

〈論 文〉

등방성 및 복합재 플레이트용 16절점 요소의 강성행렬 계산

윤태혁* · 김정운* · 이재복** · 권영두***

(1994년 5월 7일 접수)

Evaluation of Stiffness Matrix of 3-Dimensional Elements for Isotropic and Composite Plates

Tae-Hyeok Yun, Jeong-Oun Kim, Jae-Bok Lee and Young-Doo Kwon

Key Words : Static Large Displacement Problem(대변위 정적문제), Relative Stiffness Stiffening Phenomenon(상대적 강성과잉현상), Gauss Integral Point(가우스적분점), Newton-Raphson Iteration Method(뉴턴-랩슨반복법), Stiffness Matrix(강성행렬), Reduced Integration(적분차수 축소)

Abstract

The stiffness of 6-node isotropic element is stiffer than that of 8-node isotropic element of same configuration. This phenomenon was called 'Relative Stiffness Stiffening Phenomenon'.⁽⁶⁾ In this paper, an equation of sampling point modification which correct this phenomenon was derived for the composite plate, as well as an equation for an isotropic plate. The relative stiffness stiffening phenomena of an isotropic plate element could be corrected by modifying Gauss sampling points in the numerical integration of stiffness matrix. This technique could also be successfully applied to the static analyses of composite plate modeled by the 3-dimensional 16-node elements. We predicted theoretical errors of stiffness versus the number of layers that result from the reduction of numerical integration order. These errors coincide very well with the actual errors of stiffness. Therefore, we can choose full integration of reduced integration based upon the permissible error criterion and the number of layers by using the theoretically predicted error.

기 호 설 명

- $[B_L]$: 선형 변위-변형률행렬
- $[B_{NL}]$: 비선형 변위-변형률행렬
- $[K_L]$: 선형 강성행렬
- $[K_{NL}]$: 비선형 강성행렬
- $\{F\}$: 등가 절점력벡터
- $\{P\}$: 외력벡터
- $\{U\}$: 계의 변위벡터

- R : 외부 가상일
- C_{ijrs} : 재료특성텐서
- ϵ_{ij} : Green-Lagrange 변형률텐서
- S_{ij} : 제2차 Piola-Kirchhoff 응력텐서

1. 서 론

오늘날 에너지 절약의 측면과 기계의 고속화·경량화 추세에 따라 복합재료의 사용이 급증하고 있는 실정이다. 그중 섬유강화수지 복합재료는 비강

*정회원, 경북대학교 대학원

**현대자동차(주) 상용사시 설계부

***정회원, 경북대학교 기계공학과

도(strength/weight)가 커서 항공·우주분야에서는 물론 기계공업을 비롯한 각종 산업분야에서 그 활용도가 증가하고 있고, 많은 연구가 이루어져 왔다.⁽¹⁾ 그리고 향후 자동차공업분야 등 여타 산업분야에서도 복합재료의 사용량이 증대할 것으로 생각된다. 이에 따라서 복합재료의 제조방법의 개발 및 개선, 정적·동적 파괴현상의 분석, 응력 해석법의 발전 등과 더불어 복합재료에 대한 효율적인 해석법에 대한 연구가 필요하다고 할 수 있다. 이러한 연구를 통해 보다 개선된 소재의 개발, 피로파괴 등에 대한 신뢰성있는 해석 및 예측 등을 기할 수 있고 또한 복합재료를 사용한 기계·구조물의 정밀한 설계를 도모할 수 있게 된다.

등방성 및 복합재 플레이트용 유한요소로는 3차원요소⁽²⁾와 3차원 요소의 자유도 수를 줄인 구조용 플레이트요소⁽³⁾가 있으며 이들은 모두 선형 및 기하학적인 비선형문제에 적용이 되어 왔다. 등방성 및 복합재 플레이트용 3차원 요소로는 20절점 요소와 16절점 요소가 많이 사용되고 있으나 이들 모두 구조용 요소에 비하여 자유도 수가 큰 단점이 있으며 특히 16절점 요소는 정확도가 다소 떨어지는 단점이 있다. 한편 구조용 플레이트요소로는 자유도의 일부가 비벡터 양임으로, 각 하중중분 단계를 세분하여 선형화분 한후 적분을 해야하는 문제점⁽³⁾이 있고 이를 효과적으로 수행하기 위한 방안⁽⁴⁾이 제시되고 있으나 문제가 완전히 해결되지는 않은 실정이다. 이와 유사한 문제가 2차원 굽힘문제에도 발생하며, 구조용 보요소로는 자유도의 일부가 비벡터양인 단점이 있고 8절점 요소는 자유도 수가 큰 단점이 있으며, 6절점 요소는 부정확한 문제가 있었다. 이런 문제를 해결하기 위해 6절점 요소의 가우스 적분점을 수정함으로 자유도 수가 작으면서도 8절점 요소에 가까운 정확성을 얻은 바 있다.⁽⁵⁾

본 연구에서는 2차원에서의 가우스 적분점 수정식을 3차원 굽힘문제에 확장 적용을 하여, 16절점 요소를 사용하면서 두께방향의 가우스 적분점을 수정함으로써 20절점 요소에 가까운 정확성을 얻고자 한다. 이를 위해 먼저 등방성 플레이트용 16절점 요소에 대한 가우스 적분점 수정식을 구하고, 유사한 과정을 거쳐 복합재 플레이트용 16절점 요소에 대한 가우스 적분점 수정식을 구한다. 이들 수정식의 타당성을 확인하기 위해 여러가지의 예를 들고, 그 결과를 20절점 요소의 결과 및 수정하지 않은 16절점 요소의 결과들과 비교·검토하였으며,

unidirectional lamina, woven lamina, braided lamina의 적층 각도에 따른 수정량을 구하였다.

한편, 복합재 플레이트의 경우는 강성행렬 계산시 각 적층판에 대한 적분을 수행해야 하므로 많은 계산량이 필요하다. 본 연구에서는 이러한 경우 각 적층판에서 두께 방향의 적분차수를 1로 할 것을 제안한다. 이와 연관이 있는 연구로는 단층판의 경우에 초기 응력과 관련이 있는 강성행렬 $[K_{NL}]$ 의 적분차수를 선택적으로 줄일 수 있음을 보인 것⁽⁶⁾이 있으나, 본 연구에서는 $[K_{NL}]$ 은 물론 선형부 $[K_L]$ 의 적분차수도 1로 줄였다. 강성의 거동이 2차 함수적으로 변한다고 본 이론적오차 추정치와 실제오차의 비교를 통하여 적층판의 수에 따른 완전 적분차수를 사용한 경우와의 차이를 비교하고자 한다.

2. 유한요소 평형식

대변위 문제는 비선형적인 것으로 이를 해석하는 방법중 total-Lagrange방법과 updated-Lagrange방법이 많이 사용되고 있다.^(7~9) Total-Lagrange방법은 초기상태를 기준으로, updated-Lagrange방법은 변형된 상태를 기준으로 해서 해석이 수행된다. 여기서는 total-Lagrange방법을 사용하여 등방성 플레이트에 대한 증분형의 반복평형식(iterative incremental equilibrium equation)을 구하고, 이로부터 복합재 플레이트에 대한 증분형의 평형식을 구한다.

먼저 평형식을 구하기 위해 가상일의 원리를 적용하면 식(1)이 얻어진다.

$$\int_{0_V} \delta S_{ij} \delta \epsilon_{ij} d(\circ V) = \delta R \quad (1)$$

여기서,

δS_{ij} : 초기상태를 기준으로 한 시간 t 에서의 제2차 Piola-Kirchhoff 응력텐서

$\delta \epsilon_{ij}$: 초기상태를 기준으로 한 시간 t 에서의 Green-Lagrange 변형률텐서

δR : 외력에 의한 외부 가상일

변형률-변위관계를 행렬형태로 나타내면 식(2)와 같다.

$$\{\delta E\} = [\delta B_L] \{\delta U\} \quad (2)$$

여기서,

$$\{\delta E\}^T = [\delta \epsilon_{11} \quad \delta \epsilon_{22} \quad \delta \epsilon_{33} \quad \delta \gamma_{12} \quad \delta \gamma_{23} \quad \delta \gamma_{31}]$$

$$\begin{aligned} \{^tU\}^T &= \{^tU_1\}^T \{^tU_2\}^T \{^tU_3\}^T \{^tU_2\}^T \{^tU_1\}^T \{^tU_3\}^T \cdots \{^tU_1\}^T \{^tU_2\}^T \{^tU_3\}^T \\ [{}^t\delta B_L] &= [{}^t\delta B_{L0}] + [{}^t\delta B_{L2}], \quad [{}^t\delta B_{L1}] = 2[{}^t\delta B_{L2}] \end{aligned}$$

$$[{}^t\delta B_{L0}] = \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & h_{2,1} & \cdots & 0 \\ 0 & h_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h_{1,3} & 0 & \cdots & h_{N,3} \\ h_{1,2} & h_{1,1} & 0 & h_{2,2} & \cdots & 0 \\ 0 & h_{1,3} & h_{1,2} & 0 & \cdots & h_{N,2} \\ h_{1,3} & 0 & h_{1,1} & h_{2,3} & \cdots & h_{N,1} \end{bmatrix}$$

$$[{}^t\delta B_{L2}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_{11} h_{1,1} & & & p_{21} h_{1,2} & & \\ p_{12} h_{1,2} & & & p_{22} h_{1,2} & & \\ p_{13} h_{1,3} & & & p_{23} h_{1,3} & & \\ p_{11} h_{1,2} + p_{12} h_{1,1} & & & p_{21} h_{1,2} + p_{22} h_{1,1} & & \\ p_{12} h_{1,3} + p_{13} h_{1,2} & & & p_{22} h_{1,3} + p_{23} h_{1,2} & & \\ p_{11} h_{1,2} + p_{12} h_{1,1} & & & p_{21} h_{1,2} + p_{23} h_{1,1} & & \\ p_{31} h_{1,1} \cdots & & & p_{31} h_{N,1} & & \\ p_{31} h_{1,2} \cdots & & & p_{32} h_{N,2} & & \\ p_{33} h_{1,3} \cdots & & & p_{33} h_{N,3} & & \\ p_{31} h_{1,2} + p_{32} h_{1,1} \cdots & & & p_{31} h_{N,2} + p_{32} h_{N,1} & & \\ p_{32} h_{1,3} + p_{33} h_{1,2} \cdots & & & p_{32} h_{N,3} + p_{33} h_{N,2} & & \\ p_{31} h_{1,3} + p_{33} h_{1,1} \cdots & & & p_{31} h_{N,3} + p_{33} h_{N,1} & & \end{bmatrix}$$

$h_{k,j} = \partial h_k / \partial h_j$, $p_{ij} = \sum_{t=1}^N h_{k,j} {}^t u_i^k$, ${}^t u_i^k =$ 시간 t 에서 k 번째 결점의 i 방향의 변위, N 은 유한요소 결점수를 의미하며, h_k (k 는 절점번호)는 형상함수(shape function)들로서 아래와 같다.

$$\begin{aligned} h_1 &= a(1+r)(1+s)(1+t) - b(h_9 + h_{12} + h_{17}) \\ h_2 &= a(1-r)(1+s)(1+t) - b(h_9 + h_{10} + h_{18}) \\ h_3 &= a(1-r)(1-s)(1+t) - b(h_{10} + h_{11} + h_{19}) \\ h_4 &= a(1+r)(1-s)(1+t) - b(h_{11} + h_{12} + h_{20}) \\ h_5 &= a(1+r)(1+s)(1-t) - b(h_{13} + h_{16} + h_{17}) \\ h_6 &= a(1-r)(1+s)(1-t) - b(h_{13} + h_{14} + h_{18}) \\ h_7 &= a(1-r)(1-s)(1-t) - b(h_{14} + h_{15} + h_{19}) \\ h_8 &= a(1+r)(1-s)(1-t) - b(h_{15} + h_{16} + h_{20}) \\ h_9 &= c(1+r)(1-r)(1+s)(1+t) \\ h_{10} &= c(1-r)(1-s)(1+s)(1+t) \\ h_{11} &= c(1+r)(1-r)(1-s)(1+t) \\ h_{14} &= c(1-r)(1-s)(1+s)(1-t) \\ h_{13} &= c(1+r)(1-r)(1+s)(1-t) \\ h_{14} &= c(1-r)(1-s)(1+s)(1-t) \\ h_{15} &= c(1+r)(1-r)(1-s)(1-t) \\ h_{16} &= c(1+r)(1-s)(1+s)(1+t) \\ h_{17} &= c(1+r)(1+s)(1-t)(1+t) \\ h_{18} &= c(1-r)(1+t)(1+s)(1+t) \\ h_{19} &= c(1-r)(1-s)(1-t)(1+t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{20} &= c(1+r)(1-s)(1+t)(1-t) \\ a &= 0.125, \quad b = 0.5, \quad c = 0.25 \end{aligned}$$

여기서, r, s, t 는 무차원 좌표계의 가우스 적분점 위치를 나타내며, $-1 \leq r, s, t \leq 1$ 의 값을 갖는다.

식(2) 등을 이용하여 식(1)로부터 식(3)과 같은 평형식이 얻어진다.

$$\{^tP\} = \{^tF\} \quad (3)$$

여기서, $\{^tP\} =$ 외력벡터, $\{^tF\} =$ 등가절점력 벡터를 의미한다.

등가 절점력 $\{^tF\}$ 는 식(4)와 같이 나타난다.

$$\{^tF\} = \int_{0_V} ([{}^t\delta B_{L0}] + [{}^t\delta B_{L1}])^T \{^t\delta S\} d({}^oV) \quad (4)$$

식(3)으로부터 Newton-Raphson방식으로 나타낸 시간 $(t + \Delta t)$ 에서의 평형식은 식(5)와 같이 표시할 수 있다.

$$[{}^{t+\Delta t}K]^{(i-1)} \{\Delta U\}^{(i)} = \{^t+\Delta t P\} - \{^t+\Delta t F\}^{(i-1)} \quad (5)$$

여기서,

$$[{}^{t+\Delta t}K]^{(i-1)} = [{}^{t+\Delta t}K_L]^{(i-1)} + [{}^{t+\Delta t}K_{NL}]^{(i-1)}$$

$$[{}^{t+\Delta t}K_L]^{(i-1)} = \int_{0_V} ([{}^{t+\Delta t}B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t}B_{L1}])^T [D] ([{}^{t+\Delta t}B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t}B_{L1}])^{(i-1)} d({}^oV)$$

$$[{}^{t+\Delta t}K_{NL}]^{(i-1)} = \int_{0_V} ([{}^{t+\Delta t}B_{NL}]^T [{}^{t+\Delta t}S] [{}^{t+\Delta t}B_{NL}])^{(i-1)} d({}^oV)$$

$$\{^t+\Delta t F\}^{(i-1)} = \int_{0_V} ([{}^{t+\Delta t}B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t}B_{L1}])^T [{}^{t+\Delta t}S] [{}^{t+\Delta t}S]^{(i-1)} d({}^oV)$$

한편 식(5)를 적층판의 수가 P 인 복합체 판에 적용하면 강성행렬(stiffness matrix)는 식(6)과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} [{}^{t+\Delta t}K]^{(i-1)} &= \int_{0_V} ([{}^{t+\Delta t}B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t}B_{L1}])_{(k)}^T [D]_{(k)} ([{}^{t+\Delta t}B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t}B_{L1}])_{(k)}^{(i-1)} d({}^oV) \\ &= \sum_{k=1}^P \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([{}^{t+\Delta t}B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t}B_{L1}])_{(k)}^T [D]_{(k)} ([{}^{t+\Delta t}B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t}B_{L1}])_{(k)}^{(i-1)} \\ &\quad J(h_{(k)}/h) dr ds dt_{(k)} \quad (6) \end{aligned}$$

여기서, P 는 적층판의 수(number of layers), h 는 판의 전체 두께, $h_{(k)}$ 는 k 번째 층의 두께, J 는 Jacobian determinant를 나타내며, $t_{(k)}$ 는 $-1 \sim 1$ 의 값을 갖으며 아래와 같다.

$$t = -1 + [-h_{(k)}(1-t_{(k)}) + 2 \sum_{j=1}^k h_{(k)}] / h$$

$$dt = h_{(k)} / h dt_{(k)}$$

$[D]_{(k)}$ 는 구성물질의 특성행렬로써 식(7)과 같다.

$$[D]_{(k)} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & 0 & 0 \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & D_{34} & 0 & 0 \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & D_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{56} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= m^4 Q_{11} + 2m^2 n^2 (Q_{12} + 2Q_{44}) + n^4 Q_{22} \\ D_{12} &= m^2 n^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{44}) + (m^4 + n^4) Q_{12} \\ D_{13} &= m^2 Q_{13} + n^2 Q_{23} \\ D_{14} &= mn [m^2 Q_{11} - n^2 Q_{22} - (m^2 - n^2) (Q_{12} + 2Q_{44})] \\ D_{22} &= n^4 Q_{11} + 2m^2 n^2 (Q_{12} + 2Q_{44}) + m^4 Q_{22} \\ D_{23} &= n^2 Q_{13} + m^2 Q_{23} \\ D_{24} &= mn [n^2 Q_{11} - m^2 Q_{22} - (m^2 - n^2) (Q_{12} + 2Q_{44})] \\ D_{33} &= Q_{33} \\ D_{34} &= mn (Q_{13} - Q_{23}) \\ D_{44} &= m^2 n^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{44}) + (m^4 - n^4) Q_{44} \\ D_{55} &= m^2 Q_{55} + n^2 Q_{66} \\ D_{56} &= mn (Q_{66} - Q_{55}) \\ D_{66} &= m^2 Q_{66} + n^2 Q_{55} \end{aligned} \quad (8)$$

$m = \cos \theta_{(k)}$, $n = \sin \theta_{(k)}$, $\theta_{(k)}$ 는 임의의 k 번째 층의 배열각도이며, k 는 층번호를 나타낸다.

식(8)에서 Q_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$)는 직교성 재료의 주축에 대한 탄성계수(elasticity coefficients)들로써 식(9)와 같다.⁽¹⁰⁾

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 (1 - \nu_{23} \nu_{32}) / \Delta \\ Q_{12} &= E_1 (\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}) / \Delta \\ Q_{13} &= E_3 (\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}) / \Delta \\ Q_{22} &= E_2 (1 - \nu_{13} \nu_{31}) / \Delta \\ Q_{23} &= E_3 (\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}) / \Delta \\ Q_{33} &= E_3 (1 - \nu_{12} \nu_{21}) / \Delta \\ Q_{44} &= G_{12}, \quad Q_{55} = G_{23}, \quad Q_{66} = G_{13} \\ \Delta &= 1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} \end{aligned} \quad (9)$$

3. 강성행렬 계산

3.1 가우스 적분점 수정식

3.1.1 등방성재의 가우스 적분점 수정식

2차원 굽힘문제에서 폭방향이 평면응력(plane

stress)인 경우 변형에너지 증가 관계로부터 6절점 요소의 두께방향의 가우스 적분점 S_6 는 $S_6 = S_8 (1 - \nu^2)^{1/2}$ 으로 밝혀졌다.⁽⁶⁾ 여기서 S_6 는 6절점 요소의 두께방향 가우스 적분점의 수정된 위치를 나타내고, S_8 은 8절점 요소의 두께방향의 가우스 적분점의 위치를 나타낸다. 이를 평면 변형률(plane strain) 상태에 적용하면 $S_6 = S_8 (1 - (\nu / (1 - \nu))^2)^{1/2}$ 이 얻어진다. 한편 3차원 플레이트의 경우는 이 두가지 극단적인 경우의 사이에 속하나 여러가지의 실제 계산을 통해 평면응력(plane stress) 상태에 아주 가까움을 알 수 있었다. 따라서 3차원 플레이트의 두께방향의 가우스 적분점은 $t_{16} = t_{20} (1 - \nu^2)^{1/2}$ 로 표시할 수 있다. 여기서, t_{16} 은 20절점 요소에서 자유도 수를 줄인 16절점 요소의 두께방향의 가우스 적분점 위치를 나타내고, t_{20} 은 자유도 수를 줄이지 않은 20절점 요소의 두께방향의 가우스 적분점의 위치를 나타낸다.

3.1.2 복합재의 가우스 적분점 수정식

3차원 복합재에서 임의의 k 층의 재료 구성행렬은 대칭행렬이며 직교 이방성재(orthotropic material)의 특성을 나타낸다. 복합재는 적층의 방향에 따라 기계적인 성질을 변화시킬 수 있으므로 재료 구성행렬은 방향변환에 대한 고려가 포함되어야 하며, 재료물성치 변환행렬(transformation matrix)은 식(7)과 같이 표시되었다.

적층박판의 3차원 복합재에서 사용되는 16절점 요소의 굽힘변형이 일어나는 $x-z$ 면에 대해서 변형에너지 증가의 관계로부터 자유도 수를 줄인 16절점 요소의 가우스 적분점 수정식을 유도한다. 이를 위해 $x-z$ 평면 상의 8절점 요소의 2차원적 굽힘문제를 생각한다. (Fig. 1)

3차원 20절점 요소의 2차원적 순수굽힘 상태에서 폭 방향이 평면응력상태인 경우, 식(7)로부터 굽힘이 일어나는 $x-z$ 면에 대한 구성물질의 특성행렬을 선택하여 응력-변형률(stress-strain) 관계식으로 나타내면 식(10)이 된다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = [D] \{ \epsilon \} = \begin{bmatrix} \overline{D_{11}} & \overline{D_{12}} & 0 \\ \overline{D_{21}} & \overline{D_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{D_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \overline{DD} &= D_{24}^2 - D_{22} D_{44} \\ \overline{D_{11}} &= D_{11} - (2D_{12} D_{14} D_{24} - D_{14} D_{14} D_{22} - D_{12} D_{12} D_{44}) \end{aligned}$$

요소 양면의 회전각도, J 는 Jacobian determinant 를 의미한다. 이러한 순수굽힘의 경우에 있어서 z 방향의 힘이 0이 되어야 하므로 $2t_{k_j}^2\theta\overline{D_{21}}-4wt_{k_j}\overline{D_{22}}=0$ 의 관계가 만족되어야 하고, 따라서 $w=\theta\overline{D_{21}}/(2\overline{D_{22}})$ 이 되어야 한다. 이 w 값을 식(13)에 대입하여 정리하면 식(14)와 같이 나타난다.

$$\{F_8\}_{x-z} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \begin{bmatrix} t_{k_j}^2\theta(\overline{D_{11}}-\overline{D_{12}})\overline{D_{21}}/\overline{D_{22}} \\ 0 \\ -t_{k_j}^2\theta(\overline{D_{11}}-\overline{D_{12}})\overline{D_{21}}/\overline{D_{22}} \\ 0 \\ t_{k_j}^2\theta(\overline{D_{11}}-\overline{D_{12}})\overline{D_{21}}/\overline{D_{22}} \\ 0 \\ -t_{k_j}^2\theta(\overline{D_{11}}-\overline{D_{12}})\overline{D_{21}}/\overline{D_{22}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} J \cdot W_{kj}h_{(k)}b_{(k)}/h \quad (14)$$

한편, 20절점 요소에서 자유도를 줄인 3차원 16절점 요소의 $x-z$ 평면상의 굽힘상태를 2차원적으

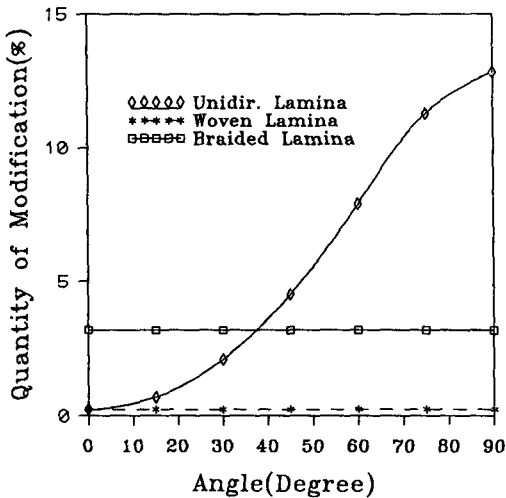


Fig. 3 Modification quantities of Gauss integral point of laminae

로 나타내는 6절점 요소(Fig. 2)에 대한 등가절점력을 구하면 식(15)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\{F_6\}_{x-z} = \int_{0_V} [B_6]^T [S_6] d(\circ V) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [B_6]^T [D] [B_6] [U]_6 J \cdot W_{ki}W_{kj}h_{(k)}b_{(k)}/h \quad (15)$$

여기서,

$$\{S_6\} = [D][B_6]\{U\}_6 \quad (16)$$

$\{U\}_6$ = 순수굽힘 상태의 변위벡터

식(16)을 식(15)에 대입하면 식(17)을 얻을 수 있다.

$$\{F_6\}_{x-z} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta t_{k_j}^2 \overline{D_{11}} \\ 0 \\ -\theta t_{k_j}^2 \overline{D_{11}} \\ 0 \\ \theta t_{k_j}^2 \overline{D_{11}} \\ 0 \\ -\theta t_{k_j}^2 \overline{D_{11}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} J \cdot W_{kj}h_{(k)}b_{(k)}/h \quad (17)$$

2차원적 굽힘이 일어나는 $x-z$ 평면에서 20절점 요소와 절점수를 줄인 16절점 요소의 변형에너지를 등가로 놓을때, 힘의 평형관계는 식(18)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{F_6\}_{x-z} = \{F_8\}_{x-z} \quad (18)$$

여기서, $\{F_6\}'_{x-z}$ 는 $\{F_6\}_{x-z}$ 의 차수를 $\{F_8\}_{x-z}$ 의 차수로 확장한 경우의 것이다. 식(18)의 힘의 평형관계로부터, 절점수를 줄인 16절점 요소의 임의의 k 층에서 두께방향의 가우스 적분점 위치를 t_{k16j} , 20절점 요소의 k 층에서 가우스 적분점 위치를 t_{k20j} 이라 두면, 식(19)와 같은 가우스 적분점 수정식을 구할 수 있다.

$$t_{k16j} = t_{k20j} \sqrt{1 - \overline{D_{12}} \overline{D_{21}} / (\overline{D_{11}} \overline{D_{22}})} \quad (19)$$

한편, 식(19)로부터 적층의 각도가 0°인 경우 가우스 적분점 수정식은 식(20)과 같이 단순화된다.

$$t_{k16j} = t_{k20j} \sqrt{1 - \nu_{13}\nu_{31}} \quad (20)$$

식(19)에서 구한 복합재의 가우스 적분점 수정식을 이용하여 3차원 복합재의 구성판이 unidirectional, woven, braided lamina로 적층된 경우들에 대한 가우스 적분점 수정량은 적층의 각도에 따라서 계산되어야 한다. 식(19)에 따른 수정량 계산에 사용된 재료의 물성치는 Table 1에 나타내었다.

순수굽힘 상태에 있는 3차원 복합재 플레이트의 적층판의 한 판이 $x-z$ 면에서 2차원적 굽힘이 일어날때 굽힘의 방향과 판의 재료의 주방향이 이루는 각도를 고려한다. 이들 두 방향 사이의 각도가 θ 에서 수직이 되는 90° 까지의 각도에 따라 변하는 이방성 재료상수에 따른 가우스 적분점 수정량 $(1 - \sqrt{1 - D_{12} D_{21} / (D_{11} (D_{22})})$ 을 구하면 Fig. 3과 같다.

Fig. 3에서 보는 바와 같이 unidirectional lamina에서는 적층의 각도가 90° 에서 가까울수록 수정량이 커지는 것은 굽힘이 푸아송비(ν_{23}, ν_{32})가 큰 $y-z$ 면으로 일어나기 때문이다. Woven복합재와 braided된 복합재의 경우는 수정량이 방향에 따라 거의 일정하게 나타나는데, 이는 woven의 경우 서로 수직인 fiber에 의해 준등방성이 나타나고, braided재의 경우는 재료상수가 cubic재에 대한 것으로 등방성재에 유사한 성질을 나타내고 있기 때문이다. 그리고 woven재의 경우 $\nu_{31} = \nu_{32} = 0$ 이므로 수정량이 0에 가깝게 된다.

3.2 적층판의 적분차수 축소

가우스 적분차수의 축소는 강성과잉현상의 방지 목적을 위하여 많이 사용되었다.⁽¹¹⁾ 그리고 특별한 선택적 감차법이 적용된 경우로는 탄성·완전소성체의 해석에 있어서 체적에너지 항들의 적분 차수를 편차에너지 항들의 적분차수보다 한차수 낮춘 것이 있으며,^(12,13) 이는 소성상태의 비압축성을 적용하는데 이용이 되었다. 또한 계산량을 줄이기 위한 방편으로 선택적 감차법이 사용된 예도 찾아볼 수 있으며, 강성행렬중 초기응력과 관계되는 $[K_{NL}]$ 의 적분차수를 1로 할 수 있음이 필자 등에 의해 밝혀진 바 있다.⁽⁶⁾ 그러나 일반적으로 $[K_L]$ 부의 적분시 적분차수를 1차로 하면 엄청난 오차가 발생하게 되나, 판의 층수가 많을 때는 오차가 작아 이를 사용한 예⁽¹⁴⁾는 찾아볼 수 있다.

복합재 플레이트의 강성행렬의 수치적분을 살펴보면 한 요소당 많은 판이 적층되어 있어 각 판단 $3 \times 3 \times 3$ 차의 적분을 수행함으로써 층수의 증가에 따라서 수많은 적분점이 생기게 되므로 엄청난 계산

량이 증가가 초래된다. 이에 따라 각층에서 두께 방향의 적분차수를 선형문제 및 기하학적 비선형문제를 막론하고 1로 할 것을 제안한다. 이에 대한 근거로는 필자 등의 연구⁽⁶⁾에서 $[K_{NL}]$ 은 적분차수를 1로 할 수 있음이 밝혀졌고, $[K_L]$ 의 경우에는 강성행렬의 거동이 2차 함수적으로 변한다고 볼 수 있으므로 피적분함수 $F(x) = aEX^2$ 이라 두면, 등방성재의 이론 적분치는 식(21a)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} F(x) dx = \frac{1}{12} aEh^3 \quad (21 \cdot a)$$

수치 적분치(적분차수 1)는 식(21b)와 같다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} F(x) dx = \sum_{k=1}^p aEh_{(k)} X_k^2 \quad (21 \cdot b)$$

여기서, k 는 적층판의 번호를 나타내고, a 는 상수, E 는 탄성계수, h 는 판의 전체 두께, $h_{(k)}$ 는 임의의 k 층판의 두께, p 는 적층수, X_k 는 적층 판 중립면의 위치를 나타낸다.

식(21·a, b)로부터의 상대적 오차는 식(22)와 같다.

$$\text{error} = \left(\frac{1}{12} h^3 - \sum_{k=1}^p h_{(k)} X_k^2 \right) / \left(\frac{1}{12} h^3 \right) \quad (22)$$

한편, 직교이방성 ($0^\circ, 90^\circ$) 복합재의 경우 피적분함수 $F(x) = aE_k X^2$ 라 하면 이론적 적분치는 식(23·a)와 같다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} F(x) dx = \frac{1}{12} W_1 aE_1 h^3 + \frac{1}{12} W_2 aE_2 h^3 \quad (23a)$$

수치 적분치(적분차수 1)는 식(23b)와 같다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} F(x) dx = \sum_{k=1}^k aE_k h_{(k)} X_k^2 \quad (23b)$$

여기서, W_1, W_2 는 적층판의 배열 및 두께에 따른 weight factor, k 는 적층판의 번호, E_k 는 재료의 탄성계수들로서 적층의 각도가 0° 인 경우는 E_1 이고, 90° 인 경우는 E_2 이다.

식(23·a, b)로부터 복합재의 상대적 오차는 식(24)와 같이 나타난다.

$$\text{error} = \left(W_1 (E_1 h^3 / 12) + W_2 (E_2 h^3 / 12) - \sum_{k=1}^k h_{(k)} E_k X_k^2 \right) / \left(W_1 (E_1 h^3 / 12) + W_2 (E_2 h^3 / 12) \right) \quad (24)$$

식(22)와 (24)에 따른 이론적 오차량을 등방성 적층판 및 복합재 적층판($E_1/E_2 = 12.3$)에 대해 계

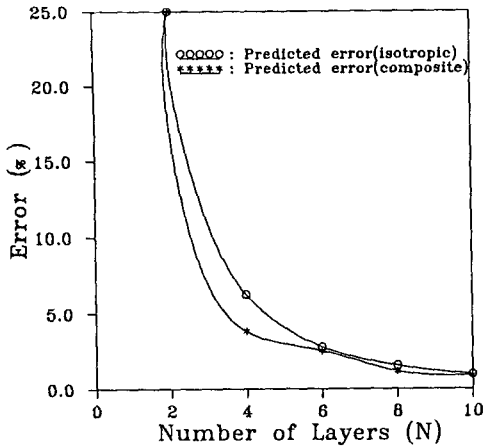


Fig. 4 Predicted errors of order 1 Gauss quadrature in static analysis

산하면 Fig. 4와 같다. 따라서 적층판의 수에 따라 두께방향의 적분 차수의 축소에 기인한 이론적 오차를 예측할 수 있다. 이는 선형해석은 물론 기하학적 비선형해석에도 적용이 가능하며 적층수와 허용 오차에 따라 Fig. 4에 의해 적절히 선택적으로 적분차수의 축소가 가능하다.

4. 수치해석 및 고찰

3장에서 기술한 가우스 적분점 수정식의 타당성을 검증하기 위하여 3차원 등방성판(isotropic plate)의 복합재판의 여러가지 모델을 해석하였다. 또한 다층 박판에서 두께방향의 감차에 대한 이론적 오차와 실제 오차를 비교·검토하였다.

4.1 3차원 등방성 판

4.1.1 순수굽힘 판

양끝단에 균일분포 선단하중(uniformly distributed edge load)을 받고있는 순수굽힘 판(pure bending plate)의 형상과 유한요소 모델을 Fig. 5에 나타내었다. 본 모델의 길이와 두께의 비(L/h)는 100이고 5개의 16절점 및 20절점 요소로 각각 분할하여 정적 선형해석과 정적 비선형해석을 하였으며, 그 결과를 Fig. 6에 나타내었다. 수치해석은 자유도 수를 줄인 16절점의 가우스 적분점 수정량 2.0%를 적용한 결과와 수정하지 않은 결과 및 20절점 요소의 결과를 비교하였다. 수치계산에는 $3 \times 3 \times 3$ 차의

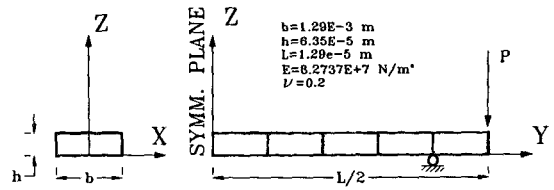


Fig. 5 Finite element model of pure bending plate under end load

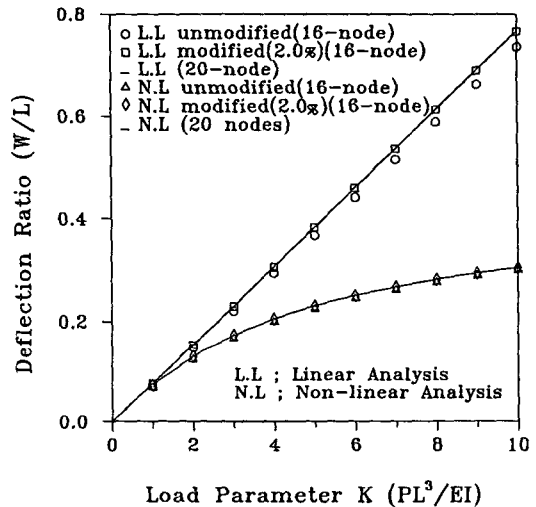


Fig. 6 Static linear and non-linear deflection of pure bending plate under end load ($L/h=100$)

가우스 적분법을 사용하였으며, 비선형해석은 뉴턴-랩슨 반복계산 방법을 사용하였다.

푸아송의 비 $\nu=0.2$ 인 경우 이론적 수정량 2.0%를 적용한 수정 16절점 요소의 해석 결과와 20절점 요소의 해석결과를 비교하면 정적 선형해석의 경우에 오차가 0.13% 이었고, 정적 비선형해석의 경우에 0.16%의 오차를 나타내었다. 한편 가우스 적분점을 수정하지 않은 16절점 요소의 경우는 정적 선형해석의 경우에 4.1%, 정적 비선형해석의 경우는 3.8%의 오차를 나타내었다.

4.1.2 내다지 판

한쪽 끝단에 균일분포 선단하중(uniformly distributed edge load)을 받고 있는 내다지 판(cantilever plate)의 형상과 유한요소 모델을 Fig. 7에 나타내었다. 본 모델의 길이와 두께의 비(L/h)는 100이고 5개의 16절점과 20절점을 갖는 요소로 분할하여 정적 선형해석과 정적 비선형해석을 하였으

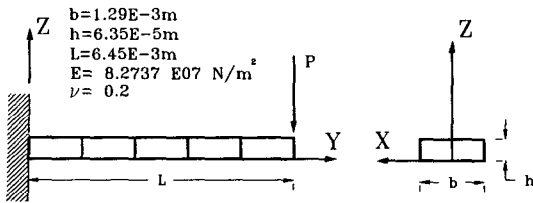


Fig. 7 Finite element model of cantilever plate under end load

며, 그 결과를 Fig. 8에 나타내었다. 수치해석은 자유도 수를 줄인 16절점 요소의 가우스 적분점 수정량은 2.0%를 적용한 결과와 수정하지 않은 결과 및 20절점 요소의 결과를 비교하였다. 수치 계산에는 3×3×3차의 가우스 적분법을 사용하였으며, 비선형 해석은 뉴턴-랩슨 반복계산 방법을 사용하였다.

푸아송의 비 $\nu=0.2$ 인 경우 이론적 수정량 2.0%를 적용한 수정 16절점 요소의 해석결과와 20절점의 해석결과를 비교하면 정적 선형해석의 경우는 오차가 0.55% 이었고, 정적 비선형해석의 경우는 0.49%의 오차를 나타내었다. 한편 가우스 적분점을 수정하지 않은 16절점 요소의 경우는 정적 선형해석의 경우에 4.5%, 정적 비선형해석의 경우는 4.1%의 오차를 나타내었다.

이상의 20절점의 해석결과와 16절점의 해석결과를 정리하면 Table 2에 나타난 바와 같다.

Table 2에서 보는 바와 같이 3차원 등방성 플레이트에서의 가우스 적분점을 수정한 16절점 요소의 해석결과가, 가우스 적분점을 수정하지 않은 16절점 요소의 해석결과보다, 정적 선형해석과 정적 비선형해석에서 20절점 요소의 결과와 더욱 잘 일치함을 알 수 있다. 따라서 3차원 플레이트의 2차원적 굽힘문제에서 유도한 절점수를 줄인 16절점 요

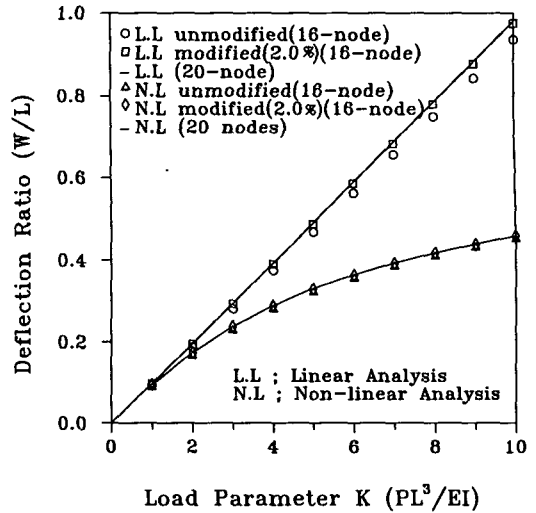


Fig. 8 Static linear and non-linear deflection of cantilever plate under end load ($L/h=100$)

소의 가우스 적분점 수정식은 3차원 등방성 플레이트 문제에도 적용 가능함을 알 수 있다.

4.2 3차원 복합재 판

식(19)에서 구한 직교 이방성 복합재에 대한 가우스 적분점 수정식의 타당성을 검토하기 위하여 중앙에 균일분포 중앙하중(uniformly distributed center load)이 작용하는 T300-5208 epoxy-graphite로 구성된 2층($0^\circ/90^\circ$)의 적층판 및 여러가지의 예를 해석하였다.

4.2.1 2층($0^\circ/90^\circ$) 복합재 판

중앙에 균일분포 하중(uniformly distributed center load)이 작용하는 2층($0^\circ/90^\circ$)의 단순지지 복합재판(composite plate)의 유한요소 모델을 Fig. 9

Table 2 Comparison of the results of modified and unmodified 16-node elements with the results of 20-node elements ($\nu=0.2$)

Analysis type	Type of plate	Unmodified model error (%)	Modified model error (%)
			Modification quantity (2.0%)
Static linear analysis	Pure bending plate	4.1	0.13
	Cantilever Plate	4.5	0.55
Static Nonlinear Analysis	Pure bending plate	3.7	0.16
	Cantilever Plate	4.1	0.49

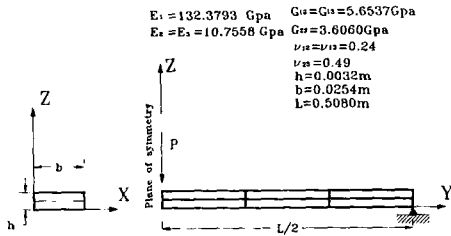


Fig. 9 Finite element model of two-layer (0°/90°) composite plate under center load

에 나타내었으며, 그 해석의 결과를 Fig. 10에 나타내었다. 유한요소해석을 위해 3개의 20절점 및 16절점 요소로 각각 나누어 해석하였으며, 여기서, 경우(a)는 참고문헌⁽¹⁰⁾과 동일한 경계조건으로써 지지점이 판의 중립면인 경우이고, 경우(b)는 지지점이 판의 하부인 경우를 나타낸다. Fig. 10에서 보는 바와 같이 3차원 20절점의 해석결과는 참고문헌⁽¹⁰⁾의 결과와 잘 일치한다. 그리고, 수정된 16절점 요소의 결과는 20절점 요소와 잘 일치함을 알 수 있다.

4.2.2 복합재 판

식(19)에서 구한 가우스 적분점 수정식을 4층으로 구성된 모델에 적용하였다. Unidirectional lamina의 경우는 적층의 각도가 (0°/90°)_s, (45°/-45°)_s, (90°/90°)_s, (90°/0°)이고, woven lamina의 경우는 적층의 각도가 (0°/90°)_s, (45°/45°)_s, (0°/0°)_s이며,

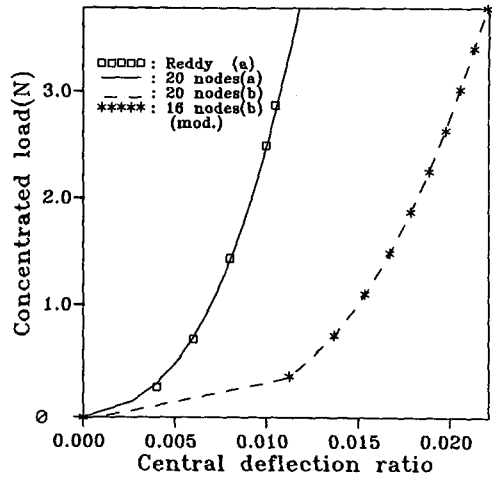


Fig. 10 Displacement of two-layer (0°/90°) composite plate under center load

braided된 경우의 재료축의 각도는 0°인 경우로써 판의 크기는 길이×폭×두께가 300×50×3.2(mm)이다. 판의 형상은 외팔판으로 크기가 같은 10개의 요소로 분할하여 적분점을 수정한 수정 16절점 요소와 수정하지 않은 16절점 요소 모델에 의한 해석 결과를 20절점 요소의 해석결과와 비교한 것을 Table 3에 나타내었다. 이때 각각의 재료 상수는 unidirectional lamina의 경우(E₁=132.4GPa, E₂=10.8GPa, E₃=10.8GPa, G₁₂=5.7GPa, G₁₃=5.7GPa, G₂₃=3.6GPa, ν₁₂=0.24)이고, woven lamina의 경

Table 3 Comparison of the deflections of modified and unmodified 16-node models with the result of 20-node models

Type of layer	Angle	Displacements of 20-node	Displacements of conventional 16-node (error%)	Displacements of modified 16-node (error%)
Unidirectional lamina	(0°/90°) _s	0.48956	0.48369 (1.199)	0.48788 (0.343)
	(90°/0°) _s	2.09593	1.90109 (9.296)	2.10216 (0.297)
	(45°/-45°) _s	2.42787	2.29146 (5.619)	2.45861 (1.266)
	(90°/90°) _s	4.43876	3.62156 (18.41)	4.43807 (0.016)
Woven lamina	(0°/0°) _s	0.43185	0.42966 (0.507)	0.43167 (0.042)
	(45°/45°) _s	0.43185	0.42966 (0.507)	0.43167 (0.042)
	(0°/90°) _s	0.43185	0.42966 (0.507)	0.43167 (0.042)
Braided lamina	(0°/0°) _s	2.66217	2.48174 (6.778)	2.64586 (0.613)

우 ($E_1=132.4\text{GPa}$, $E_2=132.4\text{GPa}$, $E_3=10.8\text{GPa}$, $G_{12}=55.2\text{GPa}$, $G_{13}=5.7\text{GPa}$, $G_{23}=5.7\text{GPa}$, $\nu_{12}=0.2$)이며, braded lamina의 경우 ($E_1=120\text{GPa}$, $E_2=120\text{GPa}$, $E_3=120\text{GPa}$, $G_{12}=48\text{GPa}$, $G_{13}=48\text{GPa}$, $G_{23}=48\text{GPa}$, $\nu_{12}=0.25$)이다.

Table 3에서 보는 바와 같이 수정한 16절점 요소의 해석결과가 수정하지 않은 경우보다 20절점 요소의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. Unidirectional lamina의 경우 적층의 각도에 따라 차이는 있으나 수정된 16절점 요소의 경우가 수정하지 않은 경우보다 20절점 요소의 결과와 잘 일치한다. 적층의 각도가 ($90^\circ/90^\circ$)_s인 16절점 요소는 수정을 하지 않을 경우 오차가 18%로 수정이 불가피하며, ($0^\circ/90^\circ$)_s인 16절점 요소의 경우는 수정을 거의 필요로 하지 않는다. Woven lamina의 경우에는 수정된 16절점 모델의 오차가 더 작으나, 수정량이 작으므로 수정하지 않은 경우도 오차가 크지 않으므로 수정을 하지 않아도 된다. Braided된 경우는 등방성에 유사한 성질을 나타내므로 수정하지 않은 경우 큰 오차(6.8%)가 발생하므로 수정이 불가피하다.

4.3 다층판의 적분차수 축소

3.2절에서 제안한 다층판의 적분차수 축소를 위하여 강성(stiffness)의 거동이 선형 및 기하학적 비선형문제의 경우 2차 함수적으로 변한다고 가정하고, 각 적층판에서 두께방향의 적분차수를 1로 한 경우의 실제 계산시의 오차를 이론적 예측치와 비교한 등방성재의 결과를 Fig. 11에 복합재의 결과를 Fig. 12에 나타내었다. 본 계산을 위해 길이 \times 폭 \times 두께가 $120 \times 19.6 \times 0.88\text{mm}$ 인 내다지 판을 10개의 크기가 같은 요소로 분할한 모델을 사용하였다. 이때 복합재의 재료상수는 ($E_1=192\text{GPa}$, $E_2=15.6\text{GPa}$, $E_3=15.6\text{GPa}$, $G_{12}=8.20\text{GPa}$, $G_{13}=8.20\text{GPa}$, $G_{23}=5.23\text{GPa}$, $\nu_{12}=0.24$, $\nu_{13}=0.24$, $\nu_{23}=0.49$, $\nu_{21}=0.0195$, $\nu_{31}=0.0195$, $\nu_{32}=0.49$)이었고, 적층각도는 ($0^\circ/90^\circ$), ($0^\circ/90^\circ$)_s, ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)_s, ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$)_s, ($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$)_s로 적층되었다. Fig. 11과 Fig. 12는 등방성과 이방성으로 적층된 복합재 강성행렬[K]의 두께방향 적분차수를 1로 계산한 경우와 적분차수를 3(full order integration)으로 계산한 경우의 오차를 나타낸 것으로서, 두께 방향의 적분차수를 축소할 경우의 실제 오차와 이론적으로 예측된 오차가 잘 일치함을 알 수 있다.

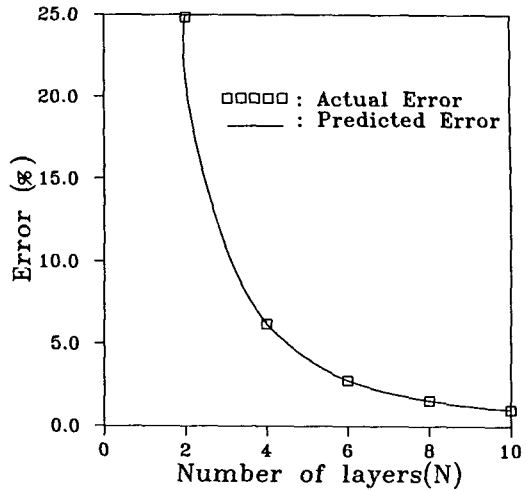


Fig. 11 Comparison of actual and predicted errors of order 1 integration in isotropic plate

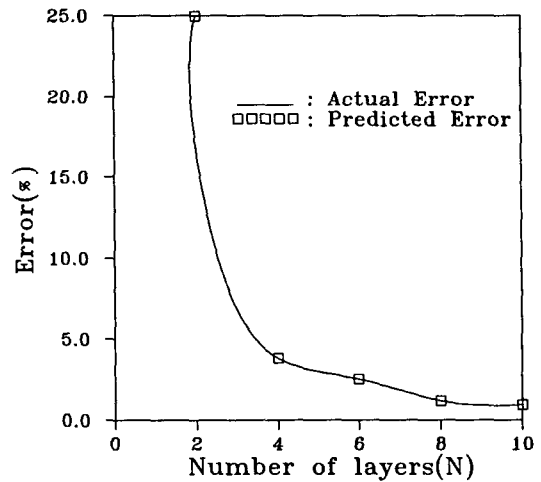


Fig. 12 Comparison of actual and predicted errors of order 1 integration in composite plate

강성행렬의 비선형부는 1차의 수치적분으로 충분하고, 선형부는 2차 함수적으로 변한다고 할 수 있어, 추후의 계산은 허용오차 및 적층판의 수에 따라 이론적 추정오차를 바탕으로 감차적분의 가능성 여부를 판단할 수 있다.

5. 결 론

가상변위의 원리를 기초로 3차원 등방성재 및 복합재료 구성된 고체의 대변위 정적인 문제를 total-Lagrange 방법에 의하여 나타내었으며, 뉴튼-랩슨

방식의 증분형 유한요소 평형식으로 나타내었다. 2차원 등방성재의 자유도수를 줄임에 기인한 상대적 강성과잉현상을 해결하기 위한 방법으로 사용된 가우스 적분점의 수정식을 소개하였으며, 이를 확장 적용하여 3차원 등방성 플레이트 및 복합재 플레이트의 가우스 적분점 수정식을 유도하였다. 또한 다층판에서 두께방향으로 3차의 적분을 수행해야 하나 계산량을 줄이기 위해 이를 1차의 적분을 수행할 경우의 층수에 따른 오차를 이론적으로 구하고 이를 실제 오차와 비교하였다.

양쪽 끝단에 균일분포 하중(uniformly distributed end load)을 받고있는 3차원의 순수굽힘판(pure bending plate) 및 한쪽 끝단에 균일분포 하중(uniformly distributed end load)을 받고 있는 내다지판(cantilever plate)의 정적 선형해석 및 정적 비선형해석을 통하여, 적분점 수정법은 3차원의 해석에도 적용할 수 있음을 확인하였다. 또한 복합재의 경우 중앙에 균일분포 하중(uniformly distributed center load)이 작용하는 T300-5208 epoxy-graphite로 구성된 2층(0°/90°)의 적층 판의 해석을 통해 그 타당성을 확인하고, 이 외에 여러가지 적층 모델들을 해석하였다.

이상의 결과들 요약하면 아래와 같다.

(1) 2차원 평면응력 상태에서 구하여진 가우스 적분점 수정식은 3차원 등방성 플레이트에 유사하게 확장적용 가능함을 알 수 있다.

(2) 3차원 복합재 플레이트의 가우스 적분점 수정식을 유도하였고, T300-5208 epoxy-graphite로 구성된 2층(0°/90°)의 적층판 및 기타 예의 해석을 통해 그 타당성을 확인하였으며, unidirectional lamina, woven lamina, braided lamina로 적층된 경우의 수정량 곡선을 구하였다.

(3) Unidirectional lamina로 된 laminate의 경우는 적층의 각도에 따라 수정량이 달라진다. 일반적으로 준등방성 배치된 한 경우는 수정을 하지 않아도 큰 오차가 없으나, Table 3의 예와 같이, 경우에 따라서 큰 오차(18.41%)가 발생하므로 경우에 따라 적분점 수정이 불가피하다. Woven lamina로 적층된 Laminate의 경우 수정량이 작고 일정하므로 수정을 하지 않아도 오차가 크지 않다. Braided lamina의 경우는 재료 상수에 따라 다르겠으나 각도의 변화에 따라 수정량은 대체로 일정하며 적분점 수정이 불가피하다.

(4) 정적인 문제에서 등방성 적층판 및 복합재의

두께 방향의 적분 차수 축소에 기인한 계산 오차와 이론적 오차가 유사함을 확인하였다. 이에 따라 오차의 예측이 가능하고 적층수에 따른 감차의 가능 여부를 판단할 수 있게 되었다.

후 기

본 논문은 한국과학재단의 1991/1992년도 목적기초 연구비 지원에 의하여 이루어진 것으로서 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Tsai, S. W. and Hahn, H. T., 1980, *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing Co., Ch. 2~3.
- (2) Kim, Y. H. and Lee, S. W., 1988, "A Solid Element Formulation for Large Deflection Analysis of Composite Shell Structures," *Computers and Structures*, Vol. 30, No. 112, pp. 269~274.
- (3) Bathe, K. J. and Bolourchi, S., 1983, "A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element," *Computers and Structures*, Vol. 11, pp. 23~48.
- (4) Surana, K. S., 1983, "Geometrically Nonlinear Formulation for Curved Shell Element," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19, pp. 581~615.
- (5) 김정운, 권영두, 1993, "6절점 2차원 isoparametric 요소의 가우스 적분점 수정에 관하여," *대한기계학회논문집*, 제17권, 제12호, pp. 3007~3019.
- (6) 최진민, 권영두, 1988, "초기응력이 있는 탄성체의 선형 및 비선형해석," *대한기계학회논문집*, 제12권, 제4호, pp. 642~651.
- (7) Bathe, K. J., Ramm, E. and Wilson, E. L., 1975, "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 9, pp. 353~386.
- (8) Wood, R. D. and Zienkiewicz, O. C., 1976, "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells," *Computers & Structures*, Vol. 7, pp. 725~735.
- (9) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedures*

- in Engineering Analysis*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, Ch. 4~6.
- (10) Liao, C. L., Reddy, J. N. and Engelstad, S. P., 1988, "A Solid-Shell Transition Element For Geometrically Non-Linear Analysis of Laminated Composite Structure," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 26, pp. 1843~1854.
- (11) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1982, "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements," *Transactions of the ASME, J. App. Mech.*, Vol. 49, pp. 172~176.
- (12) Bercovier, M., 1978, "Perturbation of Mixed Variational Problems Application to Mixed Finite Element Methods," *R. A. I. R. O. (Numerical Analysis)*, Vol. 12, pp. 211~236.
- (13) Malkus, D. S. and Hughes, T. J. R., 1978, "Mixed Finite Element Methods-Reduced and Selective Integration Techiques : A Unification of concepts," *Comp. Meth. App. Meth. & Eng.*, Vol. 15, No. 1, pp. 63~81.
- (14) Yunus, S. M., Kohnke, P. C. and Saigal, S., 1989, "An Efficient Throuhg Thickness Integration Scheme in an Unlimited Layer Doubly Curved Isoparametric Composite Shell Element," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp. 2777~2794.