

〈論 文〉

# 동적시스템의 차수 줄임을 위한 주상태의 최적선택

Optimal Selection of Master States for Order Reduction

오동호\* · 박영진\*\*

Dong-Ho Oh and Youngjin Park

〈1993년 12월 16일 접수 ; 1994년 2월 18일 심사완료〉

## ABSTRACT

We propose a systematic method to select the master states, which are retained in the reduced model after the order reduction process. The proposed method is based on the fact that the range space of right eigenvector matrix is spanned by orthogonal base vectors, and tries to keep the orthogonality of the submatrix of the base vector matrix as much as possible during the reduction process. To quantify the skewness of that submatrix, we define "Absolute Singularity Factor(ASF)" based on its singular values. While the degree of observability is concerned with estimation error of state vector and up to  $n$ 'th order derivatives, ASF is related only to the minimum state estimation error. We can use ASF to evaluate the estimation performance of specific partial measurements compared with the best case in which all the state variables are identified based on the full measurements. A heuristic procedure to find suboptimal master states with reduced computational burden is also proposed.

## 1. 서 론

유한요소법(FEM)과 같은 모델링 기법에 의해 얻은 계의 모델이 정확하려면 요소(element)의 수가 많을수록, 곧 고차모델(high order model)일수록 좋다. 그러나 이 모델은 물리적으로 의미있는 모드 이외의 고차모우드들을 포함하므로, 결국 의미없는 많은 모우드까지 고려된 고차모델이다.

이런 고차모델을 ' $n$ '개 자유도가 있는 전모델(full model)로 볼때 동력학적 거동이 ' $m$ '개 모우드로 충분히 표현 가능하다면, 이를 나타내기 위하여는 모

든 자유도의 좌표들이 필요한 것이 아니라 그 일부인 ' $m$ '개만 측정하면 된다.

고차모델을 축약모델(Reduced model)화 하는 방법의 핵심은 '주자유도(master DOFs) 또는, 측정점을 어떻게 선택하는가' 이고, 그 이유는 주자유도(측정점)의 선택이 축약된 모델로부터 구해지는 나머지 자유도들의 확률적 추정 오차(stochastic estimation error)를 결정하기 때문이다.

본 연구에 앞선 비감쇠계(보존계)에서의 주자유도 선택에 대한 연구는 가제어성 행렬(controllability matrix)과 그래미안(Grammian)의 조건수를 구해 가제어성의 정도를 표현한 Friedland<sup>(1)</sup>, 최소 차수 구현(minimum order realization)을 연구한 Moore<sup>(2)</sup>, 모델의 축약, 확대 과정에서 오차상호분산을 작게하고자 한 Qi의 연구<sup>(3)</sup>, 모드공간에서 특이값을 이용하여 잡음의 영향이 정량적 매개변수로 나타나

\*한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어 연구센터(NOVIC)

\*\*정희원, 한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어 연구센터(NOVIC)

도록 한 Qi et al.의 연구<sup>(4)</sup>, 반복적 방법으로 주자유도가 아닌 자유도를 제거해 나가는 Kammer의 연구<sup>(5)</sup>, Guyan의 정적축약방법<sup>(6)</sup> 또는 IRS방법<sup>(7)</sup>에 근거를 둔 Penny et al.<sup>(8)</sup>, Bouhaddi et al.<sup>(9)</sup>, Avitabile et al.<sup>(10)</sup> 등의 연구, 대형 우주구조물(space structure)에서 잡음의 효과를 고려하여 센서위치를 결정한 Kammer의 연구<sup>(11,12)</sup>와, 그리고 가관측성(observability)과 ASF의 관계, 실공간에의 영향을 무시한 모우드공간의 자유도들이 유발하는 오차와 ASF의 관계에 대한 Oh, Park의 연구<sup>(22)</sup>, 이산시간에서 가제어도(degree of controllability)와 가관측도(degree of observability)에 대한 Xing et al.<sup>(23)</sup> 등의 연구가 있었다. 이밖에, Gevarter<sup>(24)</sup>와 Arbel<sup>(25)</sup>, 그리고 박종필 등<sup>(26)</sup>은 주자유도 선택의 응용분야인 비감쇠계에서 센서와 가진기(actuator)의 위치를 결정하는 연구를 수행하였다.

본 연구는 기존의 연구<sup>(3,4,12,22)</sup>에 감쇠계를 포함하도록 일반화 하기 위해  $\lambda$ 행렬(lambda matrix)<sup>(27,28)</sup>에 의한 상태공간형태를 기초로 하였으며, 실공간에서의 주자유도 대신 주상태를 선택한다.

본 논문은

- (1)  $\lambda$ 행렬을 이용한 일반 감쇠계 모델에서의 ASF 정의
- (2) 특수한 경우로 점성, 구조 감쇠계와 회전계로의 적용
- (3) 주상태의 준최적(suboptimal) 선택방법 제시 등을 포함한다.

제시된 주상태의 선택방법은 유한요소모델의 축약시 주상태 결정, 모우드 해석이나 제어시의 센서위치 결정등에 응용할 수 있다.

## 2. 이론 및 해석

동력학계에서는 실공간상의 각 자유도가 존재하는 좌표에 2개의 독립된 상태(state or phase)인 속도와 변위가 있고, 이를 상태변수(state variables)라 한다. 보존계도 각 자유도가 존재하는 좌표에 2개의 상태변수가 있지만, 1개의 상태변수만으로도 동력학적 거동을 알 수 있다.

다음은 일반 선형 감쇠계의 모델이다

$$[M]\{\ddot{y}\} + ([D] + [S])\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

여기서,

$[M] \in R^{n \times n}$  : 관성행렬(inertia matrix)

$[D] \in R^{n \times n}$  : 일반 점성 감쇠행렬(viscous damping matrix)

$[S] \in R^{n \times n}$  : 구조 감쇠행렬(structural damping matrix) ( $[S] = [K][\eta]/w$ ,  $[\eta] \in R^{n \times n}$ 는 손실인자,  $w$ 는 각속도)

$[K] \in R^{n \times n}$  : 강성행렬(stiffness matrix)

$\{y\} \in R^n$  : 변위벡터(displacement vector in physical space)

$\{f\} \in R^n$  : 힘벡터(force vector)

식 (1)의 상태공간형태는 다음과 같다.

$$[A]\{\dot{v}\} = [B]\{v\} + \{g\} \quad (2)$$

여기서,

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & ([D] + [S]) \end{bmatrix}, \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{y}\} \\ \{y\} \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K] \end{bmatrix}, \quad \{g\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix}$$

한편, 회전자유도가 있는 계의 모델은 회전단면을  $y$ 와  $z$ 좌표로 표현하여 고정좌표계에서 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zy} & M_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h}_y \\ \ddot{h}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h}_y \\ \dot{h}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_y \\ h_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y(t) \\ f_z(t) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서

$$[M_{yy}], [M_{yz}], [M_{zy}], [M_{zz}] \in R^{2n \times 2n}$$

$$[C_{yy}], [C_{yz}], [C_{zy}], [C_{zz}] \in C^{2n \times 2n}$$

$$[K_{yy}], [K_{yz}], [K_{zy}], [K_{zz}] \in C^{2n \times 2n}$$

$$\{h_y\} = \{y_1 \ \theta_{y1} \ y_2 \ \theta_{y2} \ \dots \ y_i \ \theta_{yi} \ \dots \ y_n \ \theta_{yn}\}^t \in R^{2n}$$

$$\{h_z\} = \{z_1 \ \theta_{z1} \ z_2 \ \theta_{z2} \ \dots \ z_i \ \theta_{zi} \ \dots \ z_n \ \theta_{zn}\}^t \in R^{2n}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad n \text{은 노드(node)의 수}$$

위와 같은 모델을 방향스펙트럼 방법<sup>(28)</sup>으로 표현하기 위하여 먼저, 'i'번째 노드(node)에서의 회전단면을 복소선회반경(complex whirl radius)에 해당하는 복소변위  $\{h_i(t)\} \in C^2$ 로 나타내면

$$\{h_i(t)\} = \begin{Bmatrix} y_i(t) + jz_i(t) \\ \theta_{yi}(t) + j\theta_{zi}(t) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

이고, 운동방정식을 복소변위  $\{h_i(t)\} \in C^{2n}$ 로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_f & M_b \\ \bar{M}_b & \bar{M}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \bar{h} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_f & C_b \\ \bar{C}_b & \bar{C}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \bar{h} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_f & K_b \\ \bar{K}_b & \bar{K}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \bar{h} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_c(t) \\ \bar{g}_c(t) \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

여기서,

$$\begin{aligned} 2[M_r] &= ([M_{yy}] + [M_{zz}]) - j([M_{yz}] - [M_{zy}]) \\ 2[M_b] &= ([M_{yy}] - [M_{zz}]) + j([M_{yz}] + [M_{zy}]) \\ 2[C_r] &= ([C_{yy}] + [C_{zz}]) - j([C_{yz}] - [C_{zy}]) \\ 2[C_b] &= ([C_{yy}] - [C_{zz}]) + j([C_{yz}] + [C_{zy}]) \\ 2[K_r] &= ([K_{yy}] + [K_{zz}]) - j([K_{yz}] - [K_{zy}]) \\ 2[K_b] &= ([K_{yy}] - [K_{zz}]) + j([K_{yz}] + [K_{zy}]) \\ \{g_c(t)\} &= \{f_y(t)\} + j\{f_z(t)\} \\ \{h(t)\} &= \{h_1(t) \ h_2(t) \cdots h_n(t)\}^t \end{aligned}$$

만약 고정좌표계에서 베어링과 같은 지지계가 등방성을 가진다면,  $[M_b] = [C_b] = [K_b] = [0]$ 이고, 식 (5a)를 아래식과 같이 축소하여 다시 쓸 수 있다.

$$[M_r]\{\dot{h}\} + [C_r]\{\dot{h}\} + [K_r]\{h\} = \{g_c(t)\} \quad (5b)$$

이밖에 히스테리시스 강성과 같이 복소매개변수로 표현되는 계를 비롯하여 여러 형태의 계에 대한 이후의 일반적 유도과정을 위해 관성행렬, 감쇠행렬, 강성행렬, 변위벡터 그리고 힘벡터를 각각  $[M_c] \in C^{n \times n}$ ,  $[C_c] \in C^{n \times n}$ ,  $\{q(t)\} \in C^n$  그리고  $\{f_c(t)\} \in C^n$  라 하여 모델 일반형을 나타내면 다음과 같다.

$$[M_c]\{\dot{q}\} + [C_c]\{\dot{q}\} + [K_c]\{q\} = \{f_c\} \quad (6)$$

윗식의 상태공간형태 (state space form)는 아래식과 같다.

$$[A_c]\{\dot{w}\} = [B_c]\{w\} + \{g_c\} \quad (7)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [A_c] &= \begin{bmatrix} [0] & [M_c] \\ [M_c] & [C_c] \end{bmatrix}, \quad \{w\} = \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} \\ [B_c] &= \begin{bmatrix} [M_c] & [0] \\ [0] & -[K_c] \end{bmatrix}, \quad \{g_c\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_c\} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

위와 같이 상태공간형태로 나타낸 식을 고유값문제화 하기 위하여, 해를 다음과 같이 가정하여

$$\{q(t)\} = \{u_c\} e^{\lambda t}, \quad \{u_c\} \in C^n \quad (8)$$

식 (4)에 대입하면,

$$\{\lambda^2[M_c] + \lambda[C_c] + [K_c]\}\{u_c\} e^{\lambda t} = \{f_c(t)\} \quad (9)$$

이고, 이식의 제차문제 (homogeneous problem)인 잠재값문제 (latent value problem)는

$$[D_2(\lambda)]\{u_c\} = \{0\} \quad (10)$$

으로, 여기서  $[D_2(\lambda)] = \lambda^2[M_c] + \lambda[C_c] + [K_c]$ ,  $\{u_c\}$ 는 우측 잠재벡터 (right latent vector) 또는 모우드 벡터이다.

일반적으로  $[M_c]$ 은 비특이성을 가지므로  $[D_2(\lambda)]$ 는 정규 (regular)하고, ' $\lambda[A_c] - [B_c]$ '인 행렬 속선형 (matrix pencil)도 정규 행렬 속선형 (regular matrix

pencil)이 된다. 그리고 어느 한 잠재근 (latent root)  $\lambda_i$ 에 대해  $\lambda_i$ 의 중첩 (multiplicity)이 행렬 속선형의 비형성 (degeneracy) 수와 같아 행렬 속선형이 단순 (simple)하다고 할때 (여기서, 행렬 속선형이 단순하다는 의미는  $\lambda_i$ 가 단일근 이거나, 중근 이더라도 서로 다른 고유벡터를 가지고 있음을 뜻한다. (27,28)) 식 (5)와 관련된 고유값문제와 공액복소 좌측고유값문제 (adjoint problem)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_i^r [A_c] \{r_c\}_i^r &= [B_c] \{r_c\}_i^r \\ r &= B, F \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \bar{\lambda}_j^s [A_c]^H \{\bar{l}_c\}_j^s &= [B_c]^H \{\bar{l}_c\}_j^s \\ s &= B, F \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, 윗첨자의 'B'는 후방향을 'F'는 전방향을 의미하고, 아래첨자는 'i' 또는 'j'번째 고유벡터임을 뜻하며,  $\{\bar{l}_c\}_j^s$ 는 공액복소 좌측고유벡터이고,  $\{r_c\}_i^r$ 는 (우측)고유벡터로 다음과 같다.

$$\{r_c\}_i^r = \begin{cases} \lambda \{u_c\}_i^r \\ \{u_c\}_i^r \end{cases} \quad (12)$$

이때 (우측)고유벡터와 좌측고유벡터는 아래와 같은 상호직교성 (biorthogonality) 조건을 만족하도록 한다.

$$\begin{aligned} \{\bar{l}_c\}_j^s [A_c] \{r_c\}_i^r &= \delta_{ij}^{rs} \\ r, s &= B, F \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ \{\bar{l}_c\}_j^s [B_c] \{r_c\}_i^r &= \lambda_i^r \delta_{ij}^{rs} \\ \delta_{ij}^{rs} &\text{는 } \delta_{rs} \delta_{ij} \text{인 Kronecker delta} \end{aligned} \quad (13)$$

상태벡터  $\{w\}$ 와 이것의 고유공간 상태벡터인  $\{p\} \in C^{2n}$ 사이의 선형변환은

$$\{w\} = [T] \{p\} \quad (14a)$$

또는,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w_a \\ w_r \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_{2n \times e} & T_{2n \times g} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_e \\ p_g \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_{a \times e} & T_{a \times g} \\ T_{r \times e} & T_{r \times g} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_e \\ p_g \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (14a)$$

여기서,

$[T] \in C^{2n \times 2n}$ : 우측 고유벡터행렬로  $\{r_c\}_i^r$ 는 전방향 (forward) 고유벡터,  $\{r_c\}_i^B$ 는 후방향 (backward) 고유벡터라 할때,  $[T] = [\{r_c\}_1^B \cdots \{r_c\}_n^B \{r_c\}_1^F \cdots \{r_c\}_n^F]$

$\{w_a\} \in C^a$ : 실공간에서의 주상태벡터

$\{w_r\} \in C^r$ : 주상태 이외의 실공간에서의 과잉 (redundant) 상태벡터

$\{p_e\} \in C^e$ : 실공간에 영향이 있는 고유공간 상태벡터

$\{P_g\} \in C^g$  : 실공간에 영향을 무시할 수 있는 잉여 (residual) 고유공간 상태벡터

$[T_{2n \times e}] \in C^{2ne}$  : 관심주파수 영역내의 'e'개 고유벡터로 이루어진 고유벡터행렬로,  $\{r_c\}_k^e \cdots \{r_c\}_2^e \{r_c\}_1^e : \{r_c\}_1^e \{r_c\}_2^e \cdots \{r_c\}_k^e$ 이다.

단,  $j+k=e$

$[T_{a \times e}] \in C^{a \times e}$  :  $[T_{2n \times e}]$ 에서 주상태에 해당하는 행 벡터만 취한 행렬

윗식에서 선택된 주상태로 부터 고려된 고유공간 상태를 구할 수 있기 위하여 'a'는 'e'보다 크거나 같아야만 하므로  $2n \geq a \geq e$ ,  $a+r=2n$ ,  $e+g=2n$ 이라 가정하고, 다시 쓰면 아래 식과 같다.

$$\{w\} = [T_{2n \times e}]\{P_e\} + [T_{2n \times g}]\{P_g\} \quad (15)$$

$\{w\}$ 의 부벡터인 주상태 벡터  $\{w_a\}$ 는

$$\{w_a\} = [T_{a \times e}]\{P_e\} + [T_{a \times g}]\{P_g\} \quad (16)$$

이고, 윗식에서 최소자승오차관점에서의  $\{P_e\}$ , 즉,  $\{P_e\}_{LS}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\{P_e\}_{LS} = [T_{a \times e}]^+ \{w_a\} - [T_{a \times e}]^+ [T_{a \times g}]\{P_g\} \quad (17)$$

여기서,  $[\cdot]^+$ 는  $[\cdot]$ 의 Moore-Penrose 일반 역행렬이다.

동적거동이 'e'개 고유벡터로 충분히 표현 가능하다면 잉여 고유벡터  $\{p_g\}$ 의 크기가 작아 무시할 수 있으므로 주상태벡터로부터 예측한 전상태벡터 (estimated state vector)  $\{\hat{w}\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\hat{w}\} = [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ \{w_a\} \quad (18)$$

하지만, 주상태벡터의 측정치에는 잡음이 포함되어 있으므로 다음과 같이 선택된 'a'개 주상태 신호에 평균 0, 분산  $\sigma_n^2$ 을 갖는 백색잡음  $\{n\} \in R^a$ 이 더해진 형태로 표현 가능하고,

$$\{\hat{w}_a\} = \{w_a\} + \{n\} \quad (19)$$

주상태 벡터의 측정치로부터 예측한 전상태벡터  $\{\hat{w}\}$ 는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\{\hat{w}\} = [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ \{\hat{w}_a\} \quad (20)$$

식 (15), (20)으로부터 오차벡터 (error vector)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{e\} &= \{w\} - \{\hat{w}\} \\ &= [T_{2n \times e}]\{P_e\} + [T_{2n \times g}]\{P_g\} \\ &\quad - [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ \{w_a\} - [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ \{n\} \\ &= -[T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ \{n\} + ([T_{2n \times g}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ [T_{a \times g}]\{P_g\} \\ &= \{e\}_s + \{e\}_{spill\ over} \end{aligned} \quad (21a)$$

또는,

$$\begin{aligned} \{e\} &= -[T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ (\{n\} \\ &\quad + [T_{a \times g}]\{P_g\}) + [T_{2n \times g}]\{P_g\} \\ &= -[T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ \{n\} \\ &\quad - [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ [T_{a \times g}]\{P_g\} \\ &\quad + [T_{2n \times g}]\{P_g\} \\ &= \{e\}_s + \{e\}_d + \{e\}_g \end{aligned} \quad (21b)$$

여기서,  $\{e\}_s (= -[T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ \{n\})$ 는 확률오차 (stochastic error),  $\{e\}_d (= -[T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ [T_{a \times g}]\{P_g\})$ 는 확정오차 (deterministic error)이고,  $\{e\}_g (= [T_{2n \times g}]\{P_g\})$ 는 고려되지 않은 잉여 고차고유벡터들에 의한 오차로 주상태 선택과 관계 없이 일정한 오차이다. 일반적으로 확률오차  $\{e\}_s$ 가 줄어들면 번짐 오차  $\{e\}_{spill\ over} (= \{e\}_d + \{e\}_g)$ 도 줄어드는 경향이 있으므로 확률오차만 고려하기로 한다. <sup>(22,23)</sup>

오차 가중자승합 (weighted square sum)의 확률평균을 목적함수  $J$ 라 할때,

$$\begin{aligned} J &= E(\{e\}_s^H [W] \{e\}_s) \\ &= E(Tr(\{W\} \{e\}_s \{e\}_s^H)) \\ &= Tr(\{W\} [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ [R]^2 [T_{a \times e}]^H \\ &\quad [T_{2n \times e}]^H) \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,  $E(\cdot)$ 는  $(\cdot)$ 의 기대값,  $Tr(\cdot)$ 는  $(\cdot)$ 의 대각요소합 (trace), 그리고  $[W] \in C^{2n \times 2n}$ 는 상태 오차의 가중행렬로 일반성의 상실없이 복소공액대칭 (Hermitian)이라 가정할 수 있으므로  $[W] = [H_1]^H [H_1]$ 로 분리한다. 한편,  $[R]^2 \in R^{a \times a}$ 는 백색잡음의 상호분산으로 다음과 같을때

$$\begin{aligned} [R]^2 &= E(\{n\} \{n\}^t) \\ &= \text{diag}(\sigma_{n_1}^2, \sigma_{n_2}^2, \sigma_{n_a}^2) \end{aligned} \quad (23)$$

목적함수  $J$ 는

$$\begin{aligned} J &= Tr(\{H_1\} [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ [R] [R] \\ &\quad [T_{a \times e}]^H [T_{2n \times e}]^H \{H_1\}^H) \\ &= Tr(\{H_1\} [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ [R])^H \\ &\quad (\{H_1\} [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ [R]) \\ &= \|\{H_1\} [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ [R]\|_F^2 \end{aligned} \quad (24)$$

여기서,  $\|\cdot\|_F$ 은 Frobenius 노름이고, 이로부터  $\|\{H_1\} [T_{2n \times e}][T_{a \times e}]^+ [R]\|_F$ 가 오차의 크기를 결정하는 값임을 알 수 있다. 위식의 분석과 간략화를 위해 다음의 가정을 한다.

[가정1] 각 상태의 오차 가중치가 같다.  $[W]=[I]$   
 [가정2] 각 상태에 더해지는 잡음의 특성이 같다.

$$[R]^2 = \sigma_n^2 [I]$$

$[T_{2n \times e}]$ 를 특이값분리(Singular Value Decomposition)하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} [T_{2n \times e}] &= [U][\Sigma][V]^H = [U_1][\Sigma_1][V]^H \\ \begin{bmatrix} T_{a \times e} \\ T_{r \times e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_{a1} & U_{a2} \\ U_{r1} & U_{r2} \end{bmatrix} [\Sigma][V]^H = \begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{r1} \end{bmatrix} [\Sigma_1][V]^H \end{aligned} \quad (25)$$

여기서,  $[U_1]$ 은 좌측특이벡터행렬  $[U]$ 의 처음 'e'개 열로 이루어진 부행렬(submatrix)로  $[U_1]$ 의 열은  $[T_{2n \times e}]$ 의 열공간(range space)의 직교기저(orthonormal bases)를 이루고,  $[\Sigma_1]$ 은  $[\Sigma]$ 의 양의 한정 형태(positive definite form)인 부행렬이다. 식 (24)와 (25)로부터 목적함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} J &= \sigma_n^2 \text{Tr}([T_{a \times e}]^H [T_{2n \times e}]^H [T_{2n \times e}] [T_{a \times e}])^+ \\ &= \sigma_n^2 \|[T_{2n \times e}]^+ [T_{a \times e}]^+\|_F^2 \end{aligned} \quad (26a)$$

또한,

$$\begin{aligned} J &= \sigma_n^2 \text{Tr}([T_{2n \times e}]^H [T_{2n \times e}] [T_{a \times e}]^+ [T_{a \times e}]^H) \\ &= \sigma_n^2 \text{Tr}([V][\Sigma_1][U_1]^H [U_1][\Sigma_1][V]^H [V] \\ &\quad [\Sigma_1]^{-1} [U_{a1}]^+ [U_{a1}]^H [\Sigma_1]^{-1} [V]^H) \\ &= \sigma_n^2 \text{Tr}([\Sigma_1]^2 [\Sigma_1]^{-1} [U_{a1}]^+ [U_{a1}]^H [\Sigma_1]^{-1}) \\ &= \sigma_n^2 \text{Tr}([U_{a1}]^+ [U_{a1}]^H) \\ &= \sigma_n^2 \text{Tr}([U_{a1}]^H [U_{a1}])^{-1} \\ &= \sigma_n^2 \text{Tr} \|[U_{a1}]^+\|_F^2 \end{aligned} \quad (26b)$$

위의 결과로부터 다음과 같은 지수 SF(Singularity Factor)를 정의할 수 있다. (22,30)

$$SF \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^e s_i^{-2}} = \|[T_{2n \times e}] [T_{a \times e}]^+\|_F = \|[U_{a1}]^+\|_F \quad (27)$$

윗식에서  $s_i$ 가  $[U_{a1}]$ 의 특이값일때 식 (27)은 주상태 선택이 목적함수의 값을 결정하는 요인임을 의미하고, 식 (26a), (26b)를 다시 쓰면  $J = \sigma_n^2 SF^2$ 이 된다.

한편, SF는 상대적 수치이므로 여러경우를 비교할 수 있는 절대개념의 지수가 필요하다.

식 (26b)에서  $[U]$ 는 일원(unitary)행렬이므로

$$([U_{a1}]^H [U_{a1}])^{-1} = ([I_e] - [U_{r1}]^H [U_{r1}])^{-1} \quad (28a)$$

이고, Sherman-Morrison-Woodbury공식(29)에 의해

$$\begin{aligned} ([I_e] - [U_{r1}]^H [U_{r1}])^{-1} \\ = [I_e] + [U_{r1}]^H ([I] - [U_{r1}] [U_{r1}]^H)^{-1} [U_{r1}] \end{aligned} \quad (28b)$$

이다. 여기서,  $[U_{r1}]$ 과  $([I] - [U_{r1}] [U_{r1}]^H)^{-1}$ 은 정칙(non-singular)행렬이므로 정리하면,

$$\begin{aligned} ([U_{a1}]^H [U_{a1}])^{-1} \\ = [I_e] + [U_{r1}]^H [U_{r2}]^H [U_{r2}]^+ [U_{r1}] \end{aligned} \quad (28c)$$

이고,  $\|[T_{2n \times e}] [T_{a \times e}]^+\|_F^2$ 의 하한값(lower bound)을 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} \|[T_{2n \times e}] [T_{a \times e}]^+\|_F^2 \\ = \text{Tr}([I_e]) + \text{Tr}([U_{r1}]^H [U_{r2}]^H [U_{r2}]^+ [U_{r1}]) \\ = \|[T_{2n \times e}] [T_{a \times e}]^+\|_F^2 + \|[U_{r2}]^+ [U_{r1}]\|_F^2 \\ \geq \|[I_e]\|_F^2 = \|[T_{2n \times e}] [T_{2n \times e}]\|_F^2 = e \end{aligned} \quad (29)$$

이로부터,

$$SF \geq \|[T_{2n \times e}] [T_{2n \times e}]\|_F = \sqrt{e} \quad (30)$$

이고, 이는 전상태를 측정할 경우의 확률오차가 가장 적음을 의미한다. SF를 SF의 하한값  $\sqrt{e}$ 로 나누어준 것을 절대 개념의 지수 ASF(Absolute Singularity Factor)라 정의한다. (22,30)

$$\begin{aligned} ASF &\equiv SF / \sqrt{e} \\ &= \|[T_{2n \times e}] [T_{a \times e}]^+\|_F / \sqrt{e} \\ &= \|[U_{a1}]^+\|_F / \sqrt{e} \geq 1 \end{aligned} \quad (31)$$

결국 ASF는 전상태를 모두 측정하는 경우에 비하여 주상태만의 측정을 기초로 예측하는 경우의 오차 증가율을 나타낸다고 하겠다.

열공간(range space)을  $\mathfrak{R}(\cdot)$ 로 표시할때, 위의 결과는 투영관점에서 다음과 같다.

전상태벡터  $\{w(t)\}$ 와 주상태벡터  $\{w_a(t)\}$ 의 관계, 즉,  $\{w_a(t)\} = [E]\{w(t)\}$ 을  $[E] \in C^{a \times 2n}$ 로 표현할때 전상태에 있는 잡음벡터  $\{n(t)\}_{2n} \in R^{2n}$ 과 주상태에 있는 잡음벡터  $\{n(t)\} \in R^a$ 의 관계도  $\{n(t)\} [E] \{n(t)\}_{2n}$ 이고,  $\{n(t)\}$ 을 전상태공간 '2n'차원에서 표현하면  $[E]^H [E] \{n(t)\}_{2n}$ 으로  $\{n(t)\}_a \in R^{2n}$ 이라 하자. 여기서,  $[E]$ 는 각 행벡터의 요소중 하나만 '1'이고 나머지는 모두 '0'인 부울리안(boolean)행렬이다. (Fig. 1)

$\{n(t)\}_{2n}$ 을  $\mathfrak{R}([T_{2n \times e}])$ 상으로 투영<sup>㉑</sup>한다는 것은 전상태에 있는 잡음을  $\mathfrak{R}([T_{2n \times e}])$ 상에서 오차거리가 가장 적은 벡터  $\{e_b\}$ 로 표현한 것으로,  $\{n(t)\}$ 도 이와같이  $\mathfrak{R}([T_{a \times e}])$ 상에 투영하여<sup>㉒</sup>  $\{e_a\}$ 로 표현할 수 있다. 하지만,  $\{n(t)\}$ 은  $\mathfrak{R}([T_{2n \times e}])$ 상에서 직접 투영할 수 없기 때문에 행공간  $\mathfrak{R}([T_{a \times e}]^H)$ 상을 통한 축약공간투영<sup>㉓</sup>에 의해서  $\mathfrak{R}([T_{2n \times e}])$ 상에  $\{e_s\}$ 로 표현할 수 밖에 없다.

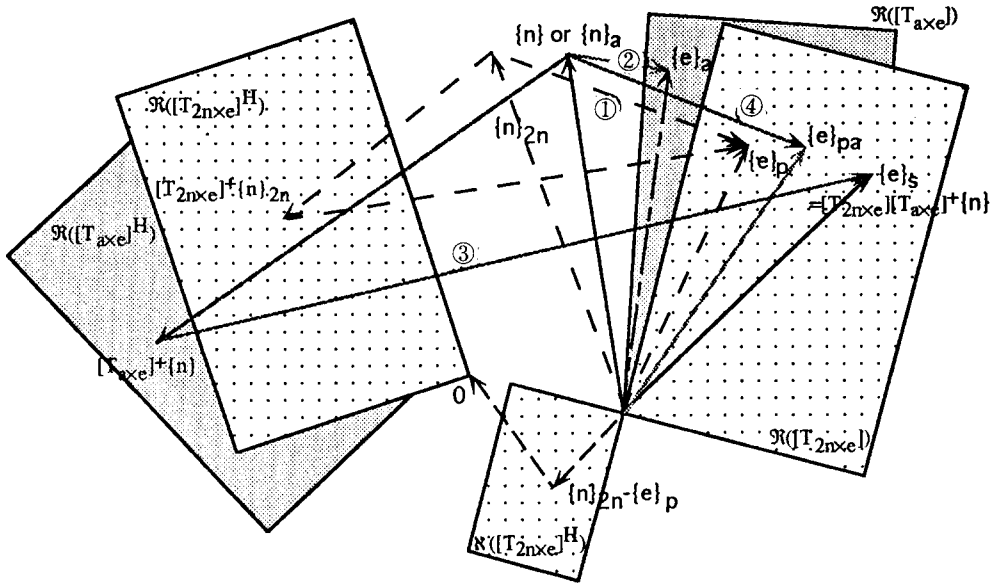


Fig. 1 Projection of the stochastic error in order reduction process

한편,  $\{n(t)\}$ 은 전상태공간에서  $\{n(t)\}_a$ 으로 표현되므로  $\{n(t)\}_a$ 는  $\mathcal{R}([T_{2n \times e}])$ 상에 직접 투영<sup>④</sup>할 수 있고, 이는 주상태에 있는 잡음을  $\mathcal{R}([T_{2n \times e}])$ 상에 오차거리가 가장 적은 벡터  $\{e_{pa}\}$ 로 표현한 것이나,  $\{e_s\}$ 와는 같지 않다. 그러므로, ASF는 주상태에 있는 잡음을 직접 투영한 과정에 대한 노음을 추약공간투영 과정에 대한 노음의 비(ratio)로 나타낸 지수라고도 할 수 있다.

ASF가 '1'일때를 가정해 보면, 식 (26b)에서  $([U_{a1}]^H [U_{a1}]^{-1} = [I_e])$ 가 되어야 하므로  $[U_{a1}]$ 은 직교성을 가진  $\mathcal{R}([T_{axel}])$ 의 좌측특이벡터행렬이 되고, 행공간  $\mathcal{R}([T_{2n \times e}]^H)$ 와  $\mathcal{R}([T_{axel}]^H)$ 는 같다. 이로부터, ASF가 '1'일때는  $\{e_{pa}\}$ 와  $\{e_s\}$ 가 같음도 확인할 수 있다.

선형비감쇠계에서는 변위만의 측정으로 동적거동을 완전히 파악할 수 있으므로 주상태 선택을 변위 상태만으로 할 수 있다. 그러므로, 우측고유벡터행렬중 전방향 변위상태만 고려해도 되어 계산이 간략해진다.

이밖의 경우로, 점성감쇠만 있는 계에 대해 적용하였을 때는 우측고유벡터행렬의 전방향만 고려하여, 구조감쇠만 있는 계에서는 전방향 상태중 변위 상태만 고려하여 ASF를 구할 수 있다. 하지만, 회전체에 대한 적용에서 회전체 단면을 복소평면화 한다면 전방향뿐만 아니라 후방향까지 고려하여 ASF를 구해야 한다.

### 3. 가관측성 개념에서의 주상태 선택

#### 3.1 가관측도(Degree of Observability)

가관측성(observability)은 다변수 제어시스템 설계시 사용되는 중요한 개념이다. 이런 가관측성을 이용한 주상태 선택방법으로는 가관측도가 대표적이라 할 수 있다.

가관측도의 정의에 앞서, 식 (7)을 상호직교성 조건에 의해 변환하고 제어시스템의 출력을 주상태 벡터로 한 다음, 실공간에 영향이 있는 고유공간 상태 벡터  $\{P_e\}$ 만을 고려하면 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\{P_e(t)\}} &= [\Lambda_e] \{P_e(t)\} + [T_{2n \times e}]_i \{g_c(t)\} \\ \{w_a(t)\} &= [T_{axel}] \{P_e(t)\} \end{aligned} \quad (32)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [\Lambda_e] &= \text{diag}[\lambda_{e/2}^B, \dots, \lambda_2^B, \lambda_1^B, \lambda_1^F, \lambda_2^F, \dots, \lambda_{e/2}^F] \\ [T_{2n \times e}]_i &= [\{1c\}_{e/2}^B, \dots, \{1c\}_2^B, \{1c\}_1^B, \{1c\}_1^F, \{1c\}_2^F, \dots, \{1c\}_{e/2}^F] \end{aligned}$$

이로부터, 주상태 신호를 출력으로  $\{P_e\}$ 를 상태변수로 가정하면 가관측성 행렬 $\{\Theta\}$ 은

$$\{\Theta\} = \begin{bmatrix} [T_{axel}] \\ [T_{axel}][\Lambda] \\ [T_{axel}][\Lambda]^2 \\ \vdots \\ [T_{axel}][\Lambda]^{e-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [T_{axe}] & & & & \\ & [T_{axe}] & & & \\ & & [T_{axe}] & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & [T_{axe}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] \\ [A] \\ [A]^2 \\ \vdots \\ [A]^{e-1} \end{bmatrix} \quad (33)$$

이고, 가관측도를 아래와 같이  $\mu_1, \mu_2$  2가지로 정의<sup>(23)</sup> 할때 가관측도는 결국  $[\Theta]^+$ 의 Frobenius노름 또는  $l$ -노름( $l=1, 2, \infty$ ) 형태임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu_1([\Theta]^H[\Theta]) &= \lambda_{\min}([\Theta]^H[\Theta]) \\ \rightarrow \mu_1 &= \|[\Theta]^+\|_2 \end{aligned} \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} \mu_2([\Theta]^H[\Theta]) &= e / \text{Tr}([\Theta]^H[\Theta])^{-1} \\ \rightarrow \mu_2 &= e / \|[\Theta]^+\|_{F^2} \end{aligned} \quad (34b)$$

### 3.2 ASF와 가관측도

ASF(SF)와 가관측도간의 관계를 알아 보기위해 먼저 가관측성 행렬의 Moore-Penrose 일반역행렬  $[\Theta]^+$ 의 Frobenius노름을 구해볼 필요가 있다. 먼저,  $\|[\Theta]^+\|_F$ 이 다음과 같을때,

$$\|[\Theta]^+\|_F^2 = \text{Tr}([\Theta]^H[\Theta])^{-1} \quad (35)$$

$[\Theta]^H[\Theta]$ 와  $[T_{axe}]^H[T_{axe}]$ 를 각각  $[\Theta]^H[\Theta] \equiv [W_o]$ ,  $[T_{axe}]^H[T_{axe}] \equiv [T_s]$ 라 한다면,  $[W_o]$ 와  $[T_s]$ 는 다음의 관계를 가진다.

$$\begin{aligned} [W_o] &= [T_s] + [A][T_s][A] + [A]^2[T_s][A] \\ &\quad + \dots + [A]^{e-1}[T_s][A]^{e-1} \\ &= [T_s] + [\Theta]_2^H[\Theta]_2 \end{aligned} \quad (36)$$

여기서,  $[\Theta]_2^H[\Theta]_2 = [A][T_s][A] + [A]^2[T_s][A]^2 + \dots + [A]^{e-1}[T_s][A]^{e-1}$  이고,  $[W_o]^{-1}$ 은 Sherman-Morrison-Woodbury<sup>(29)</sup>공식에 의해

$$\begin{aligned} [W_o]^{-1} &= [T_s]^{-1} + [T_s]^{-1}[\Theta]_2^H([I] \\ &\quad + [\Theta]_2[T_s]^{-1}[\Theta]_2^H)^{-1}[\Theta]_2[T_s]^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

일때,

$$\begin{aligned} \|[\Theta]^+\|_F^2 &= \text{Tr}([W_o]^{-1}) \\ &= \text{Tr}([T_s]^{-1}) + \text{Tr}([T_s]^{-1}[\Theta]_2^H([I] \\ &\quad + [\Theta]_2[T_s]^{-1}[\Theta]_2^H)^{-1}[\Theta]_2[T_s]^{-1}) \\ &= \| [T_{axe}]^+ \|_F^2 + \text{Tr}([T_s]^{-1}[\Theta]_2^H([I] \\ &\quad + [\Theta]_2[T_s]^{-1}[\Theta]_2^H)^{-1}[\Theta]_2[T_s]^{-1}) \end{aligned} \quad (38)$$

위의 결과로부터  $\|[\Theta]^+\|_F$ 은  $\| [T_{axe}]^+ \|_F$ 에 고유값의 영향이 더해진 관계를 가지고 있음을 알 수 있다. 참고적으로, 대칭계에서  $\|[\Theta]^+\|_F$ 와  $\| [T_{axe}]^+ \|_F$ 는

각각 가관측도와 SF를 나타내며 단조(monotone)적인 경향을 보인다.<sup>(22)</sup>

식 (34)의 가관측성 행렬을 아래와 같이 표현할 때,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \{w_a(t)\} \\ \{w_a(t)\}' \\ \vdots \\ \{w_a(t)\}^{(e-1)} \end{Bmatrix} &= [\Theta] e^{[A_e](t-t_0)} \{p_e(t_0)\} \\ &= [\Theta] \{p_e(t)\} \end{aligned} \quad (39)$$

가관측도의 실제 적용을 살펴보기 위해 선택된 주상태 후보신호에 잡음의 효과를 고려하는 경우,  $\{\tilde{w}(t)\} = \{w_a(t) + \{n(t)\}\}$ 만을 알 수 있기 때문에 그 이상의 미분값들은 아래식과 같이 계산하여 전상태 벡터  $\{\tilde{w}(t)\}_{obs}$ 를 예측할 수밖에 없다.

$$\{\tilde{p}_e(t)\}_{obs} = [\Theta]^+ \begin{Bmatrix} \{w_a(t) + \{n(t)\}\} \\ \{w_a(t) + \{n(t)\}'\} \\ \vdots \\ \{w_a(t) + \{n(t)\}^{(e-1)}\} \end{Bmatrix} \quad (40a)$$

이로부터

$$\{\tilde{w}(t)\}_{obs} = [T_{2n \times e}][\Theta]^+ \begin{Bmatrix} \{w_a(t) + \{n(t)\}\} \\ \{w_a(t) + \{n(t)\}'\} \\ \vdots \\ \{w_a(t) + \{n(t)\}^{(e-1)}\} \end{Bmatrix} \quad (40b)$$

위식과 같은 과정은 결과적으로 주상태 후보신호의 미분으로 인한 새로운 상태변수의 출현과 잡음의 미분문제로 인해 정확한 예측을 기대할 수 없을 뿐더러 필요하지도 않다. 반면에, 주상태 후보신호  $\{\tilde{w}_a(t)\}$ 만의 축약공간투영에 의한 전상태신호 예측은 앞에서와 같은 문제점 없이 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\tilde{P}_e(t)\} = [T_{axe}]^+ (\{w_a(t)\} + \{n(t)\}) \quad (41a)$$

이로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\{\tilde{w}(t)\} = [T_{2n \times e}][T_{axe}]^+ (\{w_a(t)\} + \{n(t)\}) \quad (41b)$$

그러므로 가관측도  $\|[\Theta]^+\|_F$ 는 주상태 후보신호뿐만 아니라 이들의 'e-1'차 미분신호까지 측정가능하다고 가정하여 이때의 잡음신호들이 전상태신호 예측에 미치는 영향을 고려한 지수라 할 수 있으며(비대칭인 경우는  $\| [T_{2n \times e}][\Theta]^+ \|_F$ ), SF(ASF)는 주상태 후보신호만의 잡음신호  $\{n(t)\}$ 가 전상태신호에 미치는 영향을 축약공간투영 관점에서 나타낸 것이다. 실제

구현시는 주상태 후보신호만 측정하고 이들의 미분 신호는 대부분 직접 측정하지 않으므로 가관측도보다는 ASF가 측정잡음의 효과를 고려한 주상태 선택에 알맞는 지수이다.

만약 식 (21)에서 오차의 정의를 전상태신호( $w(t)$ )와 추정 전상태신호( $\hat{w}(t)$ )의 차이로 하지 않고 전상태신호와 'e-1'번 까지의 미분값들과 추정 전상태신호와 'e-1'번 까지의 미분값들의 차이로 한다면, 투영관점에서의 SF와 가관측성 관점에서의 가관측도는 같은 성질의 것이 된다.

#### 4. 주상태의 선택

최적의 'a'개 주상태를 선택하려면 ' ${}_n C_a$ '개 만큼의 ASF를 계산해야 하고, 이중에 최소의 ASF값을 갖는 것으로 선정해야 한다. 그러나 이방법은 실제로 계산량이 방대하여 수행하는데 많은 노력을 필요로 한다. 그래서 다음과 같은 준최적(suboptimal) 주상태 선택방법을 제시하고자 한다.

식 (14b)에서 'e'개 고유벡터를 고려한 우측고유벡터행렬  $[T_{2n \times e}]$ 의 'i'번째 행은 'i'번째 상태를 의미한다. 이로부터 'i'번째 상태의 중요성을 알기 위해  $[T_{2n \times e}]$ 의 'i'번째 행을 제거한 다음 나머지 행들로 이루어진 행렬  ${}_i [T_{2n \times e}] \in C^{(2n-1) \times e}$ 로 ASF를 계산하여  ${}_i ASF$ 라 하면,

$${}_i ASF \equiv \|[T_{2n \times e}]_i [T_{2n \times e}]^+ \|_F / \sqrt{e} = \|{}_i [U_1]^+ \|_F / \sqrt{e} \quad (42)$$

이고, 여기서  ${}_i [U_1] \in C^{(2n-1) \times e}$ 은  $[U_1]$ 의 'i'번째 행을 제거한 것으로,  ${}_i ASF$ 가 클수록 'i'번째 상태가 더 중요한 위치에 있음을 뜻한다. 그러나  ${}_i ASF$ 가 비슷한 서로 다른 상태끼리는 종속관계에 있을 수 있다.

이때에는 다음과 같은 순서로 종속관계를 확인한다.

(1)  ${}_i ASF$ 가 큰 행벡터  $\{t_{2n \times e}\}_i \in C^{1 \times e}$ 부터 순서대로 행렬  $[T_{2n \times e}]$ 를 재배열 하고,  $[T_{2n \times e}]_{sorted}$ 라 하자.

$$[T_{2n \times e}]_{sorted} \equiv \begin{bmatrix} \{t_{2n \times e}\}_1 \\ \{t_{2n \times e}\}_2 \\ \vdots \\ \{t_{2n \times e}\}_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [PCD]_1 \\ \vdots \\ [PCD]_k \end{bmatrix} \quad (43)$$

(2) 윗식에서  $[PCD]$ 는 비슷한  ${}_i ASF$ 를 가지는 상태 행벡터들로 이루어진 조합행렬로 다음과 같이 구성한다.

$$[PCD]_k \equiv \begin{bmatrix} \{t_{2n \times e}\}_k \\ \{t_{2n \times e}\}_{k+1} \\ \vdots \\ \{t_{2n \times e}\}_{k+h_j} \end{bmatrix} \in C^{h_j \times e} \quad (44)$$

여기서,  $h_j$ 의  $j=1, 2, \dots, g$ 이고  $g$ 는 전체 조합행렬의 수이다.

윗식의  $[PCD]_k$ 에서  $k$ 는 'k'번째 상태를 의미하고,  $h_j$ 는 'k'번째 상태로부터  ${}_i ASF$ 가 비슷한 상태 행벡터까지의 수이다.

(3)  $[PCD]_k$ 의 ' $h_j$ '개 행벡터중 2개씩을 ' ${}_i C_2$ '개 만큼 뽑아  $[CD]_{k+p, k+q}$ 를 구성한다. (단,  $0 \leq p \leq (h_j - 1), 1 \leq q \leq h_j, p < q$ )

$$[CD]_{k+p, k+q} \equiv \begin{bmatrix} \{t_{2n \times e}\}_{k+p} \\ \{t_{2n \times e}\}_{k+q} \end{bmatrix} \quad (45)$$

(4)  $[CD]_{k+p, k+q}$ 의 2개 특이값  $s_1, s_2 (s_1 \geq s_2)$ 를 구한 다음, 조건수(condition number,  $s_1/s_2$ )를 Frobenius노름으로 나눈 정규조건수  $\kappa_n$ 을 다음과 같

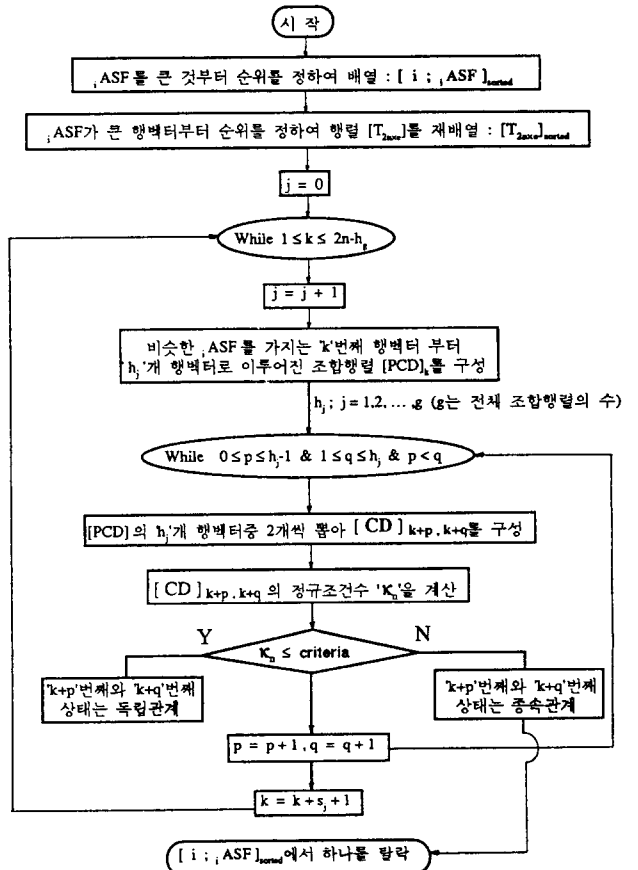


Fig. 2 Flow chat of suboptimal selection of master states



이 정하고 계산한다.

$$\kappa_n([CD]_{k+p,k+q}) = (s_1/s_2) / (s_1^2 + s_2^2)^{0.5} \quad (46)$$

(5) 과정 (4)에서 계산된 정규조건수가 다른 것들보다 차수가 크면 'k+p'번째 상태변수와 'k+q'번째 상태변수는 종속관계이고, 그렇지 않으면 독립관계이다.

(6) 과정 (2)에서 [PCD]<sub>k</sub>의 k가 '2n-h<sub>g</sub>'개 될때까지 과정 (2)에서 과정 (5)까지를 반복한다.

(7) 종속관계로 확인된 상태변수들은 이중 하나만을 선택하도록 하여 *i*ASF가 큰 순서로 상태변수를 선택하도록 한다.

이와 같은 과정을 순서도로 표현하면 Fig. 2와 같고, 정리해 보면 'e'개의 고유벡터를 고려할때 주상태들의 선택은 각 상태의 기여도 순서지표인 *i*ASF를 크기 순으로 나열함으로써 알 수 있으나 주의할 점은 종속관계에 있는 상태들이 존재한다면 그 중 하나만을 선택해야 한다는 것이다. 물론 주상태의 수 'a'는 관심 고유벡터의 수 'e'보다 크거나 같아야 한다. 이와 같은 방법은 모든 경우를 전부 계산한 2nC<sub>a</sub>개의 계산량을 '2n + ∑<sub>i=1</sub><sup>g</sup> h<sub>i</sub>C<sub>2</sub>'개로 줄일 수 있다.

### 5. 예 제

다음은 주상태 선택에 대한 간단한 예제이다.

[예제 1]

Fig. 3과 같이 상태(보존계인 경우는 자유도와 동일)가 10개인 외팔보에서, 5개 고유벡터(이 경우 모우드와 동일)가 고려 되었을때 *i*ASF를 큰 것 부터 나열하면 Table 1과 같다.

Table 1에서 비슷한 *i*ASF를 가진 자유도끼리 [PCD]<sub>k</sub>를 만든다. 이 경우 {t<sub>2n×e</sub>}<sub>k</sub>와 {t<sub>2n×e</sub>}<sub>k+h<sub>j</sub></sub>의 *i*ASF가 비슷한 정도 차이를 0.002로 하면, [PCD]<sub>k</sub>는 [CD]<sub>k,k+1</sub>가 되고, 검사 대상인 [CD]<sub>k,k+1</sub>은 [CD]<sub>3rd,4th</sub>, [CD]<sub>5th,6th</sub>, [CD]<sub>7th,8th</sub> (각각 [CD]<sub>8,9</sub>, [CD]<sub>4,6</sub>, [CD]<sub>7,5</sub>)이다. 이 경우에 대한 특이값과 정규조건수, 그리고 정규조건수로 판단한 종속관계 여부는 Table. 2와 같다.

그러므로 5개 고유벡터가 고려되었을때 주자유도의 선택은 Table. 1의 순서로 5개 혹은 보다 많이 선택할 수 있는데, 자유도 '8' '9'는 종속관계이므로 그중 *i*ASF가 큰 값인 자유도 '8'만을 선택하도록 한다.

만약 5번째 모우드까지 고려하였을때 5개의 센서로 잡음의 영향이 가장 적은 위치들을 찾고자 하는

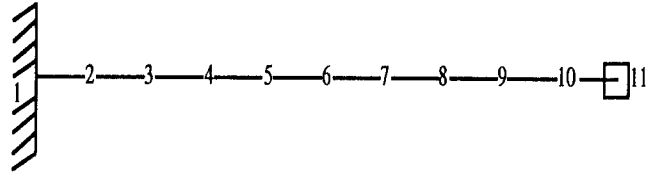


Fig. 3 Finite element model of undamped cantilever beam with additional mass at the tip

Table 1 Ranking of DOFs according to *i*ASF

Ranking	DOF	<i>i</i> ASF
1st	10	2.54881
2nd	2	1.08048
3rd	8	1.07449
4th	9	1.07385
5th	4	1.07091
6th	6	1.06956
7th	7	1.05266
8th	5	1.05106
9th	3	1.04788
10th	1	1.01418

Table 2 Dependency check between DOFs

	Singular values	$\kappa_n$	Relation
[CD] <sub>8,9</sub>	34.9608, 9.1105	0.1062(>0.1)	dependent
[CD] <sub>4,6</sub>	27.0315, 26.1424	0.0275(<0.1)	independent
[CD] <sub>7,5</sub>	26.0897, 22.8326	0.0330(<0.1)	independent

경우를 예로 보자. 제시된 준최적 방법은 최적의 상태들(자유도 10, 2, 8, 4, 6)을 선택할 수 있고, 모든 경우에 대한 252(=10C<sub>5</sub>)번 *ASF*를 계산하는 주자유도 선택문제에서 13(=10+3(2C<sub>2</sub>))번 *i*ASF를 계산하는 문제로 계산량을 대폭 줄일 수 있다.

[예제 2]

정성감쇠가 있는 지지기반과 히스테리시스 강성을 가지는 기둥을 Fig. 4와 같이 7자유도 14개 상태로 모델링하여, 전방향과 후방향 각각 2개까지 모두 4개 고유벡터를 고려하였을때의 *i*ASF는 Table 3과 같다.

이 경우도 Table 3에서 {t<sub>2n×e</sub>}<sub>k</sub>와 {t<sub>2n×e</sub>}<sub>k+h<sub>j</sub></sub>의 *i*ASF가 비슷한 정도 차이를 0.002로 하면, 검사대상인 [CD]<sub>k,k+1</sub>은 [CD]<sub>7d,2v</sub>, [CD]<sub>2v,3v</sub>, [CD]<sub>7d,3v</sub>와 [CD]<sub>5v,6d</sub> 그리고 [CD]<sub>2d,1d</sub>이다. 종속관계 여부는 Table 4에서와 같이 (2d, 1d)만 종속관계이다. 그러므로 4개 고유벡터가 고려되었을 때 주상태(또는 센

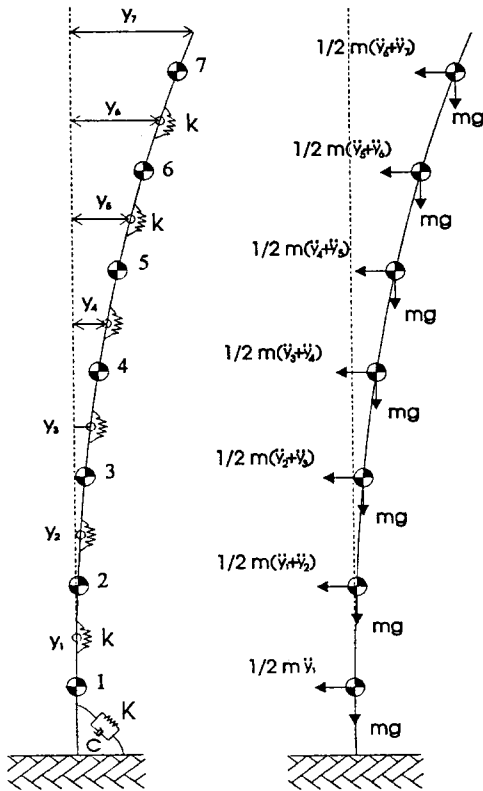


Fig. 4 Model of a hysteretically flexible chimney on a resilient foundation with damping

Table 3 Raking of states according to  $i$ ASF (d : displacement, v : velocity)

ranking	state	$i$ ASF	difference
1st	7v	1.2061	
2nd	6v	1.1171	8.8979e-2
3rd	7d	1.0932	2.3985e-2
4th	2v	1.0917	1.5137e-3
5th	3v	1.0908	8.5728e-4
6th	4v	1.0714	1.9369e-2
7th	1v	1.0559	1.5482e-2
8th	5v	1.0500	5.9795e-3
9th	6d	1.0481	1.8407e-3
10th	5d	1.0242	2.3953e-2
11th	4d	1.0111	1.3107e-2
12th	3d	1.0043	6.7197e-3
13th	2d	1.0014	2.9478e-3
14th	1d	1.0003	1.0673e-3

서위치)선택은 Table 3순서로 4개와 같거나 많이 선택할 수 있다. 한 예로 5개 주상태를 선택하는 문제에서 모든 경우에 대한 계산결과를 Table 5에 최적

Table 4 Dependency check between states

	Singular values	$\kappa_n$	Relation
[CD] <sub>7d,2v</sub>	3.1591, 5.9011e-4	1694.6(< 2500)	independent
[CD] <sub>2v,3v</sub>	4.4340, 1.5526e-3	644.07(< 2500)	independent
[CD] <sub>7d,3v</sub>	3.1112, 5.9008e-4	1694.7(< 2500)	independent
[CD] <sub>5v,6d</sub>	3.0517, 4.7935e-4	2086.2(< 2500)	independent
[CD] <sub>2d,1d</sub>	3.572e-4, 1.201e-4	7894.7(> 2500)	dependent

Table 5 High ranking master state sets

Master state sets	ASF
2v, 3v, 6v, 7v, 7d	1.32821
3v, 4v, 6v, 7v, 7d	1.34760
1v, 3v, 4v, 7v, 7d	1.40434
1v, 2v, 6v, 7v, 7d	1.41028
2v, 3v, 4v, 7v, 7d	1.41315
3v, 4v, 7v, 6d, 7d	1.43550
2v, 3v, 5v, 6v, 7d	1.43933

Best  
↓  
Worse

위치로 부터 순서대로 몇개 나열하였다. 예상대로 종속관계를 고려한 Table 3의 순서적 선택이 Table 5의 최적위치와 일치하였다.

제시된 준최적 방법을 계산량면에서 본다면, 모든 경우에 대한 2002(= $_{14}C_5$ )번 ASF를 계산하는 주상태 선택문제에서 제시된 준최적 방법으로 15(= $_{14+2}C_2$ )번  $i$ ASF를 계산하는 문제로 계산량을 대폭 줄일 수 있다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 감쇠계를 포함한 일반 선형계의 주상태를 어떻게 관심주파수 영역에서 오차가 가장 적도록 선정하는가에 대한 문제를 논하였다. 이로부터 유추된 결론은 다음과 같다.

(1) 일반 감쇠계에서 주상태의 선택 판단기준인 ASF는, 주상태 신호의 백색잡음으로 인해 실제 전 상태 신호를 예측할 때 나타나는 오차를 정량적으로 나타낸 수치이다. 이는 관심 주파수영역내 (우측)고 유벡터의 열공간인 좌측특이벡터행렬에서 주상태만 선택한 부벡터 열들간의 직교성 정도를 정량화 한 것이다.

(2) 일반적으로 주상태를 선택하려면 많은 계산량이 필요한데, 이에 준최적(suboptimal) 선택방법을 제시하고 이방법의 효율성을 예제로 확인하였다.

(3) ASF는 다음과 같은 경우에 유용하게 사용할

수 있다.

- (a) 모우드 제어를 위한 계의 모델 차수줄임 과정
- (b) 유한요소법에서 주상태(주자유도) 결정
- (c) 모우드 해석 또는 모우드 매개변수 규명시의 최적 센서갯수와 위치 결정
- (d) 각 센서의 기여도와 갯수 증가에 따른 영향의 정량화

### 참고문헌

- (1) Friendland, B. 1975 "Controllability Index Based on Conditioning Number," ASME J. of D.S.M.C., Vol. 97, No. 44, pp. 444~445.
- (2) Moore, B.C. Feb. 1981 "Principal Component Analysis in Linear System : Controllability & Observability of General Lineat Lumped-Parameter Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-26, NO.1, pp. 17~32.
- (3) Qi, Y. 1990 "Selection of Master Degree of Freedom in Model Reduction techniques," Master Thesis, Department of Mechanical Engineering, New Jersey Institute of Technology, Newark, New Jersey.
- (4) Qi, Y., Oh, Dongho, and Park, Youngjin 1991 "Order Reduction in Modal Space Based on Singular Values," Asia-Pacific Vibration & Control Conference. Melbourne, Australia, pp. 2.22~2.28.
- (5) Kammer, D.C. 1991 "Sensor Placement for On-Orbit Modal Identification and Correlation of Large Space Structures," AIAA J. of Guidance, Vol. 14, No. 2, pp. 251~259.
- (6) Guyan, R.J. 1965 "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," AIAA Journal, Vol. 3, No. 2, pp. 380.
- (7) Gordis, J.H. 1992 "An Analysis of the Improved Reduced System (IRS) Model Reduction Procedure," Proceedings of the 10th International Modal Analysis conference. San Diego, California, pp. 471-479.
- (8) Penny, J.E.T., Frisweel, M.I., Garbey, S.D. 1992 "The Automated Choice of Measurement Locations for Dynamic Testing," Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference. San Diego, California, pp. 30~36.
- (9) Bouhaddi, N., Cogan, S., and Fillod, R. 1992 "Dynamic Substructuring by Guyan Condensation Selection of the Master DOF," Proceedings of the 10th international Modal Analysis Conference. San Diego, California, pp. 328~333.
- (10) Avitabile, P., Pechinsky, F., and O'Callahan, J. C. 1992 "Study of Modal Vector Correlation Using Various Techiques for Model Reduction," Proceedings of the 10th international Modal Analysis Conference. San Diego, California, pp. 572~583.
- (11) Kammer, D.C. 1992 "Effect of Error on Sensor Placement for On-Orbit Modal Identification of Large Space Structures," AIAA J.of Guidance, Vol. 15, No. 2, pp. 334~341.
- (12) Kammer, D.C 1992 "Effect of Noise on Sensor Placement for On-Orbit Modal Identification of Large Space Structures," ASME J.of D.S.M.C., Vol. 114, pp. 436~443.
- (13) Ahmadian, M. 1985 "Controllability & Observability of General Linear Lumped-Parameter Systems," AIAA J. of Guidance, Vol. 8, No. 5, pp. 669~672.
- (14) Avitabile, P., O'Callahan, J.C., and Milani, J. 1989 "Comparson of System Characteristics Using Various Model Reduction Techniques," Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference. Las Vegas, Nevada, pp. 1109~1115.
- (15) Flanigan, C. 1992 "Automated Selection of Accelermeter Locaions for Modal Survey Test," Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference. San Diego, California, pp. 1205~1208.
- (16) Kuentzy, D. Richatdson, M., and Blakery, K. 1989 "Using Finite Element Data to Set Up Modal Tests," Sound and Vibration, July, pp. 16~23.
- (17) O'Callahan, J.C. 1989 "A Procedure for An Improve Reduced System (IRS) Model," Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference. Las Vegas, Nevada, pp. 17~21.
- (18) O'Callahan, J.C., Avitabile, P., and Riemer, R. 1989 "Sytem Equivalent Reduction Expansion Porcess (SEREP)," Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference. Las Vegas, Nevada, pp. 29~37.
- (19) Paz, M. 1984 "Dynamic Condensation," AIAA Journal, Vol. 22, No. 5, pp. 724~727.

- (20) Strange, G. 1988 "Linear Algebra & its Applications," HBI College Publishers.
- (21) Meirovitch, L. 1990 "Dynamics and Control of Structures," John Wiley & Sons, New York.
- (22) Oh, Dongho and Park, Youngjin 1994 "Order Reduction Based on Singular Values of Modal Matrix.," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 8, No. 1.
- (23) Xing, G. and Bainum, P.M. 1992 "Actuator Placement Using Degree of Controllability For Discrete-Time Systems," ASME J. of D.S.M.C., Vol. 114, pp. 508~516
- (24) Gevarter, W.B. 1970 "Basic Relations for Control of Flexible Vehicles," AIAA Journal, Vol. 8, No. 4, pp. 666~672.
- (25) Arbel, A. 1981 "Controllability Measures and Actuator Placement in Oscillatory Systems," International Journal of Control, Vol. 33, No. 3, pp. 565~574.
- (26) 박종필, 김광준, 박영진 1992 "효율적 모우드 시험을 위한 가진점과 응답측정점의 결정", 대한기계학회 제16권, 제9호, pp. 1643~1653.
- (27) Lancaster, P. 1966 "Lambda-Matrices and Vibrating System," Pergamon press.
- (28) Lee, C.W. 1993 "Vibration Analysis of Rotors," Kluwer Academic Publishers.
- (29) Golub, G.H., Van Loan, C.F. 1983 "Matrix Computations," Baltimore, MD ; Johns Hopkins University Press.
- (30) 오동호, 박영진 1993 "고유공간에서의 동력학계 차수 줄임", 대한기계학회 '93 춘계학술대회 논문집(I), pp. 547~552.