무차원 Lyapunov 지수
- ν : 동점성계수
- ω : 용기의 운동각속도
- ω_n : 1차원 비점성 해석에 따른 액면의 공진각속도 ($\pi\sqrt{gh}/l$)

1. 서 론

유체유동을 이용한 혼합(mixing) 및 교반(stirring)은 공학적으로 아주 중요하며, 여러 분야에서 다양하게 적용되어 왔다. 특히 대양에서의 오염물질의 혼합과 확산문제,⁽¹⁾ 각종 공정에서 액체와 액체 또는 액체와 고체의 혼합문제⁽²⁾ 및 미생물의 배

*동아대학교 대학원 기계공학과
**정회원, 동아대학교 기계공학과

양에 있어서 세포성장률 촉진시키는 문제⁽³⁾ 등에서 중요하게 다루어지고 있다.

최근들어, 혼돈(chaos)의 개념을 이용하여 교반 혹은 혼합의 근본 원리와 구조를 밝히려고 시도하고 있고, 고점도의 유체를 대상으로 하는 분야(예를 들면, polymer processing)에서는 그 전망이 아주 밝다.⁽⁴⁾ 그리고 점성이 낮은 유체인 경우에는 이상유동의 가정하에서 단순화된 유동모델을 도입하여 혼합효과를 성공적으로 다루고 있다.^(5,6)

최근 서와 문^(7,8)은 이와 같이 단순화된 유동모델이 아닌 실제 유동모델의 유동⁽⁷⁾ 및 교반문제⁽⁸⁾를 연구한 바 있다. 이들의 주된 관심은, 직사각형 용기 내에 유체를 부분적으로 넣고 수평으로 왕복운동시킬 때 중앙의 수직평판에 의해 와류shedding(vortex shedding)이 어떻게 형성되며, 이로 인해 교반의 효과가 어떠한지 살펴보는 것이었다. 특히 주목할 만한 결과는, 유한한 레이놀즈수의 실제 유동에서도 혼돈적 이론이 적용될 수 있으며, 그 수치해석적 결과가 실험결과와 잘 일치하고, 나아가 교반의 효과를 정량화시킬 수 있다는 점이다.

이 연구모델은 생체기술(biotechnology)에 응용하려는 목적에서 비롯된 것이다. 그러나, 지금까지는 와류shedding을 일으키는 중앙평판의 길이를 용기의 폭의 반으로 하여 늘 일정하게 하여 왔다. 따라서, 평판의 길이를 다양하게 변화시켰을 때 평판의 길이가 교반효과에 어떠한 영향을 미치는가를 연구해 볼 필요가 있다. 극단적인 경우지만, 평판의 길이가 0이거나, 또는 용기의 폭과 같으면, 와류shedding은 전혀 일어나지 않을 것임은 분명하다. 본 연구에서는, 이와 같은 관점에서 중앙평판의 길이를 인자로 취하고 그것이 유동과 교반의 특성에 미치는 효과를 조사하고자 한다.

2. 유동모델, 유동해석 및 교반해석

본 연구에 사용된 유동모델은 Fig. 1에서 나타낸 바와 같이 수직평판이 설치된 직사각형 용기내에 유체를 얇게 담아 평판에 수직인(수평) 방향으로 요동운동시키는 문제이다. 본 유동모델에 대한 유동해석, 교반해석 및 실험의 방법은 참고문헌^(7,8)에서 설명한 내용과 동일하다. 여기서는 이에 대해 간략히 언급하기로 한다.

우선, 유동해석을 위하여 지배방정식인 3차원 Navier-Stokes 방정식을 천수근사법에 의해 2차원

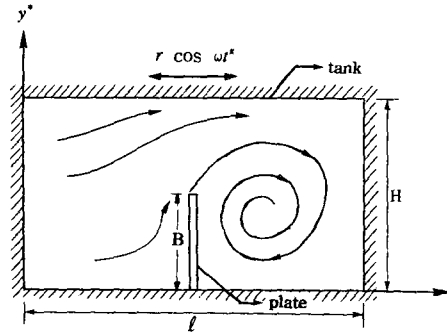


Fig. 1 The flow model, and the dimensional coordinates

화시킨다. 수평단면상의 공간좌표를 용기의 가로길이 l 로써, 시간을 용기의 요동운동 각속도 ω 로써, 속도를 용기의 최대 운동속도 $r\omega$ 로써, 액면의 높이를 요동운동 없을 때의 액체의 깊이 h 로써 각각 무차원화시키면 아래와 같은 5개의 무차원 인자가 도출된다.

$$a = \omega_n / \omega, \quad b = r / l, \quad c = a^2 / (\pi^2 b)$$

$$d = H / l, \quad Re = l^2 \omega / \nu$$

이와 같이 무차원화된 지배방정식을 4계의 Runge-Kutta법으로 수치해석하여 속도장과 액면의 높이를 각 격자점에서 시간의 함수로 구한다. 여기서, 유동장이 주기적인 것을 확인하고, 한 주기 동안의 속도를 저장시킨다. 다음, 교반해석에서는 앞에서 구한 속도장을 써서 유체입자의 궤적(pathline)을 구하는데, 운동방정식의 적분에는 역시 4계의 Runge-Kutta법을 사용한다. Poincaré 단면, 불안정 다양체 및 Lyapunov지수는 이 단계에서 구한다.

3. 실험방법

가시화 실험에 사용된 유체는 부동액이며, 부동액의 동점성계수를 Ostwald 점도계로 측정된 결과 $\nu = 1.742 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 이었다.

실험은 그 목적상 두가지로 나누어 수행하였다. 유동의 가시화를 위하여 용기 내의 유체표면에 폴리에틸렌(polyethylene) 가루를 뿌려 유체입자의 짧은 시간 동안(약 1/15초)의 궤적선을 연속 촬영하였으며, 적절한 조명에 의하여 가루의 자취가 가능한 선명히 나타나도록 하였다. 교반특성을 조사하기 위해서는 유체표면에 제도용 잉크를 한 방울 떨어뜨려 이것이 늘어지는 모양을 또한 연속적으로

촬영하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 매개변수

본 연구와 관련된 매개변수는 앞서도 언급한 바와 같이, a, b, d, Re 및 e 이다. 여기서 평판의

무차원 길이인 e 외의 모든 변수의 값들은 $a=1.5, b=0.1, d=0.583, Re=1000$ (수치해석), 3876(실험)과 같이 고정시켰다. e 는 0.1~0.8까지 0.1 간격으로 변화시켰다.

4.2 유동특성

Fig. 2는 수치해석 결과로서 여러가지 e 에 대한

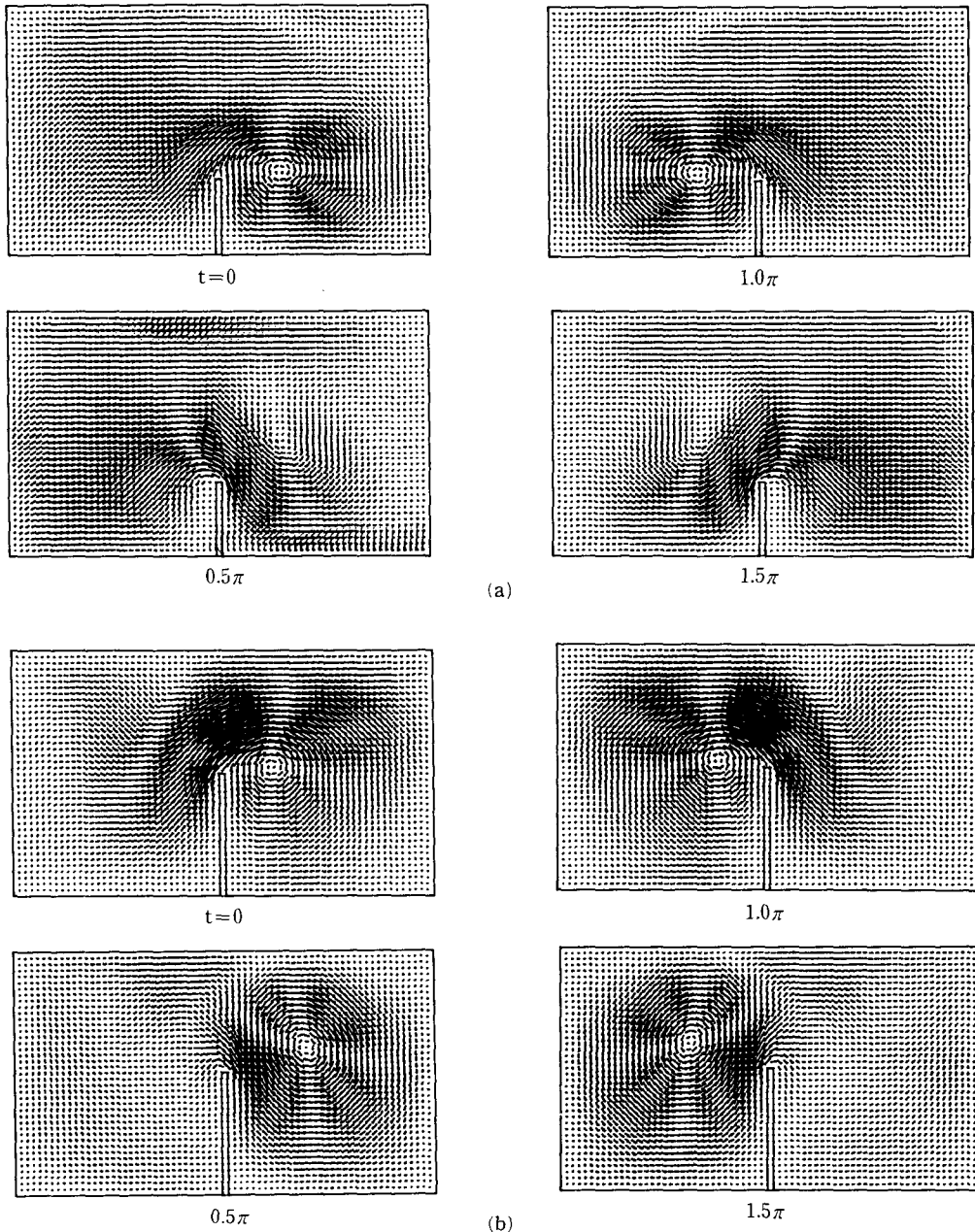


Fig. 2 (continued)

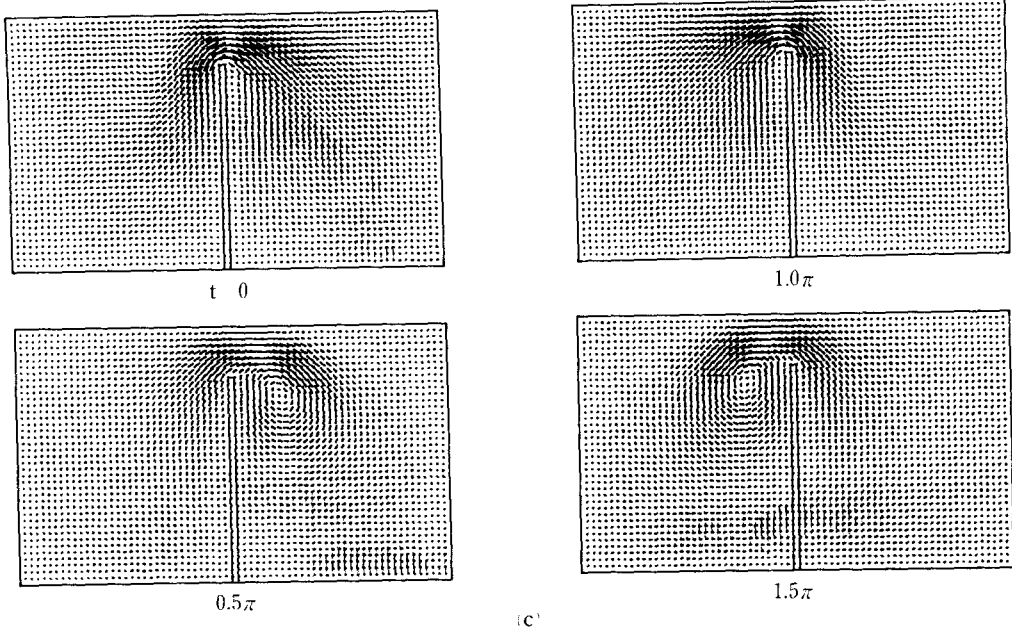


Fig. 2 Numerical result of velocity vectors in time series for (a) $c = 0.3$, b) $c = 0.5$, c) $c = 0.8$

속도분포를 나타낸다. $c < 0.3$ 과 $c > 0.7$ 의 경우에
서는 전체적으로 와류가 약하고 그 크기도 작다.
그 공통된 이유는 상류(웨딩 반대 측)로부터 접근
하는 유동이 하부 또는 상부표면과의 마찰로 인하

여 접근유동의 강도가 약해지고, 또한 웨딩된 와류
가 용기의 하부표면 또는 상부표면과의 마찰로 인
하여 급히 약해지기 때문이다. 또한, $c \leq 0.3$ 의 경
우에는 c 가 큰 경우에 비하여 관로의 수축에 따른

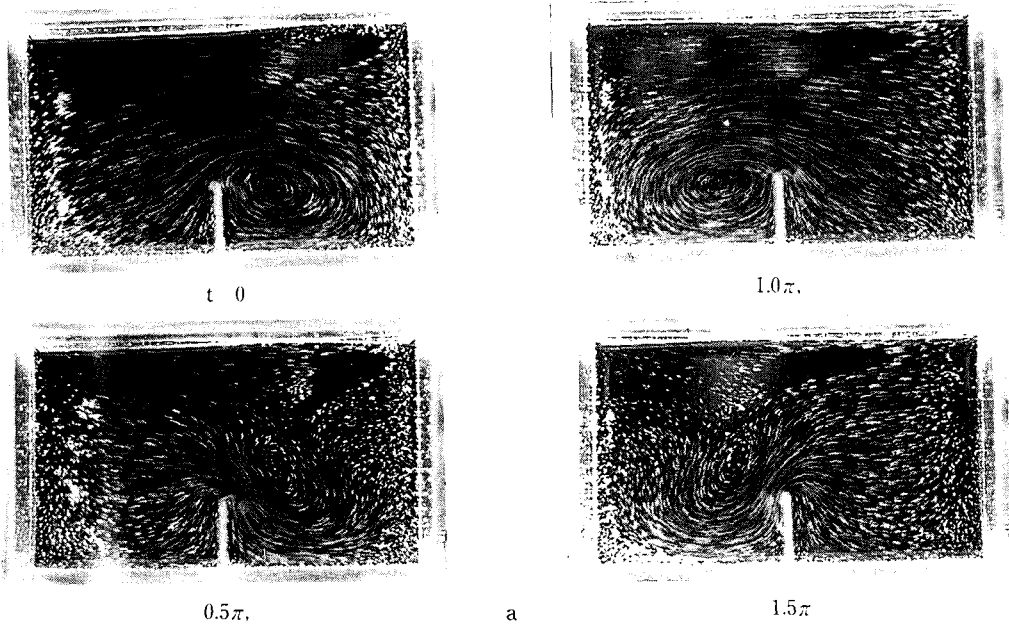


Fig. 3 (continued)

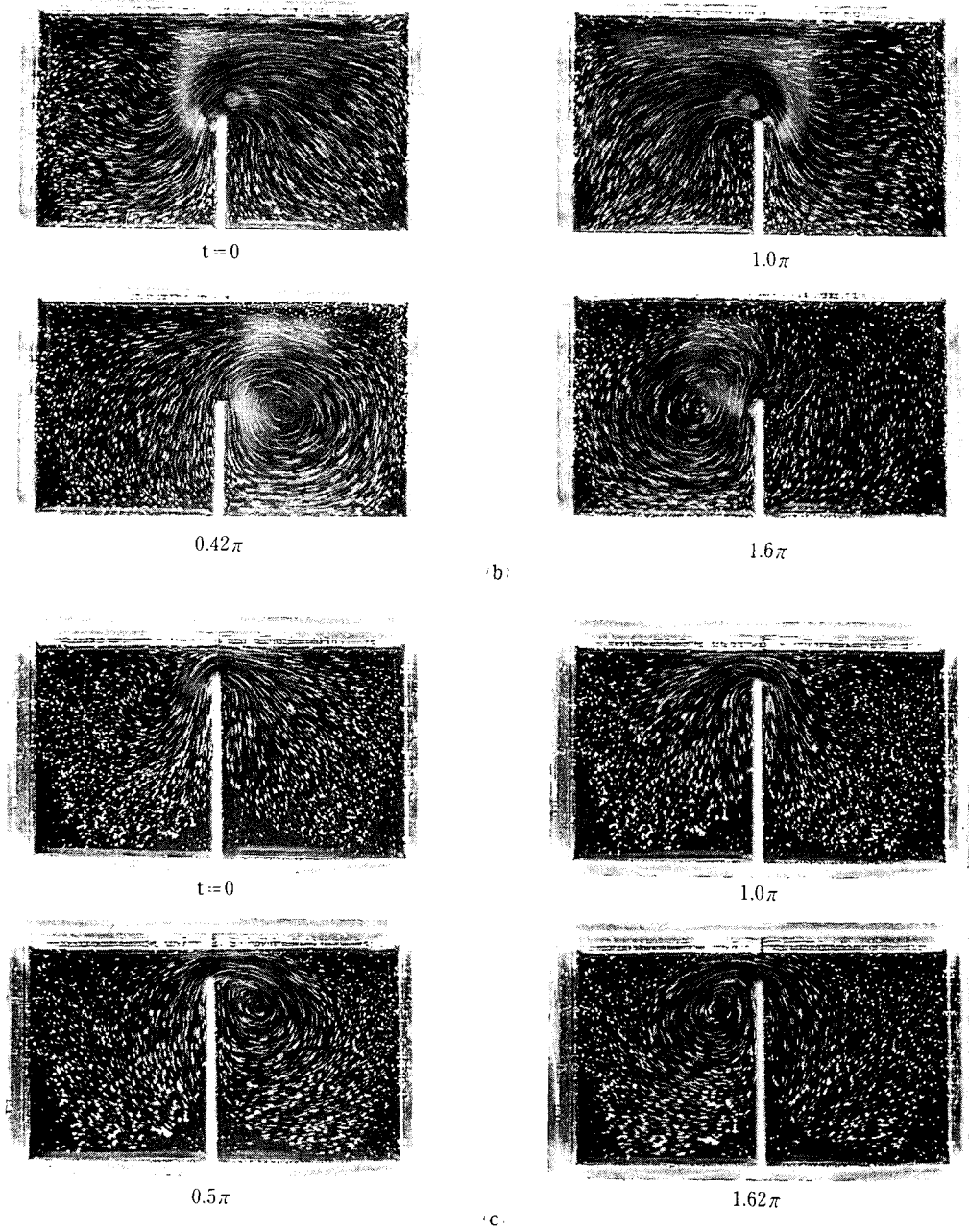


Fig. 3 Flow visualization in time series for (a) $e=0.3$, (b) $e=0.5$, (c) $e=0.8$

속도의 증가와 같은 효과가 작기 때문이다. 한편, $e \geq 0.7$ 의 경우에는 판로의 수축에 따른 속도의 증가가 커서 와류의 채닝이 강할 것 같으나, 실제로는 모든 유체가 상부표면과 평판 끝 사이의 통로를 통해서 흐르지 않고 많은 부분이 중앙 평판의 하부측으로 흘러 그 부분의 액면을 높여주기 때문

에 채닝효과가 크기 못하다. 또 다른 하나의 경향을 찾아보면, e 가 증가함에 따라 와류 유동이 가장 강한 시점이 늦어진다. 이것은 평판의 길이가 긴 경우에는, 앞에서도 언급한 바와 같이 많은 유체가 평판 하부 근처에 모여 액면을 높이며 시간이 지남에 따라 다시 이 부분의 유체가 상부로 이동하

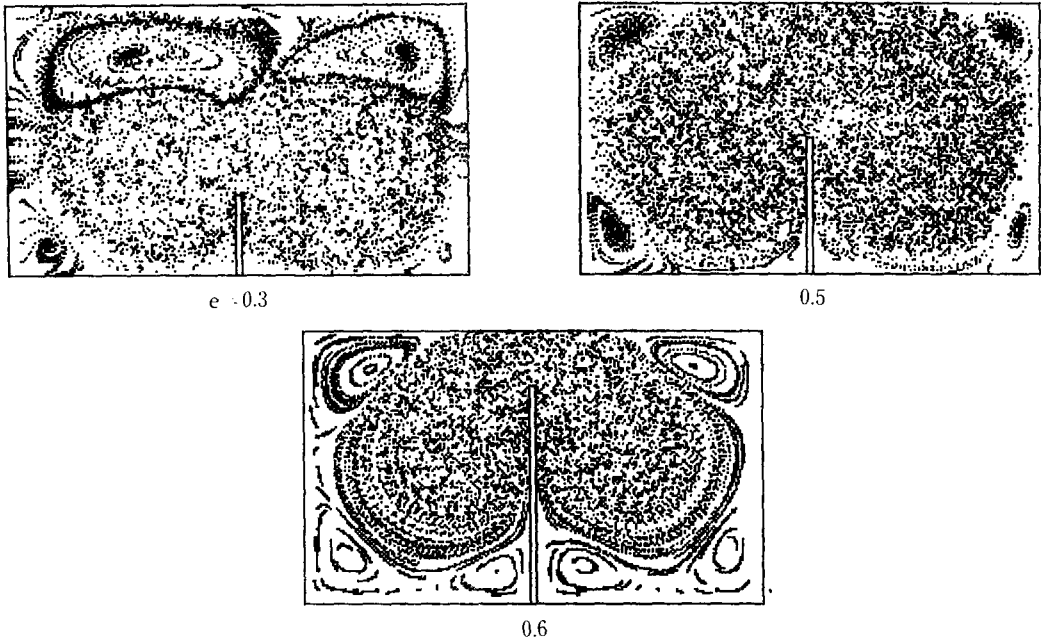


Fig. 4 Poincaré maps for various values of e shown

면서 틱새를 통과하기 때문이다. 다시말해 평판이 길 때 평판의 하부는 유체의 저장 역할을 하기 때문이다.

Fig. 3은 유동을 가시화 촬영한 결과를 나타낸 것이다. $e=0.5$ 에서 와류패딩이 가장 활발하며, e 가 작은 경우는 와류가 좌우측으로 길게 늘어선 모양을 보이고, e 가 큰 경우에는 와류 유동이 약하고 그 크기도 작음을 알 수 있다. 수치해석 결과와 비교해 보면 전반적으로 잘 일치함을 알 수 있다. 이전의 연구^(7,8)에서도 언급되었지만, 수치해석과 실험에서 Re 를 달리하여 비교한 것은, 수치해석에서 바닥의 마찰효과를 고려하지 않음으로 인하여 같은 Re 에서는 잘 맞지 않기 때문이다. 추후, 바닥에서의 Ekman pumping 효과를 고려한 3차원적 연구가 필요하다 하겠다.

4.3 Poincaré 단면

Fig. 4는 여러가지 e 에 대한 Poincaré 단면을 보여 주고 있다. 점들이 무질서하게 분포되어 있는 지역이 혼돈영역(chaotic region)이고 곡선의 형태를 보이는 지역이 정규영역(regular region)이다. 정규영역에서는 유체뭉치가 시간에 선형적으로 비례하여 늘어지고, 혼돈영역에서는 그것이 시간에 지수적으로 비례하여 늘어진다. 따라서 정규영역에

서는 교반이 미흡하고 혼돈영역에서는 탁월하다.

Fig. 4를 보면, e 가 작을 때 상부에서 정규영역이 커짐을 알 수 있고, e 가 증가하면 4개 구석 주위의 정규영역이 점점 커지며, 특히 중앙평판 하부의 좌우 구석 주위에 정규영역이 형성되어 점점 커지면서 전체적으로 혼돈영역을 감소시킨다. 대체적으로 보면 $e=0.4\sim 0.5$ 에서 혼돈영역이 가장 크고, 따라서 가장 넓은 지역에 걸쳐 교반이 양호함을 짐작할 수 있다.

4.4 불안정 다양체

불안정 다양체(unstable manifold)는 혼돈적 교반의 영역에서 유체뭉치가 늘어지는 모양을 대변하는 것이다. 이것은 유체뭉치의 늘임-접힘과정의 이해로부터 교반효과를 정성적으로 파악할 수 있게 할 뿐만 아니라 가시화 실험과 수치해석의 결과를 비교할 수 있게 한다.

Fig. 5는 e 를 다양하게 변화시켜 가면서 수치해석으로 구한 불안정 다양체이다. $e=0.4\sim 0.6$ 에서 전반적으로 접힘과 늘임이 좋게 나타남을 알 수 있고, 그 이상에서는 다시 그 접힘효과가 감소하면서 그 퍼진 모양도 점점 작아진다. (본 모델에 대한 유체뭉치의 늘임·접힘과정은 참고문헌⁽⁸⁾에 잘 설명되어 있다) 이는 동일한 조건의 Poincaré 단면에

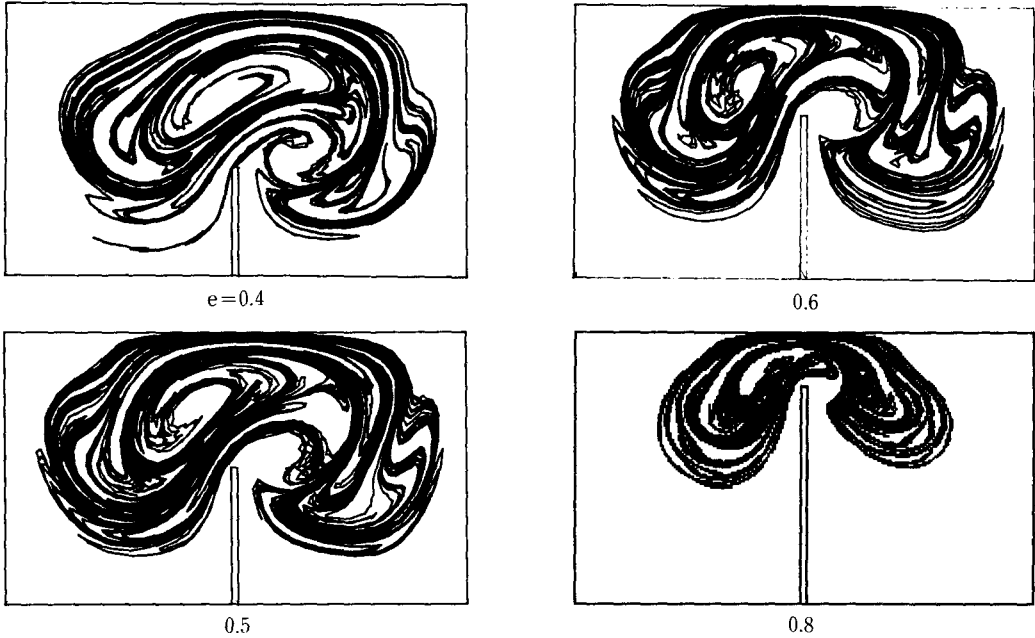


Fig. 5 Unstable manifolds for various values of e shown

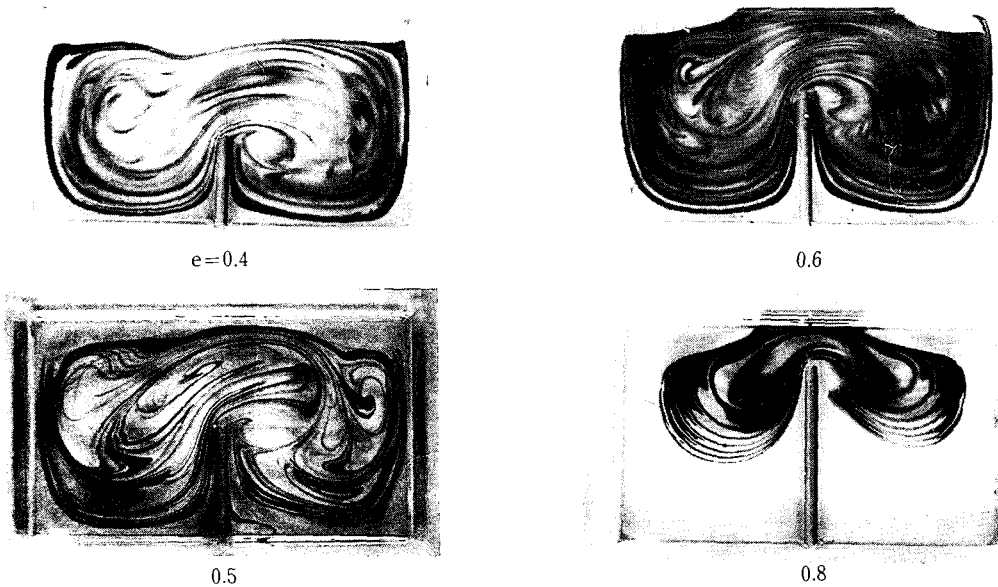


Fig. 6 Experimental results of dye stretching for various values of e shown

서 그 혼돈영역이 작은 것과 일치하며, 용기의 모든 구석에서 규칙영역이 증대하기 때문이다.

Fig. 6은 염료를 사용한 가시화 촬영의 결과이며, 용기 벽면 근처의 변두리 지역을 제외하면 수

치해석 결과와 전반적으로 잘 일치한다. 이는, Re 의 불일치를 제외하면, 본 수치해석 모델이 타당하며, 따라서 교반효과를 수치해석의 결과로부터 분석할 수 있음을 입증한다.

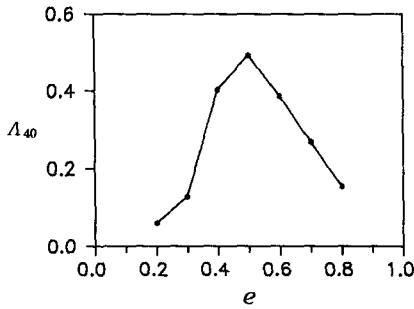


Fig. 7 Lyapunov exponent Λ_{40} versus e

4.5 Lyapunov 지수

Lyapunov 지수는 아주 가까이 존재하는 두 유체입자가 시간에 따라 지수적으로 멀어지는 정도를 긴 시간에 걸쳐 평균하여 나타낸 양이다. 교반효과는 이 양의 대소에 의해 판별할 수 있다.⁽⁴⁾ 유동장이 주기적일 때 무차원 Lyapunov 지수 Λ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N, \quad \Lambda_N = \frac{1}{N} \ln \frac{d_N}{d_0} \frac{1}{a}$$

여기서, d_0 는 두입자 사이의 초기 무차원 거리, d_N 는 N 주기 후의 무차원거리, a 는 무차원 주기이다.

Fig. 7은 수치해석으로 구한 Λ_{40} 을 보여주고 있다. (Λ_{40} 의 하첨자는 40주기까지의 계산결과임을 의미한다) $e=0.5$ 까지는 계속 증가하다가 그 후는 오히려 감소한다. 즉, $e=0.5$ 에서 교반효과가 가장 뛰어나며, 이는 앞의 Poincaré 단면과 불안정 다양체에서의 정성적 분석결과와도 일치한다.

5. 결 론

직사각형 용기 내에서의 와류쇄딩에 따른 유동특성 및 교반특성을 조사하였다. 수치해석과 가시화 실험을 통해 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 중앙평판의 길이가 증가함에 따라 와류유동

이 가장 강한 시점이 늦어진다.

(2) 중앙평판의 길이 변화에 따라 와류쇄딩의 형태가 상당히 달라짐을 알 수 있었다. 중앙평판이 길이가 짧으면 상, 하부표면과의 마찰 및 자유표면의 특징적 거동으로 인하여 와류 강도가 약해진다.

(3) 중앙평판이 길어지면 평판 하부의 구석 근처에서 규칙영역이 증대하며, 이로 인해 교반효과가 감소한다. 또한 평판이 짧으면 와류쇄딩이 강하지 못해 교반이 미약하다.

(4) Lyapunov 지수는 $e \approx 0.5$ 에서 최대의 값을 가진다.

(5) 종합적으로 볼 때 $e \approx 0.5$ 에서 가장 효과적인 교반이 일어난다.

참고문헌

- (1) Brown, M.G. and Smith, K.B., 1991, "Ocean Stirring and Chaotic Low Order Dynamics," *Phys. Fluids A*, Vol. 3, No. 5, Pt. 2, pp. 1186 ~ 1192.
- (2) Tatterson, G. B., 1991, *Fluid Mixing and Gas Dispersion in Agitated Tanks*, McGraw Hill.
- (3) Mantell, S. H. and Smith, H., 1983, "Plant Biotechnology," Cambridge University Press.
- (4) Ottino, J. M., 1989, "The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport," Cambridge University Press.
- (5) Aref, H., 1984, "Stirring by Chaotic Advection," *J. Fluid Mech.*, Vol. 143, pp. 1~21.
- (6) Suh, Y. K., 1991, "A Chaotic Stirring by an Oscillating Point Vortex," *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 60, pp. 896~906.
- (7) 서용권, 문종춘, 1993, "보텍스쇄딩에 의한 얇은 직사각형 통내에서의 유동특성," 대한기계학회논문집, 제17권, 제8호, pp. 2122~2130.
- (8) 서용권, 문종춘, 1994, "얇은 직사각형 통내의 혼돈적 교반," 대한기계학회논문집 제18권, 제2호, pp. 380~388.