

LQG/LTR Method for Output-Delayed System

李 相 禎*·洪 錫 旼**
(Sang-Jeong Lee·Seok-Min Hong)

Abstract—This paper presents robustness properties of the Kalman Filter and the associated LQG/LTR method for linear time-invariant output-delayed systems. It is shown that, even for minimum phase plants, the LQG/LTR method can not recover the target loop transfer function. Instead, an upper bound on the recovery error is obtained using an upper bound of the solution of the Kalman filter Riccati equations. Finally, some dual properties between output-delayed systems and input-delayed systems are exploited.

Key Words : Loop Transfer Recovery, Output-delayed Systems, Recovery Error

1. 서 론

본 논문에서는 시간 지연 시스템에 대한 LQG/LTR 방법에 관련된 새로운 결과들을 제시한다. LQG/LTR 방법은 시간 지연이 없는 시스템들에 대해 많은 연구가 진행되어 왔으며[1~5], 이는 LQ 조정기와 칼만 필터의 강인성에 관한 결과[6,7]와 LQ 조정기의 저가 제어(cheap control) 특성이나 칼만 필터의 maximum accuracy 특성에 관한 결과[8]에 이론적 근거를 두고 있다.

또한, 이와 같은 상미방 시스템에서의 LQG/LTR 방법을 시간 지연 시스템으로 확장시켜 일반화하려는 연구도 진행되어 왔다. W. H. Kwon [9] K·Uchida와 E. Shimemura[10], W. H. Lee와 B. Levy[11]등이 LQ 조정기에 대한 circle 조건을 유도하였고 시간 지연이 없는 시스템에 대한 강인 안정 조건[1]을 이용하여 W. H. Lee와 B. Levy[11]는 상미방에 시간 지연이 있는 시스템에 대하여도 LQ 조정기가 동일한 안정도 여유를 보장함을 보였다. W. H. Kwon과 S. J. Lee [12]는 시간 지연 시스템에 대한 강인 안정 조건을 이용하여 상미방에 시간 지연이 있는 시스템

에 대한 강인성을 연구하였다. 특히, W.H.Kwon과 S.J.Lee[12]는 LQ 조정기의 저가 제어 특성을 규명하고 LQG/LTR 방법을 상미방에 시간 지연이 있는 시스템으로 확장시켰다. 입력에 시간 지연이 있는 시스템에 대하여는 Lee등[13]이 LQ 조정기의 안정도 여유를 개루우프 안정한 시스템에 대해 시스템 계수(parameter)들로서 명시적으로 표현하였으며 LQG/LTR 방법을 입력에 시간 지연이 있는 시스템으로 확장시켰다.

S.J.Lee와 S.M.Hong[18]은 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 칼만 필터의 강인성에 대해 연구하였다. 특히, 칼만 필터의 궤환차 행렬에 관련된 circle 조건을 유도하였으며, 이 조건과 강인 안정 조건[12]을 이용하여 상미방과 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 칼만 필터가 시간 지연이 없는 시스템에 대한 칼만 필터와 동일한 비발산 여유(nondivergence margin)를 보장함을 보였다. 그러나, 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 LQG/LTR 방법에 대한 결과들은 알려진 바 없다. 본 논문에서는 최소 위상 플랜트라 하더라도 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대하여는 LQG/LTR 방법으로 목표 루우프 전달 함수(target loop transfer function)행렬로 완전히 복구할 수 없음을 보인다. 또한, 개루우프 안정한 시스템에 대해 칼만 필터 Riccati 방정식의 해의 상한값을 이용하여 복구 오차의 상한값을 유도하였다.

*正 會 員 : 忠南大 工大 電子工學科 副教授·工博

**正 會 員 : 忠南大 大學院 電子工學科 博士課程

國防科學研究所 研究員

接受日字 : 1994年 1月 12日

1次修正 : 1994年 3月 16日

한편, 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 칼만 필터는 입력에 시간 지연이 있는 LQ 조정기와 쌍대(dual)의 관계에 있음이 잘 알려져 있다.[15] 특히, LQ 제어 문제와 칼만 필터 문제는 서로 어드조인트(adjoint)임이 알려져 있다. 이러한 특성을 이용하여 R.H.Kwong[15]은 정상(stationary)칼만 필터의 안정도를 증명한 바 있다. 본 논문에서는 출력 시간 지연 시스템에 대한 칼만 필터와 입력 시간 지연 시스템에 대한 LQ 조정기 사이의 새로운 쌍대 특성을 제시한다. 입력 시간 지연 시스템에 대한 LQ 조정기는 시간 지연이 없는 시스템에서와 동일한 안정도 여유를 보장하지 못한다. 반면에 LQG/LTR 방법을 적용하면 복구 오차 없이 목표 루우프 전달 함수로 완전히 복구됨이 알려져 있다.[13] 전술한 바와 같이 출력 시간 지연 시스템에 대한 칼만 필터는 시간 지연이 없는 시스템에서와 동일한 안정도 여유를 보장하나 LQG/LTR 방법 적용시 복구 오차를 완전히 제거할 수 없다. 본 논문에서는 출력 시간 지연 시스템에 대한 LQG/LTR 방법의 복구 오차와 입력 시간 지연 시스템에 대한 LQ 조정기의 케환 이득이 서로 쌍대 관계에 있음을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 칼만 필터의 강인성을 고찰하고 LQG/LTR 방법을 적용할 경우 LQG 제어기의 루우프 전달 함수의 접근값의 공식을 유도한다. 3장에서는 LQG/LTR 방법과 관련하여 입력 시간 지연 시스템과 출력 시간 지연 시스템 사이의 쌍대 관계를 제시하며 4장에 결론을 맺는다.

2. 칼만 필터의 강인성 및 루우프 전달 복구 특성

본 논문에서 다루는 시스템은 다음과 같다.

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = C_1x(t-h) + v(t) \quad (2.2)$$

여기서, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$ 이고 A , B 및 C_1 은 각각 $n \times n$, $n \times m$ 및 $m \times n$ 상수 행렬이다. $w(t)$ 와 $v(t)$ 는 영평균 백색 잡음으로 공분산 세기가 각각 E 및 Θ 이며, 서로 독립적 프로세스로 가정한다. 식 (2.1) 및 (2.2)에 대한 칼만 필터는 시스템이 검출 가능하다는 조건하에 다음과 같이 주어진다.[14]

$$\hat{x}(t/t) = A\hat{x}(t/t) + P_1(-h)C_1^T\Theta^{-1} [y(t) - C_1\hat{x}(t-h/t)] \quad (2.3)$$

$$\hat{x}(t-h/t) = \hat{x}(t-h/t-h) + \int_{-h}^0 P_2(-\sigma-h, -h) C_1^T\Theta^{-1} [y(t+\sigma) - C_1\hat{x}(t+\sigma-h/t+\sigma)] d\sigma \quad (2.4)$$

여기서, $-h \leq \theta \leq 0$ 의 구간에서 $\hat{x}(\theta|0) = 0$ 이며, P_0 , $P_1(\theta)$, $P_2(\theta, \eta)$ 는 다음과 같이 서로 연결된 Riccati 방정식의 해이다:

$$0 = AP_0^T + P_0A^T + E - P_1^T(-h)C_1^T\Theta^{-1}C_1P_1(-h) \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{d\theta}P_1(\theta) = -P_1(\theta)A^T + P_2(\theta, -h)C_1^T\Theta^{-1}C_1P_1(-h) \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\eta}\right)P_2(\theta, \eta) = P_2(\theta, -h)C_1^T\Theta^{-1}C_1P_2^T(\eta, -h) \quad (2.7)$$

이와 같은 Riccati 방정식의 경계 조건은 $-h \leq \theta \leq 0$ 에 대해

$$P_1(0) = P_0 \quad (2.8)$$

$$P_2(\theta, 0) = P_1(\theta) \quad (2.9)$$

이며, $-h \leq \theta \leq 0$, $-h \leq \eta \leq 0$ 에 대해

$$P_0^T = P_0 \quad (2.10)$$

$$P_2^T(\theta, \eta) = P_2(\eta, \theta) \quad (2.11)$$

과 같은 대칭성을 갖는다.

그림 2.1에 칼만 필터의 불려선도를 보였으며, 여기서 $\mu(t)$ 는 이노베이션(innovation) 벡터로서 다음과 같이 정의된다.

$$\mu(t) = y(t) - C_1\hat{x}(t-h/t) \quad (2.12)$$

추정된 출력 $\hat{y}(t)$ 와 이노베이션 벡터 $\mu(t)$ 는 주파수 영역에서 다음과 같은 관계로 표현될 수 있다.

$$\hat{y}(s) = [C_1e^{-sh}\Phi(s)H_1 + C_1e^{-sh}H_2(s)]\mu(s) \quad (2.13)$$

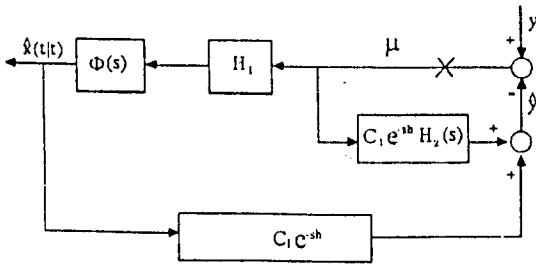


그림 2.1 출력지연 시스템에 대한 칼만 필터의 블록선도

Fig. 2.1 The block diagram of Kalman filters for output-delayed systems

여기서,

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (2.14)$$

$$H_1 = P_1^T(-h)C_1^T\Theta^{-1} \quad (2.15)$$

$$H_2(s) = \bar{P}_2(-s)C_1^T\Theta^{-1} \quad (2.16)$$

$$\bar{P}_2(s) = \int_{-h}^0 e^{s\theta} P_2(\theta, -h) d\theta \quad (2.17)$$

이다. 또한, 이와 같은 칼만 필터의 입력단 즉, 루우프 절단점 X에서의 계환차 행렬(return difference matrix)은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$T(s) = I + C_1 e^{-sh} \Phi(s) H_1 + C_1 e^{-sh} H_2(s) \quad (2.18)$$

정리 2.1[18]: 상태 및 출력에 시간 지연이 있는 시스템 (2.1) 및 (2.2)에 대한 칼만 필터는 주파수 영역에서 다음의 관계를 만족시킨다.

$$T(j\omega)\Theta T^*(j\omega) = \Theta + C_1 e^{-j\omega h} \Phi(j\omega) \Xi \Phi^*(j\omega) C_1^T e^{j\omega h} \quad (2.19)$$

여기서, *는 복소 공액 전치(complex-conjugate transpose)를 의미하며 $0 \leq \omega < \infty$ 이다.

정리 2.2[18]: 상태 및 출력에 시간 지연이 있는 시스템 (2.1) 및 (2.2)에 대한 칼만 필터 식 (2.3) 및 (2.4)는 시간 지연이 없는 시스템에 대한 칼만 필터와 동일한 비발산 여유를 보장한다.

즉, Θ 가 대각 행렬인 경우에 각 입력 루우프에 역시 대각 행렬을 갖는 비간섭 교란에 대해 $(1/2, \infty)$ 의 이득 여유와 $\pm 60^\circ$ 이상의 위상 여유를 보장한다.

한편, 식 (2.1) 및 식 (2.2)와 같이 주어지는 시스템에 대해 다음과 같은 성능 지수를 최소화하는 제어 입력 $u(t)$ 를 구하는 LQG 조정기를 고려하자.

$$J_1(u) = E \int_0^\infty \{y^T(t) Q y(t) + \rho u^T(t) u(t)\} dt \quad (2.20)$$

여기서, $Q = Q^T \geq 0$ 이고, $\rho > 0$ 이다. 성능 지수 식 (2.20)은

$$J_1(u) = E \int_{-h}^0 x^T(t) C_1^T Q C_1 x(t) dt + E \int_0^\infty \{x^T(t) C_1^T Q C_1 x(t) + \rho u^T(t) u(t)\} dt \quad (2.21)$$

과 같이 쓸 수 있으며, 식 (2.21)의 우변의 첫항은 제어 입력 $u(t)$ 에 무관하므로 성능 지수 식 (2.20)을 최소화하는 $u(t)$ 를 찾는 문제는 다음과 같은 성능 지수를 최소화하는 $u(t)$ 를 찾는 문제와 동가임을 알 수 있다.

$$J_2(u) = E \int_0^\infty \{x^T(t) C_1^T Q C_1 x(t) + \rho u^T(t) u(t)\} dt \quad (2.22)$$

이 문제의 해는 잘 알려져 있으며, 가안정성(stabilizability) 조건하에 다음과 같이 주어진다. [15]

$$u(t) = -\frac{1}{\rho} B^T K \hat{x}(t/t) \quad (2.23)$$

여기서, $\hat{x}(t/t)$ 는 식 (2.3)의 칼만 필터로부터 얻어질 수 있으며, K 는 다음과 같은 LQ Riccati 방정식의 해이다 :

$$0 = KA + A^T K + C_1^T Q C_1 - \frac{1}{\rho} K B B^T K \quad (2.24)$$

LQG 조정기의 블록선도는 그림 2.2와 같으며, 여기서 H_1 및 $H_2(s)$ 는 식 (2.15) 및 식 (2.16)과 같이 주어진다. 따라서 그림 2.2의 루우프 절단점 X에서 루우프 전달 함수 행렬은

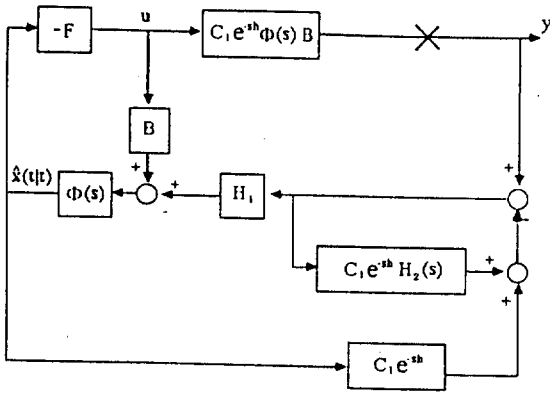


그림 2.2 출력지연 시스템에 대한 LQG 조정기의 블록선도
 Fig. 2.2 The block diagram of LQG regulators for output-delayed systems

$$L_{LQ\alpha}(s) = C_1 e^{-sh} \Phi(s) B F [\Phi^{-1}(s) + B F + H_1 H_3(s) C_1 e^{-sh}]^{-1} H_1 H_3(s) \quad (2.25)$$

와 같이 표현되며, 여기서

$$F = \frac{1}{\rho} B^T K \quad (2.26)$$

$$H_3(s) = [I + C_1 e^{-sh} H_2(s)]^{-1} \quad (2.27)$$

이다. 한편, 그림 2.1의 절단점 \times 에서 칼만 필터의 루우프 전달 함수 행렬은 다음과 같다.

$$L_{KF}(s) = C_1 e^{-sh} \Phi(s) H_1 + C_1 e^{-sh} H_2(s) \quad (2.29)$$

일반적으로 $L_{LQ\alpha}(s)$ 와 $L_{KF}(s)$ 는 서로 다르다. 그러므로, 시간 지연이 없는 시스템의 경우 [1]와 같이, 식 (2.1) 및 (2.2)와 같이 주어지는 시스템에 대한 LQG 조정기는 일반적으로 칼만 필터의 강인성을 보장하지 못한다. 이때 상태와 입력에 시간 지연이 있는 시스템의 경우에는 Doyle와 Stein [1]의 조건과 유사할 경우에 LQG 조정기의 루우프 전달 함수 행렬이 상태 제환을 갖는 LQ 조정기의 루우프 전달 함수 행렬로 복구될 수 있으나 [12,13] 출력에 시간 지연이 있는 시스템의 경우에는 LQG/LTR 방법이 목표 루우프 전달 함수 행렬을 복구할 수 없다.

정리 2.3 : 시스템 식 (2.1) 및 (2.2)에서 $C_1 Q^{1/2} \Phi(s) B$ 가 최소위상이고 우가역적 (right invertible)이라고 가정한다. 이 때, 플랜트 출력단에서 루우프 전달 복구과정을 취하면 $\rho \rightarrow 0$ 일 때,

$$L_{LQ\alpha}(s) \rightarrow [L_{KF}(s) - E(s)] [I + E(s)]^{-1} \quad (2.29)$$

$$S_{LQ\alpha}(s) \rightarrow [I + E(s)] S_{KF}(s) \quad (2.30)$$

이 되고, 이 때 오차 함수 $E(s)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$E(s) = C_1 e^{-sh} H_3(s) \quad (2.31)$$

증명 : 식 (2.25)로부터

$$\begin{aligned} L_{LQ\alpha} &= C_1 e^{-sh} \Phi B F [\bar{\Phi} - \bar{\Phi} B (I + F \bar{\Phi} B)^{-1} F \bar{\Phi}] H_1 H_3 \\ &= C_1 e^{-sh} \Phi B [I - F \bar{\Phi} B (I + F \bar{\Phi} B)^{-1}] F \bar{\Phi} H_1 H_3 \\ &= C_1 e^{-sh} \Phi B [I + F \bar{\Phi} B]^{-1} F \bar{\Phi} H_1 H_3 \end{aligned} \quad (2.32)$$

가 되며, 여기서

$\bar{\Phi}(s) = [\Phi^{-1}(s) + H_1 H_3(s) C_1 e^{-sh}]^{-1}$ 이다. 다음과 같은 LQ 조정기 이득의 점근적 특성 [8]을 이용하면 $\rho \rightarrow 0$ 일 때

$$F \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho}} W C_1 Q^{1/2} \quad (2.33)$$

이 되며, 여기서 W 는 단위 직교 행렬 (orthonormal matrix)이다. 따라서 $\rho \rightarrow 0$ 일 때

$$[I + F \bar{\Phi} B]^{-1} F = (C_1 \bar{\Phi} B)^{-1} C_1 \quad (2.34)$$

가 되므로 식 (2.34)를 식 (2.32)에 대입하면 $\rho \rightarrow 0$ 일 때

$$\begin{aligned} L_{LQ\alpha}(s) &= C_1 e^{-sh} \Phi B (C_1 \bar{\Phi} B)^{-1} C_1 \bar{\Phi} H_1 H_3 \\ &= C_1 e^{-sh} \Phi B [(I + C_1 e^{-sh} \Phi H_1 H_3)^{-1} \\ &\quad C_1 \bar{\Phi} B]^{-1} \cdot [I + C_1 e^{-sh} \Phi H_1 H_3]^{-1} C_1 \bar{\Phi} H_1 H_3 \\ &= C_1 e^{-sh} \Phi H_1 H_3 \end{aligned} \quad (2.35)$$

가 되어 식 (2.29)의 결과를 얻을 수 있다. 또 민감도 함수의 정의식 $S(s)=(I+L(s))^{-1}$ 로부터 식 (2.30)이 유도된다. 이상으로 증명은 완료된다. $\nabla\nabla\nabla$

정리 2.3의 결과는 최소 위상 플랜트라 하더라도 출력에 시간 지연이 있는 경우에는 LQG 조정기의 루우프 전달 함수 행렬이 칼만 필터의 목표 루우프 전달 함수 행렬로 완전히 복구되지 않음을 의미한다. 또한, 루우프 전달 함수 행렬과 민감도 함수 행렬은 시간 지연이 없는 비최소 위상 시스템에 대한 결과[2]와 동일한 형태이다. 즉, 식 (2.30)으로부터 오차 함수(error function)는 점근적인 LQG 루우프 민감도 함수와 칼만 필터의 민감도 함수 사이의 상대적인 오차로 표현할 수 있음을 알 수 있다. 또한, 식 (2.35)의 마지막 단계는 점근적인 보상기가 플랜트 $C_1e^{-s\theta} \Phi B$ 대신에 $C_1 \Phi B$ 로 변환됨을 명백히 보여주고 있으므로 $C_1 \Phi B$ 가 최소 위상이어야 함을 알 수 있다.

전술한 바와 같이 오차 함수 $E(s)$ 는 점근적인 LQG 조정기의 루우프 민감도 함수와 표적 루우프 민감도 함수 사이의 상대적 오차로 표현될 수 있으므로 복구의 정도(quality of recovery)는 $E(j\omega)$ 의 상한값에 의존하게 된다. 식 (2.31)로부터

$$E(j\omega) = \int_{-h}^0 e^{j\omega\theta} C_1 P_2(-\theta - h, -h) C_1^T d\theta \Theta^{-1} \quad (2.36)$$

으로 주어지므로 $E(j\omega)$ 의 상한값을 구하기 위해 먼저 $C_1 P_2(-\theta - h, -h) C_1^T$ 의 상한값을 입력 지연 시스템에 대한 LQ 조정기와 출력 지연 시스템에 대한 칼만 필터 사이의 쌍대성[15]을 이용하여 유도한다.

쌍대 제어 시스템(dual control system)은 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{z}(\tau) = -A^T z(\tau) - C_1^T u(\tau + h), \quad \tau = (-\infty, 0) \quad (2.37)$$

이 때, 초기 조건은

$$z(\theta) = \psi(\theta), \quad 0 < \theta \leq h \quad (2.38)$$

이며, 경비 함수는

$$J = \int_{-\infty}^0 [\bar{z}^T(\tau) \Xi \bar{z}(\tau) + u^T(\tau) \Theta u(\tau)] d\tau \quad (2.39)$$

이다. 한편

$t = -\tau, \bar{z}(t) = z(-t) = z(\tau), \bar{u}(t) = u(-t) = u(\tau)$ 로 각각 정의하면

$$\dot{\bar{z}}(t) = A^T \bar{z}(t) + C_1^T \bar{u}(t-h) \quad (2.40)$$

$$\bar{u}(\theta) = \bar{\psi}(\theta), \quad -h \leq \theta < 0 \quad (2.41)$$

$$J = \int_0^\infty [\bar{z}^T(t) \Xi \bar{z}(t) + \bar{u}^T(t) \Theta \bar{u}(t)] dt \quad (2.42)$$

가 되고, 이 때 $\bar{\psi}(\theta) = \psi(-\theta)$ 이다.

이 문제의 최적 제어 입력은 다음과 같이 주어진다.[15,17]

$$\bar{u}(t) = -\Theta^{-1} C_1 [E_1^T(0) \bar{z}(t) + \int_{-h}^0 E_2(0, \theta) C_1^T \bar{u}(t+\theta) d\theta] \quad (2.43)$$

여기서, 제환 이득은 다음과 같이 서로 결합되어 있는 일련의 Riccati 방정식의 해로 주어진다:

$$0 = E_0 A^T + A E_0 + \Xi - E_1(0) C_1^T \Theta^{-1} C_1 E_1^T(0) \quad (2.44)$$

$$\frac{d}{d\theta} E_1(\theta) = A E_1(\theta) - E_1(0) C_1^T \Theta^{-1} E_2^T(\theta, 0) \quad (2.45)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta}\right) E_2(\eta, \theta) = -E_2(\eta, 0) C_1^T \Theta^{-1} C_1 E_2^T(\theta, 0) \quad (2.46)$$

이 때, $-h \leq \theta \leq 0, -h \leq \eta \leq 0$ 의 조건하에서 경계 조건은

$$E_1(-h) = E_0 \quad (2.47)$$

$$E_2(-h, \theta) = E_1(\theta) \quad (2.48)$$

이고 대칭 조건은 다음과 같다.

$$E_0^T = E_0 \quad (2.49)$$

$$E_2^T(\eta, \theta) = E_2(\theta, \eta) \tag{2.50}$$

이제 쌍대 제어 문제에서 최적 필터 이득과 최적 제어 이득 사이의 관계식을 유도한다.

보조정리 2.1 : 쌍대 제어 문제에서 시스템 (2.1) 및 (2.2)에 대한 최적 필터 이득은 최적 제어 이득과 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$P_0 = E_0 \tag{2.51}$$

$$P_1^T(-\theta - h) = E_1(\theta) \tag{2.52}$$

$$P_2(-\eta - h, -\theta - h) = E_2(\eta, \theta) \tag{2.53}$$

이 때, $-h \leq \eta \leq 0, -h \leq \theta \leq 0$ 이다.

증 명 : 쌍대 제어 문제에서 최적 제어 입력은 다음과 같은 최적 필터 이득을 이용하여 표현 가능성이 잘 알려져 있다.[15]

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) = & -\Theta^{-1}C_1[P_1(-h)\bar{z}(t) \\ & + \int_{-h}^0 P_2^T(-\theta - h, -h)C_1^T \bar{u}(t+\theta)d\theta] \end{aligned} \tag{2.54}$$

(2.51)~(2.53)의 관계식은 제어 이득에 관련된 식 (2.43)과 식 (2.54)를 모두 만족하고 역시 동일한 Riccati 방정식과 그의 경계 조건을 만족함을 알 수 있다. 따라서 최적 제어와 최적 필터의 유일성(uniqueness)에 따라 (2.51)~(2.53)의 관계가 성립한다. 이상으로 증명은 완료된다.

▽▽▽

상태에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 쌍대 제어 문제에서 최적 필터 이득과 최적 제어이득 사이의 관계는 잘 알려져 있으며[14], 상태와 입력에 시간 지연이 있는 시스템에 대해서도 R. H. Kwong[15]은 정상(stationary) 최적 필터가 무한 시간 제어 문제에서 최적 폐회로 시스템과 어드조인트 관계에 있음을 보였다. 그러나 R. H. Kwong[15]은 보조정리 2.1과 같은 명백한 관계식을 보이지는 못했다.

다음에 보조정리 2.1의 관계식을 이용하여 $C_1 P_2(-\theta - h, -h)C_1^T$ 의 상한값을 구한다.

보조정리 2.2 : 시스템 (2.1) 및 (2.2)가 안정하다고 가정하면 $-h \leq \theta \leq 0$ 일 때

$$\begin{aligned} v[C_1 P_2(-\theta - h, -h)C_1^T] & \leq \bar{\sigma} \\ \left[\begin{array}{cc} C_1 N C_1^T & C_1 \Phi^T(-\theta) N C_1^T \\ C_1 N \Phi(-\theta) C_1^T & C_1 N C_1^T \end{array} \right] \end{aligned} \tag{2.55}$$

의 관계가 성립한다. 여기서, $v(\cdot)$ 는 임의의 행렬 $D = \{d_{ij}\}$ 에 대해

$$v(D) = \max_{i,j} |d_{ij}| \tag{2.56}$$

로 정의되는 노름(norm)이며, $\bar{\sigma}(\cdot)$ 는 최대 특이값(maximum singular value)이고 N 은 다음과 같이 표현된다.

$$N = \int_0^\infty \Phi^T(t) \Xi \Phi(t) dt \tag{2.57}$$

증 명 : 쌍대 제어 문제로, 주어진 초기 조건식 (2.41)과 $t \geq 0$ 에서 $u(t) = 0$ 로 두었을 때의 2차 경비 함수식 (2.42)의 값을 $V(\bar{z}(0), \bar{\psi})$ 라 두면

$$\bar{z}(t) = \begin{cases} \Phi(t)\bar{z}(0) + \int_{-h}^{t-h} \Phi(t-h-\theta)C_1^T \bar{\psi}(\theta)d\theta, & 0 \leq t < h \\ \Phi(t)\bar{z}(0) + \int_{-h}^0 \Phi(t-h-\theta)C_1^T \bar{\psi}(\theta)d\theta, & t \geq h \end{cases} \tag{2.58}$$

이 된다. $\epsilon > 0$ 와 $-h + \epsilon \leq \theta_1 + \epsilon \leq \theta_2 < -\epsilon$ 인 ϵ 과 θ_1, θ_2 에 대해서

$$\bar{z}(0) = 0 \tag{2.59}$$

$$\bar{\psi}(\theta) = \begin{cases} \xi_1, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + \epsilon \\ \xi_2, & \theta_2 \leq \theta \leq \theta_2 + \epsilon \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.60}$$

과 같이 초기 제어 함수를 취하면

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} V(\bar{z}(0), \bar{\psi}) & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^\infty \bar{z}^T(t) \Xi \bar{z}(t) dt \\ & = [\xi_1^T \xi_2^T] \begin{bmatrix} C_1 N C_1^T \\ C_1 N \Phi(\theta_2 - \theta_1) C_1^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \Phi^T(\theta_2 - \theta_1) N C_1^T \\ C_1 N C_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

과 같은 관계를 얻을 수 있다. 이제 최적 경비 식으로 부터

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} J(\bar{u}^\epsilon) = [\xi_1^T \xi_2^T] \begin{bmatrix} C_1 E_2(\theta_1, \theta_1) C_1^T \\ C_1 E_2(\theta_2, \theta_1) C_1^T \\ C_1 E_2(\theta_1, \theta_2) C_1^T \\ C_1 E_2(\theta_2, \theta_2) C_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

가 되어 식 (2.61)과 식(2.62)로부터

$$\begin{aligned} 0 \leq & \begin{bmatrix} C_1 E_2(\theta_1, \theta_1) C_1^T & C_1 E_2(\theta_1, \theta_2) C_1^T \\ C_1 E_2(\theta_2, \theta_1) C_1^T & C_1 E_2(\theta_2, \theta_2) C_1^T \end{bmatrix} \\ \leq & \begin{bmatrix} C_1 N C_1^T & C_1 \Phi^T(\theta_2 - \theta_1) N C_1^T \\ C_1 N \Phi(\theta_2 - \theta_1) C_1^T & C_1 N C_1^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.63)$$

이 된다.

한편, 임의의 양의 반한정 대칭행렬(symmetric positive semidefinite matrices) D 에 대해 $D \leq kI$ 이면 $v(D) \leq k$ 이다. 더불어 $D \leq \bar{\sigma}(D)$ 가 되고 임의의 블록행렬 Z 에 대해 $v(Z_{ii}) \leq v(Z)$ 가 된다.

이 때, Z_{ii} 는 Z 의 부분행렬(submatrices)이다. 따라서 θ_1 의 가능한 값을 모두 취하면 식 (2.63)의 관계로부터 $-h \leq \theta \leq \theta_2 < 0$ 에 대해

$$v[C_1 E_2(\theta_2, \theta) C_1^T] \leq \bar{\sigma} \begin{bmatrix} C_1 N C_1^T \\ C_1 N \Phi(\theta_2 - \theta) C_1^T \\ C_1 \Phi^T(\theta_2 - \theta) N C_1^T \\ C_1 N C_1^T \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

의 관계를 얻는다. 또 연속성(continuity)에 의해 $\theta_2=0$ 인 경우에도 만족된다. 이러한 부등식과 보조정리 2.1로부터 부등식 (2.55)가 성립한다.이 상으로 증명은 완료된다. $\nabla \nabla \nabla$
다음으로 오차 함수의 상한값을 유도한다.

정 리 2.4 : 식 (2.1) 및 (2.2)의 시스템이 개루우프 안정하다고 가정하면 점근적인 LQG 조정기의 루우프 민감도 함수와 목표 루우프 민감도 함수 사이의 상대적 오차인 $E(j\omega)$ 는 $0 \leq \omega < \infty$ 에서 다음의 상한값을 갖는다.

$$\bar{\sigma}[E(j\omega)] \leq m \bar{\sigma}(\Theta^{-1}) \int_{-h}^0 \bar{\sigma}[V_1(\theta)] d\theta \quad (2.65)$$

여기서, $V_1(\theta)$ 은

$$V_1(\theta) = \begin{bmatrix} C_1 N C_1^T & C_1 \Phi^T(-\theta) N C_1^T \\ C_1 N \Phi(-\theta) C_1^T & C_1 N C_1^T \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

이다.

증 명 : 식 (2.36)으로부터 $0 \leq \omega < \infty$ 영역에서 $\bar{\sigma}(D) \leq m \cdot v(D)$ 조건을 이용하면

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}[E(j\omega)] & \leq \bar{\sigma}(\Theta^{-1}) \cdot \bar{\sigma} \left[\int_{-h}^0 e^{j\omega\theta} C_1 P_2(-\theta - h, -h) C_1^T d\theta \right] \\ & \leq m \cdot \bar{\sigma}(\Theta^{-1}) \cdot \int_{-h}^0 v[C_1 P_2(-\theta - h, -h) C_1^T] d\theta \end{aligned} \quad (2.67)$$

이 된다. 보조정리 2.2를 이용하면 식 (2.67)로부터 식 (2.65)가 유도된다. 이상으로 증명은 완료된다. $\nabla \nabla \nabla$

이 장에서는 루우프 전달 복구(LTR) 절차를 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 적용할 때 민감도 함수 행렬의 점근적 특성을 명백히 제시하였다. 최소 위상 플랜트임에도 불구하고 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대해서는 목표 루우프 전달 함수 행렬로 완전히 복구될 수 없음을 보였으며 상대적 오차 함수 행렬의 상한값을 시스템 계수들의 항으로 명시적으로 표현하였다.

3. 칼만 필터와 LQ 제어기의 쌍대성

선형 확률적 시간 지연 시스템에 대한 최적 필터와 2차 경비 함수를 갖는 선형 시간 지연 시스템에 대한 최적 제어기 사이의 쌍대성은 이미 잘 알려져 있다. 상태 지연 시스템에 대하여 R. H. Kwong과 A. S. Willsky[14]는 쌍대 제어 문제로써 칼만 필터 이득과 최적 제어 이득 사이의 관계식을 유도하였다. R. H. Kwong과 A. S. Willsky[14]는 역시 쌍대 최적 제어 문제에서 잘 알려져 있는 안정도 특성을 이용하여 상태 지연 시스템에 대한 칼만 필터의 점근적 안정도를 증명하였다. 상태와 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대하여는 R. H. Kwong[15]이 정상 칼

만 필터가 쌍대인 무한 시간 제어 문제에 대한 최적 폐회로 시스템과 어드조인트 관계에 있음을 보였다.

한편, W.H.Kwon과 S.J.Lee[12]는 상태 지연 시스템에 대한 칼만 필터와 LQ 조정기가 구조를 갖지 않는 불확실성(unstructured uncertainty)에 대해 쌍대의 강인성을 갖고 있음을 보였다. 만약 출력에 시간 지연이 있는 경우 칼만 필터는 쌍대인 입력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 LQ 조정기와는 다른 강인성을 갖는다. 그러나, 이 경우에 있어서는 강인성과 루우프 전달 복구 특성 사이에 관련된 쌍대성을 갖는다. 이를 보이기 위하여 먼저 입력에 시간 지연이 있는 시스템을 위한 LQ 조정기의 강인성과 LQG 조정기의 루우프 전달 복구 특성을 살펴본다.

입력에 시간 지연이 있는 다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h) \quad (3.1)$$

이 때, 초기 조건은

$$u(\theta) = \psi(\theta), \quad -h \leq \theta < 0 \quad (3.2)$$

이고, 여기서, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ 이며 A 및 B_1 은 $n \times n$, $n \times m$ 상수 행렬이다. 2차 경비함수를

$$J(u) = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (3.3)$$

로 두고 $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$ 로 놓으면 가안정성(stabilizability) 조건하에서 LQ 조정기의 해는 다음과 같이 주어진다.[15,17]

$$u(t) = -R^{-1}B_1^T E_1^T(0) x(t) - R^{-1} \int_{-h}^0 B_1^T E_2(0, \theta) Bu(t+\theta) d\theta \quad (3.4)$$

여기서, 케환 이득들은 다음과 같이 서로 결합되어 있는 일련의 Riccati방정식의 해로 주어진다.

$$0 = E_0 A + A^T E_0 + Q - E_1(0) B_1 R^{-1} B_1^T E_1^T(0) \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{d\theta} E_1(\theta) = A^T E_1(\theta) - E_1(0) B_1 R^{-1} B_1^T E_2(0, \theta) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} E_2(\eta, \theta) = -E_2(\eta, 0) B_1 R^{-1} B_1^T E_2(0, \theta) \quad (3.7)$$

이때, $-h \leq \eta \leq 0$ 와 $-h \leq \theta \leq 0$ 의 구간에서 경계 조건은 식 (2.47) 및 식 (2.48)과 같고 대칭 조건은 식 (2.49) 및 (2.50)과 같다.

플랜트 입력단에서 루우프를 절단하였을 때 LQ 조정기의 케환차 행렬은

$$T_F(s) = I + F(s) \Phi(s) B_1 e^{-sh} \quad (3.8)$$

가 되고, 여기서

$$F(s) = [I + F_1(s)]^{-1} F_0 \quad (3.9)$$

$$F_0 = R^{-1} B_1^T E_1^T(0) \quad (3.10)$$

$$F_1(s) = R^{-1} B_1^T E_2(s) B_1 \quad (3.11)$$

$$E_2(s) = \int_{-h}^0 e^{s\theta} E_2(0, \theta) d\theta \quad (3.12)$$

이다.

이제 케환차 행렬과 관련한 circle 조건을 유도한다.

정리 3.1[13] : 식 (3.1)과 같은 시스템에 대한 LQ조정기는 주파수 영역에서 다음과 같은 관계를 만족시킨다.

$$T_F^*(j\omega) [I + F_1(j\omega)]^* R [I + F_1(j\omega)] T_F(j\omega) \geq R, \quad 0 \leq \omega < \infty \quad (3.13)$$

따라서 입력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 LQ조정기의 안정도 여유(stability margin)는 $F_1(j\omega)$ 의 크기에 의존함을 알 수 있다. 특히, 안정도 여유는 다음과 같이 유도된다.

정리 3.2[13] : 시스템 (3.1)이 개루우프 안정하다고 가정하면 플랜트 입력단에 비간섭 교란이 발생할 때 LQ 조정기의 식 (3.4)는 입력 가중 행렬 R 이 대각 행렬인 경우에 다음과 같은 안정도 여유를 갖는다.

$$\text{이득 여유} = \left(\frac{1+a}{2+a}, \frac{1+a}{a} \right) \quad (3.14)$$

$$\text{위상 여유} = \pm \cos^{-1} \left[1 - \frac{1}{2(1+a)^2} \right] \quad (3.15)$$

여기서,

$$a = m \cdot \bar{\sigma}(R^{-1}) \frac{\bar{\sigma}(R^2)}{\underline{\sigma}(R^2)} \int_{-h}^0 \bar{\sigma}[M(\theta)] d\theta \quad (3.16)$$

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} B_1^T N B_1 & B_1^T \Phi^T(-\theta) N B_1 \\ B_1^T N \Phi(-\theta) B_1 & B_1^T N B_1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

이고 N 은 식 (2.57)과 같이 정의되는 식이다.

이제 다음과 같은 시스템에 대한 LQG 조정기의 루우프 전달 복구 특성을 살펴본다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t-h) + w(t) \quad (3.18)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (3.19)$$

이 때, 초기 조건은 식(3.2)와 같고 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$ 이다. 또한 $w(t)$ 와 $v(t)$ 는 공분산 세기를 각각 E 와 Θ 로 갖는 영평균 백색 잡음이다.

위의 시스템에 대해 $Q = Q^T \geq 0$ 이고 $R = R^T > 0$ 인 2차 경비 함수

$$J(u) = E \int_0^\infty \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)\} dt \quad (3.20)$$

을 최소화하는 LQG 조정기는 가안정성과 가검출성(detectability) 조건하에서 다음과 같이 주어진다.[15]

$$u(t) = -R^{-1} B_1^T(0) \left[E_1^T \hat{x}(t) + \int_{-h}^0 E_2(0, \theta) B_1 u(t+\theta) d\theta \right] \quad (3.21)$$

여기서, 제환 이득 행렬들은 식 (3.5) ~ 식 (3.7)로부터 구할 수 있고, 칼만 필터는 상미방시스템의 방정식으로부터 구할 수 있다. LQG 조정기는 그림 3.1과 같이 표현할 수 있으며, 여기서 H 는 칼만 필터 이득으로

$$H = \Sigma C^T \Theta^{-1} \quad (3.22)$$

이 되고 Σ 는 다음과 같은 대수 Riccati 방정식의 해이다.

$$A \Sigma + \Sigma A^T - \Sigma C^T \Theta^{-1} C \Sigma + E = 0 \quad (3.23)$$

플랜트 입력단에서 루우프를 절단할 때 LQG 조정기의 제환차 행렬은

$$T_{LQG}(s) = I + F(s) [\Phi^{-1}(s) + HC + B_1 e^{-sh} F(s)]^{-1} HC \Phi(s) B_1 e^{-sh} \quad (3.24)$$

가 된다.

정리 3.3[13] : $C \Phi(s) B_1$ 이 개루우프 안정하고 최소위상이며, 좌가역적(left invertible) 이라고 가정하고 플랜트 입력단에 루우프 전달 복구절차를 적용하면 LQG 제어기의 제환차 행렬은 LQ 조정기의 제환차 행렬과 같아진다.

따라서 시스템 (3.18)~(3.19)에 대한 LQG 조정기의 제환차 행렬은

$$T_{LTR}^*(j\omega) [I + F_1(j\omega)] R [I + F_1(j\omega)] T_{LTR}(j\omega) = R + B_1^T e^{j\omega h} \Phi^*(j\omega) Q \Phi(j\omega) B_1 e^{-j\omega h} \quad (3.25)$$

가 되고, 반면에 시스템 (2.1)~(2.2)에 대한 LQG 조정기의 제환차 행렬은

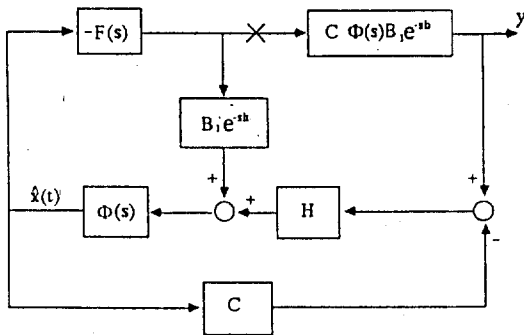


그림 3.1 입력지연 시스템에 대한 LQG 조정기의 블럭선도

Fig. 3.1 The block diagram of LQG regulators for input-delayed systems

$$\begin{aligned} & T_{LTR}^*(j\omega)[I+E(j\omega)]\Theta[I+E(j\omega)]^*T_{LTR}^*(j\omega) \\ & = \Theta + C_1 e^{-j\omega h} \Phi(j\omega) \Xi \Phi^*(j\omega) C_1^T e^{j\omega h} \end{aligned} \quad (3.26)$$

이 됨을 알 수 있다. 이제 쌍대성 관계에 대한 다음의 정리로 본 장을 결론 짓는다.

정 리 3.4 : 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 LQG 조정기와 그의 쌍대 시스템인 입력에 시간지연이 있는 시스템에 대한 LQG 조정기에 루우프 전달 복구 절차를 적용하면 결과의 LQG 조정기는 동일한 강인성을 갖는다.

증 명 : 이는 보조정리 2.1, 식(3.25), 식(3.26), 정의식(2.36) 및 식(3.11)로부터 쉽게 증명될 수 있다. $\nabla \nabla \nabla$

정리 3.4는 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 칼만 필터의 강인성과 입력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 쌍대 LQ 조정기의 강인성이 쌍대가 아니더라도 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 LQG 조정기와 입력에 시간 지연이 있는 쌍대 시스템에 대한 LQG 조정기에 루우프 전달 복구 절차를 적용시켰을 때 강인성 측면에서 서로 쌍대의 관계로 복구됨을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 칼만 필터의 강인성과 LQG 조정기의 루우프 전달 복구 특성을 연구하였다. 출력에 시간 지연이 있는 시스템은 최소 위상 시스템인 경우에도 LQG/LTR 방법으로 목표 칼만 필터 루우프 전달 함수로 완전히 복구시킬 수 없음을 보였다. 또한, 개루우프 안정한 시스템에 대해 복구 오차의 상한값을 유도하였다. 마지막으로 출력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 LQG/LTR 방법의 복구 오차가 쌍대인 입력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 LQ 조정기의 제한 이득과 쌍대 관계에 있음을 보였다.

본 연구는 한국과학재단(KOSEF) 및 국방과학연구소(ADD)의 연구비 지원에 의해 수행된 연구입니다.

참 고 문 헌

- [1] J. C. Doyle and G. Stein, "Robustness with observers," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.24, pp. 607-611, Aug. 1979.
- [2] Z. Zhang and J. S. Freudenberg, "Loop transfer recovery for nonminimum phase plants," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 35, pp. 547-553, May 1990.
- [3] G. Stein and M. Athans, "The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.32, pp. 105-114, Feb. 1987.
- [4] A. Saberi, B. M. Chen and P. Samuti, "Theory of LTR for nonminimum phase systems, recoverable target loops, and recovery in a subspace," Int. J. Contr., Vol. 53, No.5, pp. 1067-1160, 1991.
- [5] H. H. Niemann and O. Jannerup, "An analysis of pole/zero cancellation in LTR-based feedback design," in Proc. American Control Conference, 1990, San Diego, California, pp. 848-853.
- [6] M. G. Safonov and M. Athans, "Gain and phase margin of multiloop LQG regulators," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.22, pp. 173-179, Apr. 1977.
- [7] N. A. Lehtomaki, N. R. Sandell and M. Athans, "Robustness results in LQG based multivariable control designs," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.26, pp. 75-93, Feb. 1981.
- [8] H. Kwakernaak and R. Sivan, "The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.17, pp. 79-86, Feb. 1972.
- [9] W. H. Kwon, "Infinite-time regulator for a class of functional differential systems and a minimum control energy problem for ordinary differential systems," Ph. D dissertation, Brown Univ., Providence, RI, June 1976.
- [10] K. Uchida and E. Shimemura, "Closed-loop properties of the infinite-time linear quadratic optimal regulator for systems

- with delays," *Int. J. Contr.*, Vol. 43, No. 3, pp. 773-779, 1986.
- [11] W. H. Lee and B. Levy, "Robustness properties of linear quadratic hereditary differential systems," in *Proc. 21st IEEE Conf. on Decision and Control*, 1982, Orlando, FL, pp. 1267-1272.
- [12] W. H. Kwon and S. J. Lee, "LQG/LTR methods for linear systems with delay in state," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 47, No. 5, pp. 681-689, 1988.
- [13] S. J. Lee, W. H. Kwon and S. W. Kim, "LQG/LTR methods for linear input-delayed systems," *Int. J. Contr.*, Vol. 47, No. 5, pp. 1179-1194, July 1988.
- [14] R. H. Kwong and A. S. Willsky, "Estimation and filter stability of stochastic delayed systems," *SIAM J. Contr.*, Vol. 16, pp. 660-681, July 1978.
- [15] R. H. Kwong, "A stability for the linear-quadratic-Gaussian problem for systems with delay in the state, control and observations," *SIAM J. Contr.*, Vol. 18, No. 1, pp. 49-75, 1980.
- [16] G. J. Nazarov, "Inverse differential-delay systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 19, pp. 87-88, Feb. 1974.
- [17] M. A. Soliman and W. H. Ray, "Optimal feedback control for linear-quadratic systems having time delays," *Int. J. Contr.*, Vol. 15, No. 4, pp. 609-627, 1972.
- [18] S. J. Lee and S. M. Hong, "Robustness properties of Kalman filters for systems with delays in state and output," *전기학회 논문지*, 제40권 12호, pp. 1302-1307, 1991. 12.

저자 소개

이상정(李相楨)

전기학회 논문지 제43권 1호참조.

홍석민(洪錫旻)

전기학회 논문지 제43권 1호참조.