2158 大韓機械學會論文集 第18卷 第8號, pp. 2158~2166, 1994

〈論 文〉

반도체패키지에서의 층간박리 및 패키지균열에 대한 파괴역학적 연구(2)

—패키지균열—

박상선* · 반용운* · 엄윤용**

(1994년 4월 9일 접수)

A Fracture Mechanics Approach on Delamination and Package Crack in Electronic Packaging (II)

—Package Crack—

Sang Sun Park, Lyong Oon Pahn and Youn Young Earmme

Key Words: J-integral(J적분), M-integral(M적분) Thermal Stress(열응력), Finite Element Method(유한요소법), Package Crack(패키지균열)

Abstract

In order to understand the package crack emanating from the edge of leadframe after the delamination between leadframe and epoxy molding compound in an electronic packaging of surface mounting type, the M-integral and J-integral in fracture mechanics are obtained. The effects of geometry, material properties and molding process temperature on the package crack are investigated taking into account the temperature dependence of the material properties, which simulates a more realistic condition. If the temperature dependence of the material properties is considered the result of analysis conforms with observations that the crack is kinked at between 50 and 65 degree. However, in case of constant material properties at the room temperature it is found that the J-integral is underestimated and the kink crack angle is different from the observation. The effects of the marerial properties and molding process temperature on J-integral and crack angle are less significant than the chip size for the cases considered here. It is suggested that the geometric factors such as chip size, leadframe size are to be well designed in order to prevent(or control) the occurrence and propagation of the package crack.

I. 서 론

반도체는 매년 고집적화를 추구하고 있고 이 고집적화의 요구에 따라 칩(chip)의 크기도 함께 증가하고 있다. 반면 전자기기는 크기면에서 경박단소의 경향을 추구하고 있어 반도체패키지의 두께는 점점 얇아지는 추세에 있다. 이와 함께 주로 사용되는 패키지(package)의 실장 형태는 리드(lead)의 간격(pitch)이 제한되어 있어 소형화에 한계가 있는 기존의 삽입형(insertion mounting type, Fig. 1(a))에서 그 간격을 좀 더 줄일 수 있고 기판의 양면에 실장함으로써 실장 밀도를 높일 수 있는 표면실장형(surface mounting type, Fig. 1(b))의 패

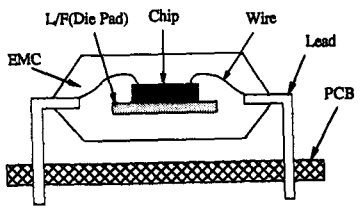
*한국과학기술원 기계공학과
**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

키지로 그 형태가 바뀌고 있다.

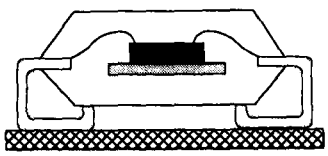
그러나 기판에 실장시 접착부분(리드)만이 가열되는 삽입형 패키지와는 달리 표면실장형 패키지는 실장시 패키지 전체가 210℃~260℃에 노출되어 열충격하중에 의한 안정성 문제가 야기되므로 이를 고려한 최적의 패키지 설계가 필요하다. 열충격하중에 의해 발생되는 패키지의 손상형태로는 패키지 및 칩의 균열(crack), 계면층간박리(interface delamination) 및 연결선파손(wire bond breakage) 등이 있다.[1] 이중 주로 발생하는 파손형태는 리드프레임(lead frame, L/F)과 수지의 접합면에서 층간박리 후 수지의 파손으로 이어지는 형태이다. 따라서 외부하중 조건하에서 재료의 물성치(L/F, 수지), 기하학적 형상(칩크기, 패드크기, 다운셋등)및 공정(몰딩온도, 몰딩지속시간 등)의 변화에 따라 L/F과 수지사이의 층간박리 여부, 층간에 존재하는 계면균열 및 패키지균열의 거동을 예측하는 것은 매우 중요하다.

제1부[2]에서는 층간박리에 대하여 응력강도계수 및 T응력을 계산하여 재료, 기하학적 형상 및 공정의 변화에 대하여 고찰하였다. 앞서 언급하였듯이 패키지내의 균열은 일반적으로 층간박리 후 패키지 균열로 이어진다. 따라서 본 연구에서는 제1부[2]에서와 마찬가지로 파괴역학 매개변수를 도입하여 수지 및 L/F의 재료, 패키지의 기하학적 형상 및 공정의 변화가 패키지균열에 끼치는 영향에 대하여 평가하고자 한다.

직선계면균열에서와는 달리 두 재료가 임의의 각도로 접합되어 있는 경우 J적분은 에너지방출률의 의미를 갖지 못하게 된다. 그러나 계면이나 균열이 원점에 대하여 방사형으로 분포되어 있는 경우 M적분은 보존이 되며,[3] 또한 J적분과 일정한 관계를 가지게 되어 널리 사용되어지고 있다. 열하중의 경우에 대해 반용운[4]은 선적분에 면적분이 더해지는 형태로 수정하였다. 본 연구에서는 제1부[2]에서와 마찬가지로 수지의 물성치가 온도에 따라 크게 변화되고 있음을 고려하여 M적분이 이러한 경우에도 보존되도록 수정하였다. 이로써 위에 언급된 인자의 변화에 따른 에너지방출률의 크기가 최대가 되는 각을 패키지균열이 진전하는 방향으로 정하였으며, 이를 실제 현상과 비교하였다.



(a) Insertion mounting type



(b) Surface mounting type

Fig. 1 Package type

2. 문제의 모델링

앞서 언급하였듯이 표면실장형 패키지파손의 대

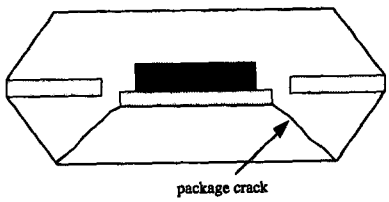


Fig. 2 Package crack

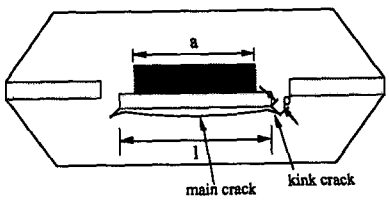
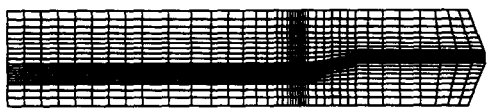
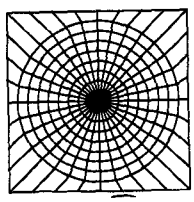


Fig. 3 Analysis model with main and kink crack



(a)



(b)

Fig. 4 (a) Finite element mesh of the model
(b) Near crack tip region

Table 1 Material properties

		k (W/m℃)	ρ (kg/m³)	C (J/Kg℃)	E (Gpa)	ν	α (ppm/℃)
L/F	Cu	196.6	8920	400	119.3	.34	16.9
	Alloy	15.91	8300	502.44	167	.29	10.1
Plastic	I	.67	1820	1884	12.753	.25	16
	II	1.46	2070	1170	16.3	.3	27
Chip		153	2330	703	165.5	.25	2.3

Table 2 Material Properties vs. temperature

		25	100	150	175	215
Palstic I	α (ppm/℃)	16	25	32	66	73
	E (GPa)	12.753	12	5.3	4.5	2.1
Plastic II	α (ppm/℃)	27	36	43	78	85
	E (GPa)	16.3	16	8	7.5	3.5

표적인 형태는 L/F과 수지사이에서의 층간박리 후 패키지균열로 이어지는 파손이다. (Fig. 2)

본 연구에서의 패키지해석은 비교적 값이 싸고 많이 사용되는 표면실장형 플라스틱 패키지의 대표적 형상인 PLCC(plastic leaded chip carrier)를 택하여 행하였으며, 이를 단순화한 형상은 Fig. 3과 같으며 치수는 제1부[2]에서와 동일하다. 이 모델에 대하여 제1부에서 언급한 3가지 측면, 즉 재료의 물성치, 기하학적형상 및 공정의 변화에 대해서 연구하였다.

2차원과 3차원 모델의 해석결과를 비교할 때, 서로 차이가 없다는 기존의 연구결과[5]에 근거하여, 본 연구에서는 2차원 평면변형률 상태로 가정을 하였으며, 또한 해석의 편의상 와이어(wire)는 생략하였으며, 기하학적 형상의 대칭성을 고려하여 1/2만 해석하였다.

현재 대부분의 연구자들은 패키지를 기판(board)에 실장할 때(온도상승)를 해석하였으며 실장 후 실온으로 냉각시킬 경우는 거의 해석되어 있지 않다. 그러나 제1부[2]에서 설명하였듯이 패키지내에 파손을 일으키는 것은 실장후 냉각시킬 때의 응력일 것이므로 본 논문에서는 초기에 패키지 전체가 기판실장 온도에서 25℃의 상온으로 냉각되는 경우를 해석하였다.

Table 3 Path independence of M-integral and J-integral in analysis model shown in Fig. 3

Domain	M-integral	J-integral
1	.02003	1.19600
2	.01992	1.118946
3	.01988	1.18714
4	.01987	1.18598
5	.01985	1.18527
6	.01984	1.18480
7	.01984	1.18448

유한요소해석을 위한 요소분할은 Fig. 4에 나타냈다. 패키지내의 응력분포 해석시 균열선단 근방에서는 특이요소를 사용하였고, 그 이외의 곳에서는 정규요소를 사용하였다. 요소의 수와 절점의 수는 각각 1024, 3557개이며, 각 재료의 물성치는 Table 1과 Table 2에 나타내었다.[5~7]

3. M적분의 보존 및 J적분과의 관계

Knowles와 Sternberg[3]는 보존적분으로서 J적분 이외에 M, L적분이 있음을 보였으며, 이때 M적분은 균질한 선형탄성재료에 대하여 보존법칙을 만족한다. Freund[8]는 M적분을 이용하여 몇가지 2차원 탄성문제에 대하여 응력강도계수를 구하였으며, Kubo[9]는 이를 계면균열문제에 적용하여 에너지방출률을 폐형해로 구하였다. 그리고 Rice[10]는 V노치나 계면 근처에 존재하는 전위에 작용하는 힘을 나타내는데 M적분을 적용하였다.

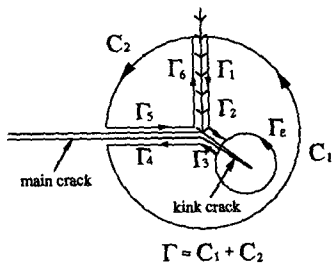


Fig. 5 Integration path

2차원의 변위장에 대하여 M적분은 다음과 같이 정의된다.[3]

$$M=\int_{\Gamma}(Wx_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds \tag{1}$$

여기서, W는 변형률 에너지밀도, t_i는 트랙션벡터, u_i는 변위벡터이고, n_i는 적분경로에 수직한 단위벡터이다. 우선 기계적하중만이 작용하는 경우에 대하여 경로 독립성을 증명하면 다음과 같다. 우선 특이점이 없는 균질재료내의 폐경로에서는 M적분이 0이 되므로 다음이 성립된다. (Fig. 5)

$$\begin{aligned}&M(\Gamma_1+\Gamma_2-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_3+\Gamma_4+C_1)\\&+M(\Gamma_5+\Gamma_6+C_2)=0\end{aligned} \tag{2}$$

균열면과 계면에서는 x_in_i가 0, 균열면에서는 트랙션벡터, t_i가 0, 계면에서는 트랙션벡터와 변위의 미분이 계면을 따라 연속이므로 균열면과 계면에서는 M적분에 기여하는 바가 없다. 따라서 최종적으로 다음이 성립된다.

$$\begin{aligned}&M(C_1-\Gamma_\varepsilon)+M(C_2)=0\\&M(C_1+C_2)+M(-\Gamma_\varepsilon)=0\\&M(\Gamma)=M(\Gamma_\varepsilon)\end{aligned} \tag{3}$$

M적분과 J적분과의 관계를 유도하기 위해 균열선단의 좌표를 (a_1, a_2), 균열선단을 원점으로 하는 좌표계 (ξ_1, ξ_2)를 정의하면,

$$x_1=\xi_1+a_1,\ x_2=\xi_2+a_2 \tag{4}$$

좌표계 (x_1, x_2)과 좌표계 (ξ_1, ξ_2)에 대하여 M적분은 다음과 같이 주어진다.[11]

$$\begin{aligned}M(x_1, x_2)&=M(\xi_1, \xi_2)+a_1J_1+a_2J_2\\&=a_1J_1+a_2J_2=aJ_\tau\end{aligned} \tag{5}$$

여기서, a는 균열선단까지의 거리, J_τ은 균열면에 나란한 방향으로의 J적분을 나타낸다.

위와 같이 M적분은 계면이나 균열면이 원점으로부터 방사형의 균열문제에 대하여 유용하게 적용될 수 있다. 따라서 본 연구에서는 열하중이 작용하고 물성치가 온도의 함수인 비균질문제에 대하여 M적분을 수정하고 이를 패키지균열에 적용하고자 한다.

4. 수정 M적분

열하중의 경우 J적분과 마찬가지로 선적분만으로는 보존이 되지 않으며 이 경우에 대해 반용운[4]은 Wilson과 Yu[12]의 방법을 따라 M적분이 보존되도록 수정하였으며 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}M&=\int_{\Gamma_\varepsilon}(Wx_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds\\&=\int_{\Gamma+\Gamma_s}(Wx_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds\\&\quad+\int_{A-A_\varepsilon}\alpha\sigma_{kk}(\theta_{,i}x_i+\theta)\,dA\end{aligned} \tag{6}$$

여기서, Γ는 앞에서 언급한 바와 같은 경로이며, Γ_s는 균열면에서의 경로, Γ_ε은 $\varepsilon\to0$인 경로, A는 Γ로 둘러쌓인 면적, A_ε은 Γ_ε으로 둘러쌓인 면적, α는 열팽창계수이며 θ는 온도차이다. 일반적으로 물성치가 온도의 함수인 경우에 대해서는 부록 A에 자세히 나타내었다.

또한 J적분과 마찬가지로 가중함수를 도입하게 되면 식(6)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}M=\int_{A-A_\varepsilon}&[(\sigma_{ki}u_{k,j}x_j-Wx_i)\,q_{,i}\\&+\alpha\sigma_{kk}(\theta_{,i}x_i+\theta)\,q]dA-\int_{\Gamma_s}t_ku_{k,j}x_jds\end{aligned} \tag{7}$$

여기서, 가중함수 q는 균열선단에서 1, 임의의 적분경로에서는 0이 되는 미분가능한 구분적 연속함수(piecewise continujous function)이다.

5. 수치계산의 결과 및 토의

5.1 온도분포

패키지가 기판실장 온도인 210℃에서 상온인 25℃

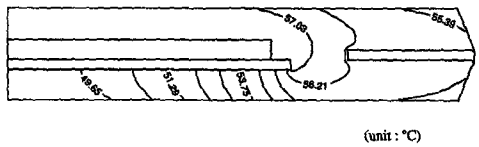


Fig. 6 Temperature distribution at 100 second. See Table 1 for material properties

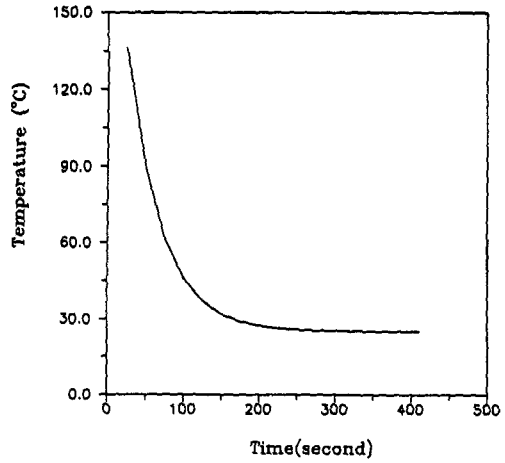


Fig. 7 Temperature variation at crack tip with time. See Table 1 for material properties (kink/main crack length : $\rho/l=0.07$)

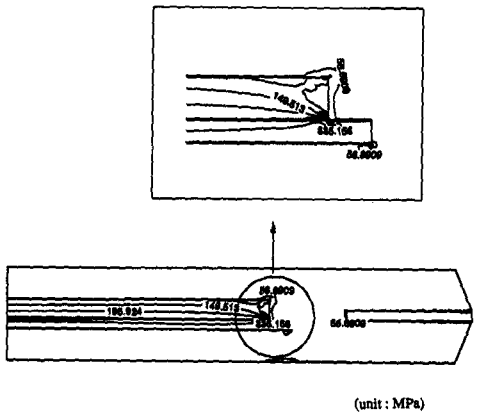


Fig. 8 Stress distribution at 100 second. See Table 1 for material properties

로 냉각될 때 패키지의 온도분포를 상용 FEM프로그램인 ABAQUS[13]를 이용하여 해석하였다. 이때 각각의 계면에서는 온도 및 열유속이 연속이며, 대칭면과 균열면에서는 단열로 가정하였다. 100초후 패키지내의 온도분포를 Fig. 6로 나타내었으며 균열선단에서의 시간에 따른 온도변화를 Fig. 7에 나타내었다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 여러 계면의 모서리(edge)에서 온도구배가 큼을 알 수 있다.

5.2 응력분포

패키지내의 온도구배에 의한 응력분포를 온도해석에서와 마찬가지로 ABAQUS[13]를 이용하여 해석하였으며 요소분할은 온도장 해석시의 요소분할

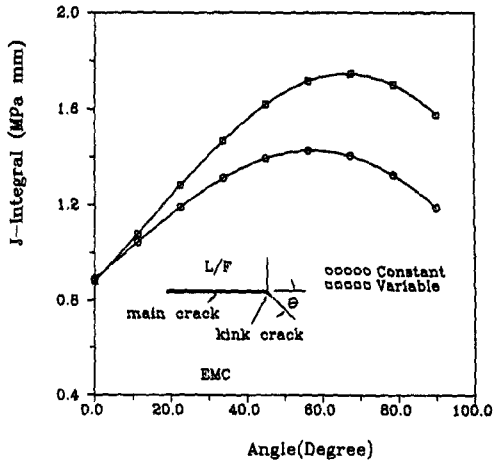


Fig. 9 J-integral vs. crack angle for two cases, one with constant material properties and the other with variable ones. See Table 1 for material properties(kink/main crack length : $\rho/l=0.07$)

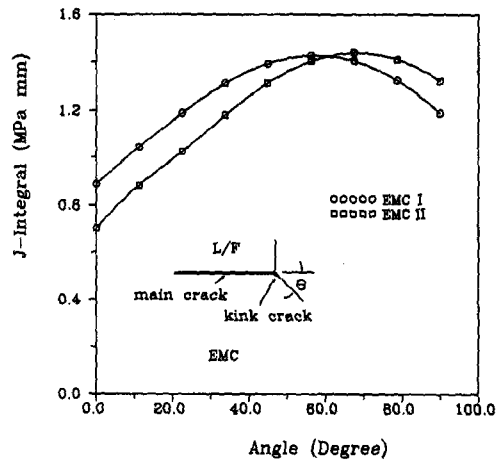


Fig. 10 J-integral vs. crack angle for two kinds of EMCs. Table 1 for material properties(kink/main crack length : $\rho/l=0.07$)

을 그대로 사용하였다. y축 대칭면에서는 x방향의 변위를 0으로 하였으며 다른 임의의 한점에서 y축의 변위를 0으로 하여 강체운동을 제거하였다. 그리고 균열면에는 210℃에서의 포화수증기압인 2.12 MPa의 압력을 가하는 것으로 가정하였다. 온도분포와 마찬가지로 100초후 패키지내의 응력분포를 Fig. 8에 나타내었다. 즉, 온도분포에서 예측되는 바와 같이 모서리부분 및 균열선단 부위에서 응력이 집중됨을 알 수 있다.

5.3 패키지균열

본 연구에서는 패키지균열의 방향을 예측하기 위하여 앞절의 M적분을 이용하여 초기 균열면으로부터 각의 변화에 따른 J적분을 계산하였다. 이로부터 최대 에너지방출률면은 대략 50°~65° 사이였으며(Fig. 9~15), 일반적으로 관찰되는 패키지균열의 현상과 일치한다. 우선 수지의 물성치를 상온에서의 값으로 일정하게 한 경우와 온도에 따른 변화를 고려할 경우에 대해 해석한 결과(Fig. 9), 물성치를 일정하게 한 경우에 에너지방출률을 과소평가하며 또한 꺾이는 각에 있어서도 약 10°의 차이가 생긴다. Steiner 등[14]의 수치해석 및 실험의 결과로부터 알 수 있듯이 정확한 응력해석을 위해서는 온도에 따른 물성치를 사용해야 한다.

수지와 L/F의 재료에 따른 에너지방출률은 비교적 큰 차이를 보이지 않았으며(Fig. 10, 11), 기하학적 형상으로 칩크기의 변화는 매우 큰 차이를 보이고 있다.(Fig. 12) 그리고 패드의 크기, 다운셋 등은 거의 영향을 주고 있지 않다.(Fig. 13, 14) 이것은 제1부[2]에서 층간박리의 경우와 마찬가지로 크기 및 위치의 변화로 인하여 강성의 변화를 가져오게 되어 굽힘응력이 큰 변화를 초래하고 있음을

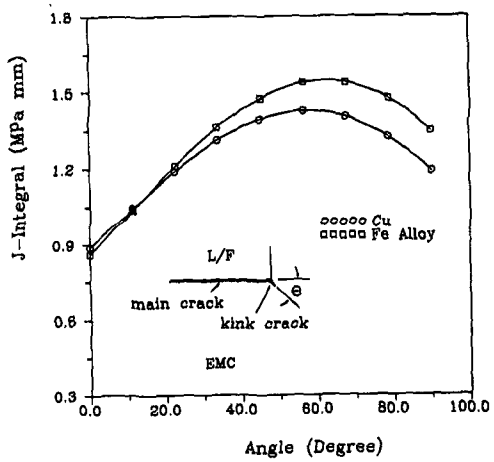


Fig. 11 J-integral vs. crack angle for two kinds of leadframes. See Table 1 for material properties(kink/main crack length : $\rho/l=0.07$)

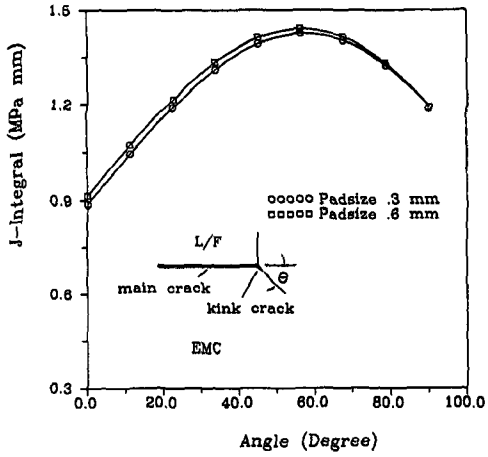


Fig. 13 J-integral vs. crack angle for two kinds of pad sizes. See Table 1 for material properties (kink/main crack length : $\rho/l=0.07$)

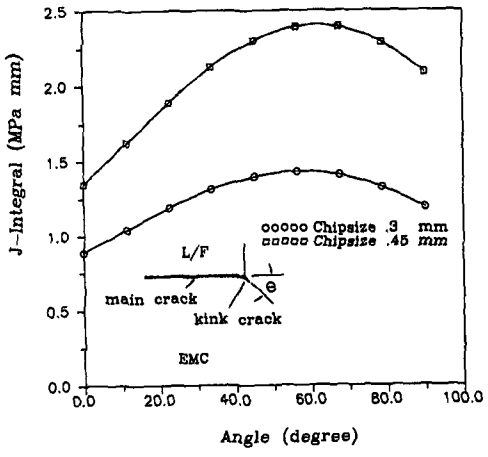


Fig. 12 J-integral vs. crack angle for two kinds of chip sizes. See Table 1 for material properties (kink/main crack length : $\rho/l=0.07$)

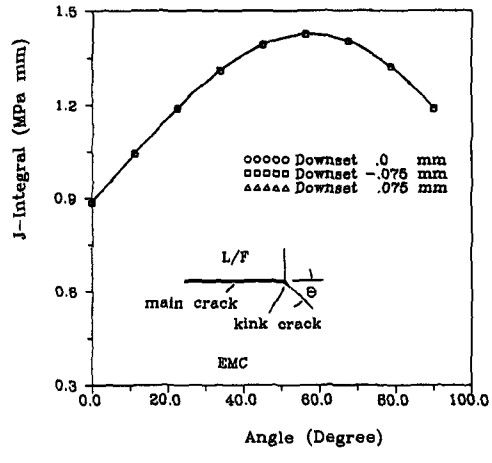


Fig. 14 J-integral vs. crack angle for three kinds of downsets. See Table 1 for material properties (kink/main crack length : $\rho/l=0.07$)

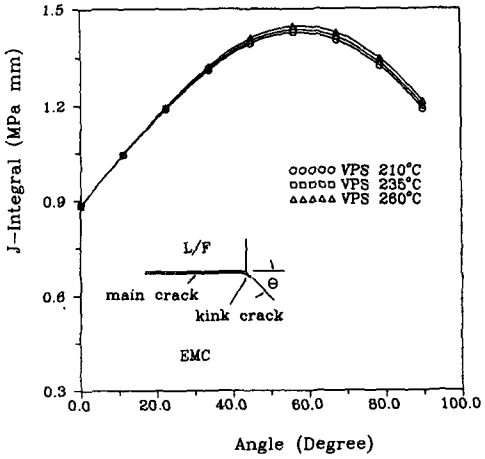


Fig. 15 J-integral vs. crack angle for three kinds of vapor phase soldering temperatures. See Table 1 for material properties(kink/main crack length : $\rho/l=0.07$)

알 수 있다. 공정의 변화에 대한 영향은 단순히 온도변화에 의해서는 거의 영향을 끼치지 않고 있다. (Fig. 15) 즉, 공정의 변화를 통한 최적설계는 전체적인 공정의 변화를 통해서 이룰 수 있음을 나타내고 있다.

이와 같이 패키지균열에 가장 큰 영향을 끼치는 것은 재료의 영향도 있으나, 무엇보다도 패키지의 기하학적 형상임을 알 수 있었다. 따라서 본 연구에서 계산하지는 않았지만, 바깥리드의 크기 및 위치, 패키지의 폭등을 고려한 패키지설계가 이루어져야 될 것으로 보인다.

6. 결 론

본 연구에서는 반도체패키지의 패키지균열을 파괴역학을 도입하여 해석을 하였다. 즉 M적분을 계산하여 이로부터 J적분과 J적분이 최대가 되는 방향을 예측하였다. 우선 응력해석시 수지의 물성치는 온도에 따른 값을 사용하지 않을 경우 에너지방출률을 과소평가함을 보였으며, 전체적으로 패키지균열의 각은 실제현상과 일치하였다. 그리고 층간박리와 마찬가지로 패키지균열에 있어서도 재료의 물성치 및 기하학적 형상이 큰 영향을 끼치고 있음을 알 수 있었다. 따라서 급속히 발전하는 반도체 패키지의 해석은 파괴역학을 도입함으로써 매우 정량적으로 평가할 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

이 연구는 과학기술처 특정연구개발사업인 "미소전자 부품에서의 패키지 설계기술 및 신뢰성 확보에 관한 연구"에서 수행된 것으로 관계자 여러분들께 감사를 드립니다.

참고문헌

(1) Manzione, L. T., 1990, *Plastic Packaging of Microelectronic Devices,* Van Nostrand Reinhold, New York.

(2) 박상선, 반용운과 엄윤용, 1994, "반도체패키지에서의 층간박리 및 패키지균열에 대한 파괴역학적 연구(1)-층각박리," 대한기계학회논문집, 제18권 제8호, pp. 2139~2157.

(3) Knowles, J. K. and Sternberg, E., 1972, "On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 44, pp. 187~211.

(4) 반용운, 1992, "계면균열 문제에서 M-적분의 계산," 석사학위논문, 한국과학기술원.

(5) Miyake, K., Suzuki, H. and Yamamoto, S., 1985, "Heat Transfer and Thermal Stress Analysis of Plastic-Encapsulated ICs," *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. R-34, pp. 402~409.

(6) 이상혁, 김경섭, 안승호, 오동열, 박 기, 1990, "4M DRAM 20 SOJ Package 열응력 분포해석," *Semiconductor Technical Journal*, Vol. 5, pp. 300~306.

(7) Kawamura, N., Kawakami, T., Matsumoto, K., Sawada, K. and Taguchi, H., 1993, "Structural Integrity Evaluation for a Plastic Package During the Soldering Process," EEP-Vol. 4-1, *Advances in Electronic Packaging*, pp. 91~95.

(8) Freund, L. B., 1978, "Stress Intensity Factor Calculations Based on a Conservation Integral," Int. J. Solids Structures, Vol. 14, pp. 241~250.

(9) Kubo, S., 1982, "An Application of M-Integral to Cracks in Dissimliar Elastic Materials," Int. J. Fract., Vol. 20, R27~R30.

(10) Rice, J. R., 1984, "Conserved Integrals and Energetic Forces," *Fundamentals of Deforma-*

tion and Fracture (Eshelby Memorial Symposium) (ed. by K. J. Miller and B. A. Billby), Cambridge University Press, Cambridge, pp. 465~476.

(11) Park, J. H. and Earmme, Y. Y., 1986, "Application of Conservation Integrals to Interfacial Crack Problems," *Mechanics of Materials*, Vol. 5, pp. 261~276.

(12) Wilson, W. K. and Yu, I. W., 1979, "The Use of the J-Integral in Thermal Stress Crack Problems," *Int. J. Fract.*, Vol. 5, pp. 261~276.

(13) *ABAQUS User's Manual*, Ver. 5.2, HKS Inc.

(14) Steiner, T. O. and Suhl, D., 1987, "Investigations of Large PLCC Package Cracking During Surface Mount Exposure," *IEEE Trans. on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, Vol. CHMT-10, pp. 209~216.

부 록

A. 수정 M적분

Knowles와 Sternberg[3]에 의해 제안된 2차원 응력장에 대해 M적분은 다음과 같이 정의된다.

$$M=\int_{\Gamma}(Wx_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds \tag{A1}$$

원점을 가로지르는 계면 혹은 균열이 존재하며 기계적하중을 받는 경우, M적분은 임의의 폐경로에 대해 0이 되며, 균질한 선형탄성재료에 대하여 경로독립성을 만족한다.

그러나 온도구배가 있고 또한 탄성계수가 온도의 함수일 경우 임의의 폐경로(Fig. 5)에 대하여 0이 되지 않으며, 이것은 Gauss정리와 평형방정식을 이용하면 다음과 같이 주어진다.

$$\int_{\Gamma+\Gamma_s-\Gamma_\varepsilon}(Wx_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds$$
$$=\int_{A-A_\varepsilon}(W_{,k}x_k+2W-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,k}x_k-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\,dA \tag{A2}$$

따라서 임의의 적분경로에 대하여 M적분은 다음과 같이 주어진다.

$$M=\int_{\Gamma_\varepsilon}(Wx_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds$$
$$=\int_{\Gamma+\Gamma_s}(Wx_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds$$
$$+\int_{A-A_\varepsilon}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,k}x_k+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-w_{,k}x_k-2W)\,dA \tag{A3}$$

식(A3)는 W의 정의에 따라 여러 다른 형태를 가지게 되나 J적분에서와 마찬가지로 모두 동일하며, 대표적인 다음의 네가지 경우에 대하여 M적분을 유도하면 다음과 같다.

(1) $W_1=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon^m_{ij}$

$$M=\int_{\Gamma+\Gamma_s}(W_1x_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds$$
$$+\int_{A-A_\varepsilon}\Big(\sigma_{ij}\varepsilon^t_{ij,k}x_k+\sigma_{ij}\varepsilon^t_{ij}$$
$$-\frac{1}{2}C_{ijkl,m}\varepsilon^m_{ij}\varepsilon^m_{kl}x_m\Big)dA \tag{A4}$$

(2) $W_2=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$

$$M=\int_{\Gamma+\Gamma_s}(W_2x_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds$$
$$+\int_{A-A_\varepsilon}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,k}-\sigma_{ij,k}\varepsilon_{ij})\,x_k\,dA \tag{A5}$$

(3) $W_3=\frac{1}{2}\sigma^m_{ij}\varepsilon_{ij}$

$$M=\int_{\Gamma+\Gamma_s}(W_3x_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds$$
$$+\int_{A-A_\varepsilon}\Big[\frac{1}{2}\Big\{(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,k}-\sigma_{ij,k}\varepsilon_{ij}$$
$$-(\beta\theta\varepsilon_{ii})_{,k}\Big\}x_k-\beta\theta\varepsilon_{kk}\Big]dA \tag{A6}$$

(4) $W_4=\frac{1}{2}\sigma^m_{ij}\varepsilon^m_{ij}$

$$M=\int_{\Gamma+\Gamma_s}(W_4x_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds$$
$$+\int_{A-A_\varepsilon}\Big\{(\sigma_{ij}\varepsilon^t_{ij,k}x_k+\sigma_{ij}\varepsilon^t_{ij}$$
$$-\frac{1}{2}C_{ijkl,m}\varepsilon^m_{ij}\varepsilon^m_{kl}x_m$$
$$-\frac{1}{2}(\beta\theta\varepsilon^m_{ii})_{,k}x_k-\beta\theta\varepsilon^m_{ii}\Big\}dA \tag{A7}$$

여기서,

$$C_{ijkl}=\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}$$
$$\beta=\frac{E\alpha}{1-2v}$$

이며, 위첨자 m과 t는 각각 기계적변형률, 열변형률을 의미한다.

물성치가 온도에 무관할 경우, 식(A4)~식(A7)은 다음과 같이 표현된다.

(1) $$M=\int_{\Gamma+\Gamma_0}(W_1x_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds+\int_{A-A_\varepsilon}\alpha\sigma_{kk}(\theta_{,k}x_k+\theta)\,dA \quad (A8)$$

(2) $$M=\int_{\Gamma+\Gamma_0}(W_2x_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds+\int_{A-A_\varepsilon}\frac{1}{2}\beta(\theta_{,k}\varepsilon_{ii}-\theta\varepsilon_{ii,k})\,x_kdA \quad (A9)$$

(3) $$M=\int_{\Gamma+\Gamma_0}(W_3x_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds+\int_{A-A_\varepsilon}\beta\theta(\varepsilon_{ii,k}x_k+\varepsilon_{ii})\,dA \quad (A10)$$

(4) $$M=\int_{\Gamma+\Gamma_0}(W_4x_in_i-t_iu_{i,j}x_j)\,ds+\int_{A-A_\varepsilon}\frac{1}{2}\beta(\theta_{,k}\varepsilon_{ii}-\theta\varepsilon_{ii,k})\,x_kdA \quad (A11)$$

J적분에서의 방법과 마찬가지로 식(A4)과 (A8)을 영역적분으로 바꾸면 다음과 같다.

$$M=\int_{A-A_\varepsilon}(\sigma_{kl}\varepsilon^f_{kl,i}x_i-C_{klmn,i}\varepsilon^m_{kl}\varepsilon^m_{mn}x_i+\sigma_{kl}\varepsilon^f_{kl})\,q+(\sigma_{ki}u_{k,j}x_j-Wx_i)\,q_{,i}dA-\int_{\Gamma_0}t_ku_{k,j}x_jds \quad (A12)$$

$$M=\int_{A-A_\varepsilon}\{\alpha\sigma_{kk}(\theta_{,i}x_i+\theta)\,q+(\sigma_{ki}u_{k,j}x_j-Wx_iq)\,q_{,i}\}dA-\int_{\Gamma_0}t_ku_{k,j}x_jds \quad (A13)$$