한국소음진동공학회지 제 4 권 제 2 호, pp. 137~146, 1994.

〈論 文〉

Fourier 급수전개를 이용한 유체로 가득 채워진 원통형 셸의 고유진동 해석

Fourier Series Expansion Method for Free Vibration Analysis of a Fully Liquid-Filled Circular Cylindrical Shell

정 경 훈* · 이 성 철**

Jeong, Kyeong-Hoon and Lee, Seong-Cheol

〈1993년 12월 7일 접수 ; 1994년 5월 14일 심사완료〉

Key Words : Free Vibration(고유진동), Fully Liquid-Filled(유체로 가득 채워진), Natural Frequency(고유진동수), Circular Cylindrical Shell(원통형 셸), Fluid-Structure Interaction(유체와 구조물간의 상호작용), Stokes' Transformation(Stokes 변환), Fourier Series Expansion(Fourier 급수전개), Velocity Potential(속도 포텐셜).

ABSTRACT

An analytical method for linear free vibration of fully liquid-filled circular cylindrical shell with various bondary conditions is developed by the Fourier series expansion based on the Stokes' transformation. A set of modal displacement functions and their derivatives of a circular cylindrical shell is substituted into the Sanders' shell equations in order to explicitily represent the Fourier coefficients as functions of the end point displacemetns, forces, and moments. For the vibration relevant to the liquid motion, the velocity potential of liquid is assumed as a sum of linear combination of suitable harmonic functions in the axial directions. The unknown parameter of the velocity potential is selected to satisfy the boundary condition along the wetted shell surface. An explicit expression of the natural frequency equation can be obtained for any kind of classical boundary conditions. The natural frequencies of the liquid-filled cylindrical shells with the clamped-free, the clamped-clamped, and the simply supported-simply supported boundary conditions examined in the previous works, are obtained by the analytical method. The results are compared with the previous works, and excellent agreement is found for the natural frequencies of the shells.

기 호 설 명

A_{on}, A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} : 셸의 모우드와 관련된 Fourier 계수

a_1, a_2, ⋯ , a_{61} : 부록 Ⅱ에서 정의됨.

a_α, a_β, ⋯ , c_γ : 부록 Ⅱ에서 정의됨.

D_{mn} : 유체의 운동과 관련된 Fourier 계수

D : $E\,h/(1-\mu^2)$

E : 셸의 탄성계수

e_{11}, e_{12}, ⋯ , e_{88} : 부록 Ⅲ에서 정의됨

H, h : 셸의 높이, 두께

k : $h^2/12R^2$

K : $E\,h^3/12(1-\mu^2)$

m : 축방향의 Fourier 급수전개항

m' : 축방향의 모우드 수

*한국원자력연구소

**전북대학교 공과대학 기계공학과

M_z : 단위 길이당 굽힘 모멘트
$N_{z\theta}$: 단위 길이당 유효 막전단력
N_z : 단위길이당 막인장력
n : 원주방향의 모우드 수
Q_z : 단위 길이당 전단력
R : 셸의 반경
p : 셸에 작용하는 유체의 압력
$q_1, q_2, \cdots, q_{23}$: 부록 Ⅱ에서 정의됨.
t : 시간
u, v, w : 셸의 동적 변위 (축방향, 접선방향, 반경방향)
z, θ, r : 좌표계 (축방향, 접선방향, 반경방향)
γ^2 : $\rho R^2(1-\mu^2)/E$
ζ : 셸의 반경방향 변위에 해당하는 축방향 모우드 함수
η : 셸의 접선방향 변위에 해당하는 축방향 모우드 함수
ξ : 셸의 축방향 변위에 해당하는 축방향 모우드 함수
ρ, μ : 셸의 밀도, Poisson 비
ρ_o : 유체의 밀도
ϕ : 유체의 속도포텐셜
ω : 셸의 고유진동수
Ω : $(\omega/\omega_o)^2$
ω_o^2 : $E/\rho R^2(1-\mu^2)$
첨자 O는 $z=O$에서의 값
첨자 H는 $z=H$에서의 값

1. 서 론

공학적인 구조물에는 원통형 셸의 형상이 널리 이용되고 있다. 이 셸 구조물 안으로 유체가 흐르거나 또는 셸 구조물 안에 유체를 저장하는 경우가 많다. 예를 들면 원자력발전소에서 원자로내부구조물 중에는 핵연료를 지지하고 있는 노심지지배럴(core support barrel)과 제어봉을 보호하는 상부안내구조물 지지배럴(upper guide structure support barrel)은 얇은 셸 구조물로 되어 있고 그 주위로 냉각수가 흐르고 있다. 화학공장에서는 원통형 셸 안에 액상의 각종 화학물질이나 원유 등을 저장하고 있는 경우가 많다. 이러한 구조물들의 내진해석이나 동적 응력해석을 할 때 유체가 담긴 셸에 대한 고유진동 해석이 필요하게 된다. 이 분야에 대한 연구는 절실한 공학적 필요성 때문에 오래 전부터 연구가 진행되어 왔다. 유체가 담긴 셸의 고유진동수를 얻는 근사해법으로는 Galerkin방법[7], Rayleigh's quotient를 이용한 방법[3], 유한요소법[4,8], collocation 방법[6], 경계요소법[9] 등이 제시되고 있다. 그러나 유한요소법[4,8]과 경계요소법[9]은 셸의 영역과 유체의 영역을 각각 수 많은 요소들로 나누어야 하기 때문에 많은 시간과 노력을 요구하고 있고, 축대칭 2차원 셸 요소만을 사용하기 때문에 원통형이 아닌 사각주형 셸과 같은 임의의 셸 형상에는 적용할 수가 없다. 유체로 채워진 셸이 고유진동을 할 때, 물리적으로 유체가 셸과 접하는 곳에서는 셸과 유체가 서로 불리되지 않기 때문에 셸의 축방향 진동 모우드와 유체의 축방향 운동 모우드는 일치하고 있다. 그러나 Galerkin방법[7]과 Rayleigh's quotient를 이용한 방법[3]에서는 수식을 전개할 때, 셸의 축방향 진동 모우드와 유체의 축방향 속도 포텐셜이 일치하지 못하므로 셸의 축방향 구간에 대한 적분을 수행하여 근사치를 구하고 있지만, 본 논문에서는 실제 진동현상과 일치하도록 유체와 셸이 접하는 곳에서 셸의 축방향 진동 모우드와 유체의 축방향 운동 모우드가 동일하도록 수식을 전개하여 셸의 축방향 구간에 대한 적분을 수행하지 않고 미지의 Fourier 계수들을 선형 제차 방정식으로 나타내어 수식을 유도하였다. 또한 유한요소법[4,8]과 경계요소법[9]을 제외한 기존의 방법들[6,7,9]이 제한적인 경계조건에 대하여 수식을 전개한 반면, 본 논문에서는 임의의 고전적인 경계조건들을 갖는 원통형 셸에 대하여 Stokes변환[2]을 이용한 급수전개로 유체로 가득 채워진 셸의 고유진동을 해석하고, 상기 기존의 방법들에서 구한 수치해 및 실험결과와 비교하여, 본 논문에서 제시하고 있는 이론적 해석방법의 적용성을 고찰하였다.

2. 이론의 전개

2.1 원통형 셸에 대한 운동방정식과 경계조건

Fig. 1에서 보는 바와 같이 높이가 H, 반경이 R, 두께가 h인 얇은 원통형 셸안에 유체로 가득 차 있는 구조물을 생각해 본다. 여기서 셸의 양단은 임의의 경계조건을 갖고 있다. 이 원통형 셸의 축방향 z, 접선방향 θ, 반경방향 r의 동적 변위들에 대한 Sanders 방정식은 유체의 영향을 고려하면 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다[1,2,5].

$$R^2u_{,zz}+\frac{(1-\mu)}{2}\left(1+\frac{k}{4}\right)u_{,\theta\theta}+R\left\{\frac{(1+\mu)}{2}\right.$$

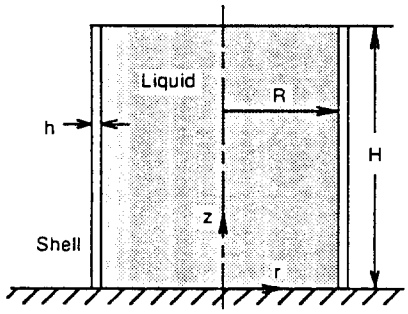

Fig. 1 Fully liquid-filled circular cylindrical shell with various boundary conditions

$$
\begin{aligned}
&-\frac{3(1-\mu)}{8}k\Big\}v_{,z\theta}+\mu R w_{,z}+\frac{(1-\mu)}{2}Rkw_{,z\theta\theta}\\
&=\gamma^2 u_{,tt},\\
&R\Big\{\frac{(1+\mu)}{2}-\frac{3(1-\mu)}{8}k\Big\}u_{,z\theta}+(1+k)\,v_{,\theta\theta}\\
&+\frac{(1-\mu)}{2}R^2\Big(1+\frac{9k}{4}\Big)v_{,zz}-\frac{(3-\mu)}{2}R^2 kw_{,zz\theta}\\
&+w_{,\theta}-kw_{,\theta\theta\theta}=\gamma^2 v_{,tt},\\
&\frac{(1-\mu)}{2}Rku_{,z\theta\theta}+\mu R u_{,z}-\frac{(3-\mu)}{2}R^2 kv_{,zz\theta}+v_{,\theta}\\
&+w+k(R^4 w_{,zzzz}+2R^2 w_{,zz\theta\theta}+w_{,\theta\theta\theta\theta}-v_{,\theta\theta\theta})\\
&=-\gamma^2 w_{,tt}+\frac{R^2 p}{D}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

수식의 기호에 대한 상세한 설명은 기호설명과 부록들에 서술되어 있다. 원통형 셸 양단에서의 일반적인 기하학적 경계조건들(geometric boundary conditions)과 하중에 대한 경계조건들(natural boundary conditions)은 식 (2)로 각각 나타난다. 즉

$$
\begin{aligned}
&z=0,\ \text{또는}\ H\text{에서},\\
&u=0,\ \ w_{,z}=0,\ \ v=0,\ \ w=0\\
&z=0,\ \text{또는}\ H\text{에서},\\
&N_{z\theta}=0,\ \ Q_z=0,\ \ N_z=0,\ \ M_z=0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

여기서,

$$
\begin{aligned}
N_z&=D\Big[u_{,z}+\frac{\mu}{R}v_{,\theta}+\frac{\mu}{R}w\Big],\\
N_{z\theta}&=\frac{D(1-\mu)}{2}\Big[\frac{1}{R}\Big(1-\frac{3}{4}k\Big)u_{,\theta}\\
&\quad+\Big(1+\frac{9}{4}k\Big)v_{,z}-3kw_{,z\theta}\Big],\\
Q_z&=K\Big[-\frac{1-\mu}{2R^3}u_{,\theta\theta}+\frac{(3-\mu)}{2R^2}v_{,z\theta}\\
&\quad-\frac{(2-\mu)}{R^2}w_{,z\theta\theta}-w_{,zzz}\Big],\\
M_z&=K\Big[\frac{\mu}{R^2}(v_{,\theta}-w_{,\theta\theta})-w_{,zz}\Big]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

2.2 셸의 모우드 함수

원통형 셸의 고유진동에 대한 동적 변위들은 축방향의 모우드 함수와 원주방향의 모우드 함수 및 시간에 대한 조화함수의 곱으로 임의의 원주방향 모우드 n에 대하여 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다[2].

$$
\begin{aligned}
u(z,\theta,t)&=\xi(z)\ \cos n\theta\ \exp(iwt),\\
v(z,\theta,t)&=\eta(z)\ \sin n\theta\ \exp(iwt),\\
w(z,\theta,t)&=\zeta(z)\ \cos n\theta\ \exp(iwt).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

여기서 $\xi(z)$, $\eta(z)$, $\zeta(z)$는 축방향, 접선방향, 반경방향의 변위에 해당하는 축방향 모우드 함수를 각각 나타내고 있으며 식 (5)와 같이 Fourier 급수전개로 나타낼 수 있다[2].

$$
\begin{aligned}
\xi(z)&=A_{on}+\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\cos\Big(\frac{m\pi z}{H}\Big)\\
\eta(z)&=\sum_{m=1}^{\infty}B_{mn}\sin\Big(\frac{m\pi z}{H}\Big)\\
\zeta(z)&=\sum_{m=1}^{\infty}C_{mn}\sin\Big(\frac{m\pi z}{H}\Big)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

동적 변위들과 그 미분들은 참고문헌(2)에서 제시하고 있는 Stokes 변환을 이용하여 구할 수 있으며, 셸 양단에서의 임의의 가능한 경계조건의 조합에 대하여 동적 변위들과 그 미분들로 나타낼 수 있다. 동적 변위들과 그 미분들은 부록 I에 나타나 있다.

2.3 유체에 대한 운동방정식

원통형 셸 안에 유체의 밀도가 ρ_o인 비압축성, 비점성, 비회전성 유체가 높이 H 만큼 채워있을 경우, 선형 포텐셜 유동 이론에 의하면 유체의 속도포텐셜(velocity potential) ϕ는 식 (6)의 Laplace 방정식을 만족한다.

$$
\phi_{,rr}+\frac{1}{r}\phi_{,r}+\frac{1}{r^2}\phi_{,\theta\theta}+\phi_{,zz}=0 \tag{6}
$$

유체의 셸 양단에서의 운동을 무시하면, 유체와 셸이 접촉하는 면에서의 경계조건은 식 (7)로 나타난다.

$$
\phi_{,r}|_{r=R}=-w(z,\theta,t),\quad 0<z<H \tag{7}
$$

식 (6)과 식 (7)의 경계조건을 만족하는 속도포텐셜을 식 (8)로 가정한다.

$$
\begin{aligned}
\phi(r,z,\theta,t)=\sum_{m=1}^{\infty}D_{mn}\,In\Big(\frac{m\pi r}{H}\Big)\sin\Big(\frac{m\pi r}{H}\Big)\\
\times\cos n\theta\ \exp(iwt)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

여기서 $In(m\pi r/H)$은 제 1종 변형 Bessel 함수이다. 또한 식 (5), 식 (7) 그리고 식 (8)로부터 미정

계수 D_{mn}을 C_{mn}으로 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$D_{mn}=\frac{H}{m\pi}\left[In'\left\{\frac{m\pi R}{H}\right\}\right]^{-1}C_{mn} \tag{9}$$

그런데 셸에 작용하는 유체의 동압 $p(z,\ \theta,\ t)$는 식 (10)과 같으므로 식 (8)과 식 (9)로부터 식 (1)에 나타난 $R^2p(z,\ \theta,\ t)/D$는 식 (11)로 표현된다[5].

$$p(z,\ \theta,\ t)=\rho_o\ w^2\phi(R,\ z,\ \theta)\exp(iwt) \tag{10}$$

$$\frac{R^2p(z,\ \theta,\ t)}{D}=\frac{R^2}{D}\rho_o\omega^2\sum_{m=1}^{\infty}C_{mn}\left(\frac{H}{m\pi}\right)\left[In\left(\frac{m\pi R}{H}\right)\right]\left[In'\left\{\frac{m\pi R}{H}\right\}\right]^{-1}\sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\cos n\theta\exp(i\omega t) \tag{11}$$

2.4 수식의 전개

부록 I에 나타난 동적 변위들 및 그 미분들과 유체력에 대한 식 (11)을 식 (1)에 대입하면 Fourier 미정계수 A_{on}, A_{mn}, B_{mn} 및 C_{mn}을 식 (12)와 식 (13)과 같이 셸의 양단 변위와 양단 하중으로 표현할 수 있다.

$$A_{on}=\frac{1}{2(a_{21}-\Omega)}\left[q_1(v_o+v_H)+q_4(w_o+w_H)-\frac{2R^2(1-\mu^2)}{EhH}\{N_z^o+N_z^H\}\right],\quad a_{21}\neq\Omega \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}A_{mn}\\B_{mn}\\C_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_\alpha & a_\beta & a_\gamma\\ a_\beta & b_\beta & b_\gamma\\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1[v_o+(-1)^mv_H]+q_4[w_o+(-1)^mw_H]-\frac{2R^2(1-\mu^2)}{EhH}[N_z^o+(-1)^mN_z^H]\\ q_2m[v_o+(-1)^mv_H]+q_5m[w_o+(-1)^mw_H]\\ q_3m[v_o+(-1)^mv_H]+q_6m[w_o+(-1)^mw_H]\\ -\frac{2R^2(1-\mu^2)}{EhH}m[M_z^o+(-1)^mM_z^H]\end{bmatrix} \tag{13}$$

여기서

$$v_o=-\frac{2}{\pi\sin n\theta}v(0,\ \theta),\ v_H=\frac{2}{\pi\sin n\theta}v(H,\ \theta),$$

$$w_o=-\frac{2}{\pi\sin n\theta}w(0,\theta),w_H=\frac{2}{\pi\sin n\theta}w(H,\theta),$$

$$N_z^o=\frac{N_z(0,\ \theta)}{\cos n\theta},\ N_z^H=-\frac{N_z(H,\ \theta)}{\cos n\theta},$$

$$M_z^o=-\frac{\pi\ M_z(0,\ \theta)}{H\cos n\theta},\ M_z^H=\frac{\pi\ M_z(H,\ \theta)}{H\cos n\theta}.$$

식 (2) 중에서 셸의 동적 변위 u 및 기울기 $w,_z$와 관련된 기하학적 경계조건을 만족하도록 식 (14)를 세우고, 힘에 대한 경계조건에서 $N_{z\theta}=0$과 $Q_z=0$이 만족되도록 식을 세우면 식 (15)가 된다.

$$\xi(0)=A_{on}+\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}=0,$$

$$\xi(H)=A_{on}+\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}(-1)^m=0,$$

$$\zeta,_z(0)=\frac{\pi}{H}\left[\frac{w_o+w_H}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(w_o+(-1)^mw_H+mC_{mn})\right]=0$$

$$\zeta,_z(H)=\frac{\pi}{H}\left[\frac{w_o+w_H}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(w_o+(-1)^mw_H+mC_{mn})(-1)^m\right]=0 \tag{14}$$

$$q_1A_{on}+q_2\left(\frac{v_o+v_H}{2}\right)+q_3\left(\frac{w_o+w_H}{2}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}[q_1A_{mn}+q_2(v_o+(-1)^mv_H+mB_{mn})+q_3(w_o+(-1)^mw_H+mC_{mn})]=0,$$

$$q_1A_{on}+q_2\left(\frac{v_o+v_H}{2}\right)+q_3\left(\frac{w_o+w_H}{2}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}[q_1A_{mn}+q_2(v_o+(-1)^mv_H+mB_{mn})+q_3(w_o+(-1)^mw_H+mC_{mn})](-1)^m=0,$$

$$q_4A_{on}+q_3\left(\frac{v_o+v_H}{2}\right)-q_{18}\left(\frac{w_o+w_H}{2}\right)-\frac{2R^2(1-\mu^2)}{EhH}\left[\frac{M_z^o+M_z^H}{2}\right]+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[q_4A_{mn}+q_{23}mB_{mn}+q_3(v_o+(-1)^mv_H+mB_{mn})+q_{13}mC_{mn}-a_9(w_o+(-1)^mw_H+mC_{mn})m^2-q_{18}(w_o+(-1)^mw_H+mC_{mn})-\frac{2R^2(1-\mu^2)}{EhH}(M_z^o+(-1)^mM_z^H)\Big]=0,$$

$$q_4A_{on}+q_3\left(\frac{v_o+v_H}{2}\right)-q_{18}\left(\frac{w_o+w_H}{2}\right)-\frac{2R^2(1-\mu^2)}{EhH}\left[\frac{M_z^o+M_z^H}{2}\right]+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[q_4A_{mn}+q_{23}mB_{mn}+q_3(v_o+(-1)^mv_H+mB_{mn})+q_{13}mC_{mn}-a_9(w_o+(-1)^mw_H+mC_{mn})m^2-q_{18}(w_o+(-1)^mw_H+mC_{mn})-\frac{2R^2(1-\mu^2)}{EhH}(M_z^o+(-1)^mM_z^H)\Big](-1)^m=0 \tag{15}$$

식 (14), (15)와 같이 셸의 기하학적 경계조건과 하중에 대한 경계조건으로부터 나오는 8개의 구속조건에 식 (12), (13)으로 주어진 Fourier 미정계수

A_{on}, A_{mn}, B_{mn}과 C_{mn}을 대입하면 식 (16)의 제차 연립 방정식을 얻는다.

$$[e_{ij}]\{N_z^o,\ N_z^H,\ M_z^o,\ M_z^H,\ v_o,\ v_H,\ w_o,\ w_H\}^T=\{0\} \tag{16}$$

여기서 $i, j=1, 2, \cdots, 8$이다. 식 (16)이 자명한 해가 아닌 해를 갖기 위하여는 식 (16)으로 주어진 행렬 $[e_{ij}]$의 행렬식(determinant)은 영이 되어야 한다.

2.5 고유진동수 행렬식

식 (16)의 고유진동수 행렬식으로부터 각 경계조건들에 대하여 4차 이하의 고유진동수 행렬식을 얻을 수 있다. 먼저 고정-자유단을 갖는 셸(clamped-free shell)은 고정단 즉 $z=0$인 곳에서는 기하학적 경계조건의 지배를 받게되는 반면, 하중에 대한 경계조건은 해제된다. 이와는 반대로 $z=H$인 곳에서는 하중에 대한 경계조건의 지배를 받게 되지만 기하학적 경계조건은 해제된다. 이러한 경계조건들을 식 (17)으로 나타낼 수 있으며 식 (16)과 식 (17)로부터 식 (18)을 이끌어낼 수 있다.

$z=0$일 때,

$u=v=w=w_{,z}=0$

$z=H$일 때,

$$N_z=N_{z\theta}=Q_z=M_z=0 \tag{17}$$

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} & e_{16} & e_{18} \\ e_{13} & e_{33} & e_{36} & e_{38} \\ e_{16} & e_{36} & e_{66} & e_{68} \\ e_{18} & e_{38} & e_{68} & e_{88} \end{vmatrix}=0 \tag{18}$$

양단이 고정된 셸(clamped-clamped shell)은 양단에서 기하학적 경계조건의 지배만 받게 되며 하중에 대한 경계조건은 해제된다. 이러한 경계조건들을 식 (19)로 나타낼 수 있으며 식 (16)과 식 (19)로부터 식 (20)을 얻을 수 있다.

$z=0$과 H일 때,

$$u=v=w=w_{,z}=0 \tag{19}$$

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} & e_{34} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} & e_{44} \end{vmatrix}=0 \tag{20}$$

양단이 단순지지되고 축방향의 운동이 구속된 셸의 경계조건은 식 (21)이 되며 식 (16)과 식 (21)로부터 식 (22)를 얻을 수 있다.

$z=0$과 H일 때,

$$u=v=w=w_{,z}=0 \tag{21}$$

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & e_{22} \end{vmatrix} \tag{22}$$

3. 수치계산 예

참고문헌 (4), (7), (8)의 예제로 제시된 유체로 채워진 셸들의 고유진동수를 식 (18)과 식 (20) 및 식 (22)로 구하고 참고문헌들의 값들과 비교하여 보았다. 이론식에서 급수전개 항이 무한에 가까울수록 정밀한 계산이 되지만 급수전개항 m을 늘려가면 어느 정도의 전개항부터는 수렴하게 된다. 고정-자유단을 갖는 셸의 급수전개항에 대한 수렴성이 Table 1에 나타나 있다. 예제로 선택한 셸들의 급수전개항에 대한 수렴성은 약간씩 다르지만 모든 경우에 충분히 수렴하는 값이 되도록 급수전개항 m을 250으로 정하여 계산을 수행하였다.

3.1 고정-자유단의 경계조건을 갖는 셸

참고문헌 (8)에서는 유체가 담긴 고정-자유단을 갖는 셸의 진동해석을 Karadenitz 축대칭 셸 해석 프로그램을 이용한 유한요소법으로 수행하고 실험에

Table 1 Convergence of natural frequencies (Hz) of a clamped-free liquid-filled circular cylindrical shell (case of section 3.1)

m′	Circumferential wave number(n)	Fourier component number (m)					
		10	20	50	100	250	500
1	1	51.9	50.4	49.4	49.1	48.9	48.8
	2	152.5	152.7	153.2	153.5	153.7	-
	3	464.2	464.5	465.0	465.2	465.3	-
2	1	292.9	285.3	279.3	277.7	276.8	276.6
	2	189.6	187.3	186.5	186.3	186.3	-
	3	472.7	472.9	473.8	474.5	475.0	-
3	1	721.2	706.0	691.8	688.4	686.8	475.2
	2	336.7	326.6	320.6	319.0	318.2	-
	3	502.9	501.2	500.9	501.2	501.6	-
4	1	1225.9	1204.8	1182.8	1178.3	1176.3	1175.7
	2	583.2	557.8	544.5	541.0	539.3	-
	3	577.9	568.9	565.3	564.6	564.4	-

Table 2 Natural frequencies of fully liquid-filled circular cylindrical shell with clamped-free boundary condition (Hz) (reference (8)[1] : finite element method using Karadenitz axisymmetric shell analysis program reference (8)[2] : experiment)

m′	Method	Empty shell				Liquid-filled shell			
		n=1	n=2	n=3	n=4	n=1	n=2	n=3	n=4
1	Reference(8)[1]	82.2	255.8	710.9	1370.	48.3	158.6	481.6	983.4
	Reference(8)[2]	-	247.5	696.9	-	-	153.9	465.9	-
	present method	82.3	256.0	719.7	1379.1	48.9	153.7	465.3	955.7
2	Reference(8)[1]	460.7	304.9	716.3	1394.	274.3	190.2	491.9	992.0
	Reference(8)[2]	-	291.3	706.6	-	-	182.1	475.3	-
	present method	461.0	305.1	729.3	1386.1	276.8	186.8	475.0	969.8
3	Reference(8)[1]	1133.	509.1	758.1	1411.	682.6	318.4	515.7	1004.
	Reference(8)[2]	-	484.2	741.2	-	-	304.5	502.3	-
	present method	1131.8	509.7	763.6	1402.0	686.8	318.2	501.6	994.9
4	Reference(8)[1]	1928.	853.6	836.7	1496.	1172.	536.7	577.0	1027.
	Reference(8)[2]	-	823.8	827.5	-	-	517.7	558.4	-
	present method	1923.7	854.6	854.0	1433.4	1176.3	539.3	564.4	1036.4

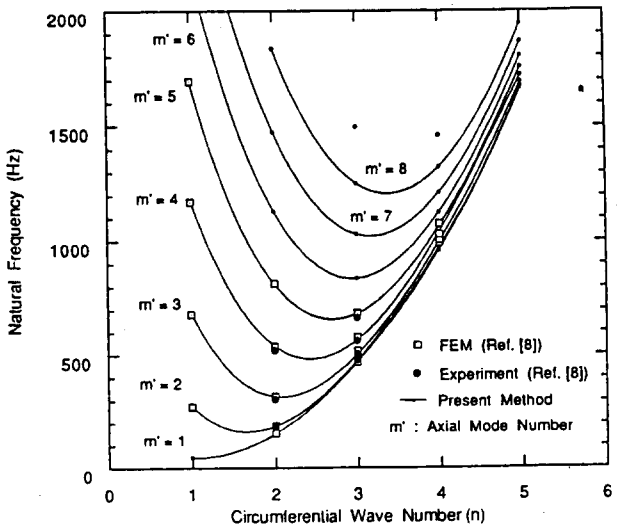

Fig. 2 Natural frequencies of fully liquid-filled circular cylindrical shell with clamped-free boundary condition (R= 0.07654 m, H= 1.35 m, h= 0.002286 m, μ=0.3, E=200 GPa, ρ=7850 kg/m^3, ρ_o=1000 kg/m^3)

서 구한 고유진동수와 비교하고 있다. 참고문헌 (8)에서 예제로 계산한 셸은 반경이 0.07654 m이고, 길이가 1.35 m이며, 두께는 0.002286 m이다. 셸의 재질은 스테인레스강이고 탄성계수는 200×10^9 N/m^2, Poisson 비는 0.3, 밀도는 7850 kg/m^{3}이다. 또한 유체의 밀도는 1000 kg/m^{3}이다. 이 셸에 대하여 본 논문에서 제시한 이론적인 방법으로 공기중에서와 유체가 가득 채워진 경우의 진동수를 구하고 Table 2와 Fig. 2에서 참고문헌 (8)의 값들과 비교하였다. Table 2와 Fig. 2에서 보는 바와 같이 고정-자유단을 갖는 셸에 대하여 본 논문에서 제시한 방법이 참고문헌 (8)에서 구한 고유진동수와 거의 일치하고 있음을 볼 수 있다.

Table 3 Natural frequencies of fully liquid-filled circular cylindrical shell with clamped-clamped boundary condition (Hz) (reference (7) : Galerkins method)

m′	n=10			
	Empty shell		Liquid-filled shell	
	Reference (7)	Present method	Reference (7)	Present method
1	-	468.1	95.42	88.0
2	-	912.4	182.1	180.3
3	-	1407.7	292.6	296.1

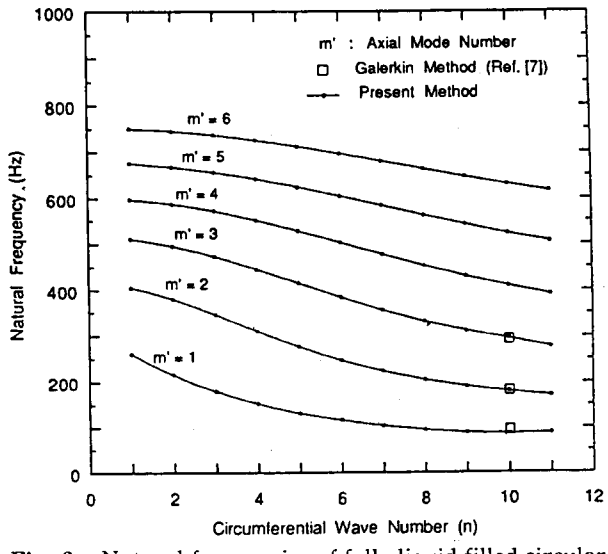

Fig. 3 Natural frequencies of fully liquid-filled circular cylindrical shell with clamped ends boundary condition (R=0.100 m, H=0.114 m, h=0.00025 m, μ=0.3, E=5.56 GPa, ρ=1405 kg/m^3, ρ_o=1000 kg/m^3)

3.2 양단이 고정된 셸

참고문헌 (7)에서는 유체가 담긴 양단이 고정된 셸의 진동해석을 Galerkin 방법으로 수행하고 실험치와 비교하였다. 참고문헌 (7)에서 제시하고 있는 셸은 반경이 0.100 m이고, 길이가 0.114 m이며, 두께는 0.00025 m이다. 셸의 재질은 폴리에스터이고 탄성계수는 5.56×10^9 N/m^2, Poisson 비는 0.3, 밀도는 1405 kg/m^{3}이다. 그리고 유체의 밀도는 1000 kg/m^{3}이다. 본 논문에서 제시한 방법으로 참고문헌 (7)의 셸에 대하여 유체로 채워진 셸의 고유진동수를 구하고 Table 3과 Fig. 3에서 비교하였다. Table 3과 Fig. 3에서 보는 바와 같이 양단 고정인 셸에 대하여 본 논문에서 제시한 방법으로 구한 값이 참고문헌 (7)에서 구한 고유진동수와 거의 근접하고 있음을 알 수 있다.

Table 4 Natural frequencies of fully liquid-filled cylindrical shell with simply supported boundary condition at both ends (Hz) (reference (4): finite element method)

m′	n=1			
	Empty shell		Liquid-filled shell	
	Reference(4)	Present method	Reference(4)	Present method
1	9.861	9.85	4.549	4.51
2	37.290	37.18	17.460	17.29
3	77.900	77.03	37.137	36.41
4	128.120	124.54	62.115	59.62

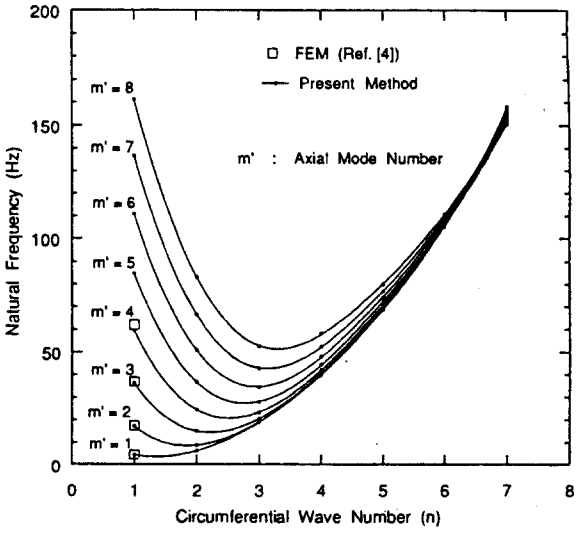

Fig. 4 Natural frequencies of fully liquid-filled circular cylindrical shell with simply supported ends boundary condition (R=0.90 m, H=22.482 m, h=0.015 m, μ=0.3, E=203.4 GPa, ρ=7844.2 kg/m^3, ρ_o=999.2 kg/m^3)

3.3 양단이 단순지지된 셸

참고문헌 (4)에서는 유체가 담긴 양단이 단순지지된 셸의 고유진동수를 유한요소법으로 구하였다. 참고문헌 (4)에서 사용한 셸은 반경이 0.9 m이고, 길이가 22.482 m이며, 두께는 0.015 m이다. 셸의 탄성계수는 203.4×10^9 N/m^2, Poisson 비는 0.3 밀도는 7844.2 kg/m^{3}이다. 또한 유체의 밀도는 999.2 kg/m^{3}이다. 참고문헌 (4)의 셸 고유진동수와 본 논문에서 제시한 방법으로 구한 셸 고유진동수를 Table 4와 Fig. 4에서 비교하였다. Table 4와 Fig. 4에서 보는 바와 같이 양단이 단순지지된 셸에 대하여도 본 논문에서 제시한 방법으로 구한 고유진동수가 참고문헌 (4)의 고유진동수와 거의 일치하고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

유체가 가득 담긴 원통형 셸이 임의의 고전적인 경계조건들을 갖을 경우에 대하여 Stokes 변환을 이용한 Fourier 급수전개로 셸의 고유진동수를 구하는 해석적인 방법을 제시하였다. 기존의 Galerkin 방법과 Rayleigh's quotient를 이용한 방법 등의 수치해석에서는 수식을 전개할 때, 셸의 축방향 진동 모우드와 유체의 축방향 속도 포텐셜이 일치하지 못하므로 셸의 축방향 구간에 대한 적분을 수행하여 근사치를 구하고 있지만, 본 논문에서는 실제 진동현상과 일치하도록 유체와 셸이 접하는 곳에서 셸의 축방향 진동 모우드와 유체의 축방향 운동 모우드가 동일하게 수식을 전개하여 셸의 축방향 구간에 대한 적분을 수행하지 않고 미지의 Fourier 계수들을 선형 제차 방정식으로 나타내어 수식을 유도하였다. 예제들을 통하여 고정-자유단을 갖는 셸, 양단이 고정된 셸, 양단이 단순지지된 원통형 셸에 대하여 공기중에서와 유체가 가득 담긴 경우에 대해서 각각 고유진동수를 구하고 참고문헌들에서 제시하고 있는 Galerkin 방법, 유한요소법 그리고 실험을 통해서 구한 값들과 비교하여 보았다. 그 결과 이미 발표된 고유진동수와 근접하는 값을 얻을 수 있었으며, 본 논문에서 제시한 방법으로 유체가 담긴 셸의 고유진동수 계산에서 정확한 값을 얻을 수 있다는 확신을 얻었다. 또한 기존의 방법들이 제한적인 셸의 양단

경계조건들에 대하여 수식을 세웠으나 본 논문에서는 여러 경우의 경계조건을 갖는 셸에 대한 해석적인 방법을 제시하여 공학적 유용성을 증대시켰다.

참 고 문 헌

(1) Stefan Markus, 1988, "The Mechanics of Vibrations of Cylindrical Shells," Elsevier Science Publishing Company, Inc.

(2) H. Chung, 1981, "Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shells," Journal of Sound and Vibration, Vol. 74(3), pp. 331~350.

(3) R. K. Gupta and G. L. Hutchinson, 1988, "Free Vibration Analysis of Liquid Storage Tanks," Journal of Sound and Vibration, Vol. 122(3), pp. 491~506.

(4) A. A. Lakis and M. Sinno, 1992, "Free Vibration of Axisymmetric and Beam-Like Cylindrical Shells, Partially Filled with Liquid," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, pp. 235~268.

(5) Y. Y. Huang, 1991, "Orthogonality of Wet Modes in Coupled Vibrations of Cylindrical Shells Containing Liquids," Journal of Sound and Vibration, Vol. 145(1), pp. 51~60.

(6) T. Mikami and J. Yoshimura, 1992, "The Collocation Method for Analyzing Free Vibration of Shells of Revolution with Either Internal or External Fluids," Computers and Structures, Vol. 44(1/2), pp. 343~351.

(7) N. Yamaki, J. Tani, and Y. Yamaji, 1984, "Free Vibration of a Clamped-Clamped Circular Cylindrical Shell Partially Filled with Liquid," Journal of Sound and Vibration, Vol. 94(4), pp. 531~550.

(8) J. R. Maguire, 1991, "A Study of Cylindrical Shell Vibrations in Fluid," Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Flow Induced Vibrations, International Conference, IMechE 1991-6.

(9) Y. Y. Huang, S. K. Wang, and W. M. Cheng, 1988, "Fluid-Structure Coupling Boundary Element Method for Analyzing Free Vibration of Axisymmetric Thick-Walled Tanks," Boundary Elements X, Volume 1 : Mathematical and Computational Aspects, Editor ; C. A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag.

부록 I : 동적 변위들과 그 미분치들

$$u(z,\theta)=\left[A_{on}+\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\right]\cos n\theta,\qquad 0\le z\le H,$$

$$u_{,z}(z,\theta)=-\left(\frac{\pi}{H}\right)\left[\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}m\sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\right]\cos n\theta,\qquad 0<z<H,$$

$$u_{,z}(0,\theta)=-\left(\frac{\pi^2}{2H}\right)\tilde{u}_o\cos n\theta,$$

$$u_{,z}(H,\theta)=\left(\frac{\pi^2}{2H}\right)\tilde{u}_H\cos n\theta,$$

$$u_{,zz}(z,\theta)=\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\left[\frac{\tilde{u}_o+\tilde{u}_H}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\{\tilde{u}_o+\tilde{u}_H(-1)^m-m^2A_{mn}\}\cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\right]\cos n\theta\quad 0\le z\le H,$$

$$v(z,\theta)=\left[\sum_{m=1}^{\infty}B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\right]\sin n\theta\quad 0<z<H,$$

$$v(0,\theta)=-\left(\frac{\pi}{2}\right)v_o\sin n\theta,$$

$$v(H,\theta)=\left(\frac{\pi}{2}\right)v_H\sin n\theta,$$

$$v_{,z}(z,\theta)=\left(\frac{\pi}{H}\right)\left[\frac{v_o+v_H}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\{v_o+v_H(-1)^m+mB_{mn}\}\cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\right]\sin n\theta,\qquad 0\le z\le H,$$

$$v_{,zz}(z,\theta)=-\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\left[\sum_{m=1}^{\infty}\{v_o\,m+v_H\,m(-1)^m+m^2B_{mn}\}\sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\right]\sin n\theta,\qquad 0<z<H,$$

$$v_{,zz}(0,\theta)=-\left(\frac{\pi^3}{2H^2}\right)\tilde{v}_o\sin n\theta,$$

$$v_{,zz}(H,\theta)=\left(\frac{\pi^3}{2H^2}\right)\tilde{v}_H\sin n\theta,$$

$$w(z,\theta)=\left[\sum_{m=1}^{\infty}C_{mn}\sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\right]\cos n\theta,0<z<H,$$

$$w(0,\theta)=-\left(\frac{\pi}{2}\right)w_o\cos n\theta,$$

$$w(H,\theta)=\left(\frac{\pi}{2}\right)w_H\cos n\theta,$$

$$w_{,z}(z,\theta)=\left(\frac{\pi}{H}\right)\left[\frac{w_o+w_H}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\{w_o+w_H(-1)^m+mC_{mn}\}\cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\right]\cos n\theta,\qquad 0\le z\le H,$$

$$w_{,zz}(z,\theta)=-\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\left[\sum_{m=1}^{\infty}\{w_o\, m+w_H\, m(-1)^m + m^2C_{mn}\}\sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\right]\cos n\theta,\quad 0<z<H,$$

$$w_{,zz}(0,\theta)=-\left(\frac{\pi^3}{2H^2}\right)\tilde{w}_o\cos n\theta,$$

$$w_{,zz}(H,\theta)=\left(\frac{\pi^3}{2H^2}\right)\tilde{w}_H\cos n\theta,$$

$$w_{,zzz}(z,\theta)=\left(\frac{\pi}{H}\right)^3\left[\frac{\tilde{w}+\tilde{w}_H}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\{\tilde{w}_o+\tilde{w}_H(-1)^m-w_o\,m^2-w_H\, m^2(-1)^m-m^3C_{mn}\}\cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\right]\cos n\theta,\quad 0\le z\le H,$$

$$w_{,zzzz}(z,\theta)=\left(\frac{\pi}{H}\right)^4\left[\sum_{m=1}^{\infty}\{-\tilde{w}_o\, m-\tilde{w}_H\, m(-1)^m + w_o\, m^3+w_H\, m^3(-1)^m+m^4C_{mn}\}\sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)\right]\cos n\theta,\quad 0<z<H,$$

$$w_{,zzzz}(0,\theta)=\tilde{\tilde{w}}_o\cos n\theta,$$

$$w_{,zzzz}(H,\theta)=\tilde{\tilde{w}}_H\cos n\theta$$

부록 Ⅱ : 부록 Ⅲ과 수식(12)～(15)에 나타난 계수들

$$a_1=\left[\frac{\pi R}{H}\right]^2,\ a_{21}=\frac{1}{2}(1-\mu)\left(1+\frac{k}{4}\right)n^2,$$

$$a_2=a_{21}-\Omega,\ a_3=-\left[\frac{\pi R}{H}\right]\left[\frac{1+\mu}{2}-\frac{3(1-\mu)}{8}k\right]n,$$

$$a_4=-\left[\frac{\pi R}{H}\right]\left[\mu-\frac{(1-\mu)}{2}kn^2\right],$$

$$a_5=\left[\frac{\pi R}{H}\right]^2\left[\frac{(1-\mu)}{2}\right]\left[1+\frac{9}{4}k\right],$$

$$a_{61}=(1+k)\,n^2,$$

$$a_6=a_{61}-\Omega,\ a_7=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi R}{H}\right]^2(3-\mu)\,kn,$$

$$a_8=(1+kn^2)\,n,\ a_9=\left[\frac{\pi R}{H}\right]^4k,$$

$$a_{10}=2\left[\frac{\pi R}{H}\right]^2kn^2,\ a_{11}=1+kn^4-\Omega,$$

$$a_{12}=1+kn^4;\ q_1=\left[\frac{\pi R}{H}\right]\left[\frac{1-\mu}{2}\right]\left[1-\frac{3}{4}k\right]n,$$

$$q_2=-a_5,\ q_3=-\left[\frac{\pi R}{H}\right]^2\left[\frac{3(1-\mu)}{2}\right]kn,$$

$$q_4=-\left[\frac{\pi R}{H}\right]\left[\frac{1-\mu}{2}\right]kn^2,\ q_5=-q_7,$$

$$q_6=-(a_9m^2+q_{12}),\ q_{12}=\left[\frac{\pi R}{H}\right]^2(2-\mu)\,kn^2,$$

$$q_{13}=q_{23}n,\ q_{23}=-\left[\frac{\pi R}{H}\right]^2\mu kn,$$

$$q_{18}=2\left[\frac{\pi R}{H}\right]^2(1-\mu)\,kn^2;\ s_{11}=a_1m^2+a_2,$$

$$s_{12}=a_3m,\ s_{13}=a_4m,\ s_{22}=a_5m^2+a_6,$$

$$s_{23}=a_7m^2+a_8,\ s_{33}=a_9m^4+a_{10}m^2+a_{11}-Z_{mn}\Omega,$$

$$Z_{mn}=\frac{\rho_oRIn\left(\frac{m\pi R}{L}\right)}{\rho h\left[\left(\frac{m\pi R}{L}\right)In_{-1}\left(\frac{m\pi R}{L}\right)-nIn\left(\frac{m\pi R}{L}\right)\right]},$$

$$a_\alpha=\frac{(s_{22}s_{33}-s_{23}{}^2)}{\Delta_{mn}},\ a_\beta=\frac{(s_{13}s_{23}-s_{12}s_{33})}{\Delta_{mn}},$$

$$a_\gamma=\frac{(s_{12}s_{23}-s_{13}s_{22})}{\Delta_{mn}},\ b_\beta=\frac{(s_{11}s_{33}-s_{13}{}^2)}{\Delta_{mn}},$$

$$b_\gamma=\frac{(s_{12}s_{13}-s_{11}s_{23})}{\Delta_{mn}},\ c_\gamma=\frac{(s_{11}s_{22}-s_{12}{}^2)}{\Delta_{mn}},$$

$$\Delta_{mn}=\begin{vmatrix}s_{11}&s_{12}&s_{13}\\ s_{12}&s_{22}&s_{23}\\ s_{13}&s_{23}&s_{33}\end{vmatrix},\ \Delta_{mn}\neq 0.$$

부록 Ⅲ : 고유진동수 행렬식의 요소들

$$e_{11}=\frac{1}{2a_2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_\alpha,\ e_{12}=\frac{1}{2a_2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_\alpha(-1)^m,$$

$$e_{13}=\sum_{m=1}^{\infty}a_\gamma m,\ e_{14}=\sum_{m=1}^{\infty}a_\gamma m(-1)^m,$$

$$e_{15}=\frac{q_1}{2a_2}+\sum_{m=1}^{\infty}[q_1a_\alpha+q_2a_\beta m+q_3a_\gamma m],$$

$$e_{16}=\frac{q_1}{2a_2}+\sum_{m=1}^{\infty}[q_1a_\alpha+q_2a_\beta m+q_3a_\gamma m](-1)^m,$$

$$e_{17}=\frac{q_4}{2a_2}+\sum_{m=1}^{\infty}[q_4a_\alpha+q_5a_\beta m+q_6a_\gamma m],$$

$$e_{18}=\frac{q_4}{2a_2}+\sum_{m=1}^{\infty}[q_4a_\alpha+q_5a_\beta m+q_6a_\gamma m],(-1)^m;$$

$$e_{22}=e_{11},\ e_{23}=e_{14},\ e_{24}=e_{13},\ e_{25}=e_{16},$$

$$e_{26}=e_{15},\ e_{27}=e_{18},\ e_{28}=e_{17};$$

$$e_{33}=\sum_{m=1}^{\infty}c_\gamma m^2,\ e_{34}=\sum_{m=1}^{\infty}c_\gamma m^2(-1)^m,$$

$$e_{35}=\sum_{m=1}^{\infty}[q_1a_\gamma m+q_2b_\gamma m^2+q_3c_\gamma m^2],$$

$$e_{36}=\sum_{m=1}^{\infty}[q_1a_\gamma m+q_2b_\gamma m^2+q_3c_\gamma m^2](-1)^m,$$

$$e_{37}=\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[q_4a_\gamma m+q_5b_\gamma m^2+q_6c_\gamma m^2+1],$$

$$e_{38}=\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[q_4a_\gamma m+q_5b_\gamma m^2+q_6c_\gamma m^2+1](-1)^m;$$

$$e_{44}=e_{33},\ e_{45}=e_{36},\ e_{46}=e_{35},$$

$$e_{47}=e_{38},\ e_{48}=e_{37};$$

$$e_{55}=\frac{q_1^2}{2a_2}+\frac{q_2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[q_1^2a_\alpha+q_2^2b_\beta m^2+q_3^2c_\gamma m^2+2q_1q_2a_\beta m+2q_2q_3b_\gamma m^2+2q_1q_3a_\gamma m+q_2],$$

$$e_{56}=\frac{q_1^2}{2a_2}+\frac{q_2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[q_1^2a_\alpha+q_2^2b_\beta m^2+q_3^2c_\gamma m^2 +2q_1q_2a_\beta m+2q_2q_3b_\gamma m^2+2q_1q_3a_\gamma m+q_2](-1)^m,$$

$$e_{57}=\frac{q_1q_4}{2a_2}+\frac{q_3}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\{q_4(q_1a_\alpha+q_2a_\beta m+q_3a_\gamma m) +q_5(q_1a_\beta m+q_2b_\beta m^2+q_3b_\gamma m^2) +q_6(q_1a_\gamma m+q_2b_\gamma m^2+q_3c_\gamma m^2)+q_3\},$$

$$e_{58}=\frac{q_1q_4}{2a_2}+\frac{q_3}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\{q_4(q_1a_\alpha+q_2a_\beta m+q_3a_\gamma m) +q_5(q_1a_\beta m+q_2b_\beta m^2+q_3b_\gamma m^2) +q_6(q_1a_\gamma m+q_2b_\gamma m^2+q_3c_\gamma m^2)+q_3\}(-1)^m;$$

$e_{66}=e_{55}$, $e_{67}=e_{58}$, $e_{68}=e_{57}$;

$$e_{77}=\frac{q_4^2}{2a_2}-\frac{q_{18}}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\{q_4(q_4a_\alpha+q_5a_\beta m+q_6a_\gamma m) +q_5(q_4a_\beta m+q_5b_\beta m^2+q_6b_\gamma m^2) +q_6(q_4a_\gamma m+q_5b_\gamma m^2+q_6c_\gamma m^2)-a_9m^2-q_{18}\},$$

$$e_{78}=\frac{q_4^2}{2a_2}-\frac{q_{18}}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\{q_4(q_4a_\alpha+q_5a_\beta m+q_6a_\gamma m) +q_5(q_4a_\beta m+q_5b_\beta m^2+q_6b_\gamma m^2) +q_6(q_4a_\gamma m+q_5b_\gamma m^2+q_6c_\gamma m^2) -a_9m^2-q_{18}\}(-1)^m;$$

$e_{88}=e_{77}$.