

〈論 文〉

Fourier 급수전개를 이용한 부분적으로 유체가 채워진 원통형 셀의 고유진동 해석

Fourier Series Expansion Method for Free Vibration Analysis of a Partially Liquid-Filled Circular Cylindrical Shell

정 경 훈* · 이 성 철**

Jeong, Kyeong-Hoon and Lee, Seong-Cheol

〈1994년 2월 7일 접수; 1994년 4월 7일 심사완료〉

Key Words : Free Vibration(고유진동), Partially Liquid-Filled(유체가 부분적으로 채워진), Natural Frequency(고유진동수), Circular Cylindrical Shell(원통형 셀), Fluid-Structure Interaction(유체와 구조물간의 상호작용), Stokes' Transformation(Stokes 변환), Fourier Series Expansion(Fourier 급수전개), Velocity Potential(속도 포텐셜)

ABSTRACT

An analytical method for natural frequencies of a partially liquid-filled circular cylindrical shell with various boundary conditions is developed by means of the Stokes's transformation and Fourier series expansion on the basis of Sanders' shell equation. The liquid-shell coupled system is divided into two regions for convenient formulation. One is the empty shell region in which the Sanders' shell equations are formulated without the liquid effect, the other is wetted shell region in which the shell equations are formulated with consideration of the liquid dynamic effect. The shell equations for each regions are combined by the geometry and the force continuities at the junction of the two regions. For the vibration relevant to the liquid motion, the velocity potential of liquid is assumed as a sum of linear combination of suitable harmonic functions in axial direction. The unknown parameters are selected to satisfy the boundary condition along the wetted shell surface. The natural frequencies of the liquid filled cylindrical shells with the clamped-free and the clamped-clamped boundary conditions examined in the previous works, are obtained by this analytical method. The results are compared with the previous works, and excellent agreement is found for the natural frequencies of the shells.

기 호 설 명

A_{0n}, A_{mn} : 유체로 채워진 셀 영역에서 축방향 변위의 축방향 모우드와 관련된 Fourier 계수들
 a_1, a_2, \dots, a_{61} : 부록 II에서 정의됨.
 $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma$: 부록 II에서 정의됨.

B_{mn} : 유체로 채워진 셀 영역에서 접선방향 변위의 축방향 모우드와 관련된 Fourier계수들
 b_1, b_3, \dots, b_{61} : 부록 II에서 정의됨.
 b_β, b_γ : 부록 II에서 정의됨.
 C_{mn} : 유체로 채워진 셀 영역에서 반경방향 변위의 축방향 모우드와 관련된 Fourier계수들
 $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{88}$: 부록 III에서 정의됨.

*한국원자력 연구소 원자로 기계분야

**전북대학교 기계공학과

c_r : 부록 II에서 정의됨.
 D : $Eh/(1-\mu^2)$
 D_{mn} : 유체의 운동과 관련된 Fourier계수
 d_α, d_β, d_r : 부록 II에서 정의됨.
 E : 셀의 탄성계수
 E_{on}, E_{mn} : 유체가 채워지지 않은 셀 영역에서 축방향 변위의 축방향 모우드와 관련된 Fourier 계수들
 $e_{11}, e_{12}, \dots, e_{33}$: 부록 III에서 정의됨.
 e_β, e_r : 부록 II에서 정의됨.
 F_{mn} : 유체가 채워지지 않은 셀 영역에서 접선방향 변위의 축방향 모우드와 관련된 Fourier 계수
 f_r : 부록 II에서 정의됨.
 G_{mn} : 유체가 채워지지 않은 셀 영역에서 반경방향 변위의 축방향 모우드와 관련된 Fourier 계수
 g_1, g_2, \dots, g_{23} : 부록 II에서 정의됨.
 H : 유체가 채워지지 않은 부분의 셀 길이
 h : 셀의 두께
 k : $h^2/12R^2$
 K : $Eh^3/12(1-\mu^2)$
 L : 유체로 채워진 부분의 셀 길이
 m : 축방향의 Fourier 급수전개항
 m' : 축방향의 모우드 수
 M_z : 단위 길이당 굽힘 모멘트
 n : 원주방향의 모우드 수
 N_z : 단위 길이당 막인장력(membrane tensile force)
 $N_{z\theta}$: 단위 길이당 유효 막전단력(effective membrane shear force)
 p : 셀에 작용하는 유체의 압력
 Q_z : 단위 길이당 전단력
 q_1, q_2, \dots, q_{23} : 부록 II에서 정의됨.
 R_i, R : 셀의 내반경과 평균반경
 t : 시간
 U, V, W : 유체로 채워지지 않은 셀의 영역인 E 영역에서의 동적변위 및 모드함수 (축방향, 접선방향, 반경방향)
 u, v, w : 유체로 채워진 셀의 영역인 W 영역에서의 동적변위 및 모우드함수 (축방향, 접선방향, 반경방향)
 x, θ, r : 유체로 채워진 셀의 영역인 W 영역에서의 좌표계 (축방향, 접선방향, 반경방향)

z, θ, r : 유체로 채워지지 않은 셀의 영역인 E 영역에서의 좌표계 (축방향, 접선방향, 반경방향)
 γ^2 : $\rho R^2(1-\mu^2)/E$
 δ : L/H
 λ_{ij} : 고유진동수 행렬식의 요소들로 부록 IV에서 정의됨.
 μ : 셀의 Poisson 비
 ρ : 셀의 밀도
 ρ_0 : 유체의 밀도
 ϕ : 유체의 속도포텐셜
 ω : 셀의 고유진동수
 Ω : $(\omega/\omega_0)^2$
 ω_0^2 : $E/\rho R^2(1-\mu^2)$
첨 자
 O : $z=0$, 또는 $x=0$ 에서의 값.
 L : $x=L$ 에서의 값.
 H : $z=H$ 에서의 값.

1. 서 론

공학적인 구조물에는 원통형 셀의 형상이 널리 이용되고 있다. 이 셀 구조물 안으로 유체가 흐르거나 셀 구조물 안에 유체를 저장하는 경우가 많다. 예를 들면 원자력발전소의 원자로 내부구조물들 중에는 핵연료를 지지하고 있는 노심지지배럴(core support barrel)과 제어봉을 안내하는 상부안내구조물 지지배럴(upper guide structure support barrel)은 얇은 셀 구조물로 되어 있고 이러한 구조물들 주위로는 냉각수가 채워 있다. 화학공장에서는 원통형 셀 안에 액상의 각종 화학물질이나 원유 등을 저장하고 있는 경우가 많다. 이러한 구조물들의 내진해석이나 동적응력해석을 할 때, 유체가 담긴 셀에 대한 고유진동해석이 필요하게 된다. 이 분야에 대한 연구는 절실한 공학적 필요성 때문에 오래 전부터 연구가 진행되어 왔다. 유체가 담긴 셀의 고유진동수를 얻는 근사해법으로는 Galerkin 방법⁽¹⁾, Rayleigh's quotient를 이용한 방법⁽²⁾, 유한요소법^(3,4), collocation 방법⁽⁵⁾, 경계요소법⁽⁶⁾ 등이 제시되고 있다. 그러나 유한요소법^(3,4)과 경계요소법⁽⁶⁾은 셀의 영역과 유체의 영역을 각각 수많은 요소들로 나누어야 하기 때문에 많은 시간과 노력을 요구하고 있고, Galerkin방법⁽¹⁾과 Rayleigh's quotient를 이용한 방법⁽²⁾에서는 수식을 전개할 때, 셀의 축방향 진동 모우드와 유체의

축방향 속도 포텐셜이 일치하지 못하므로 셀의 축방향 구간에 대한 적분을 수행하여 근사치를 구하고 있지만, 본 논문에서는 실제 진동현상과 일치하도록 유체와 셀이 접하는 곳에서 셀의 축방향 진동모우드와 유체의 축방향 운동모우드가 동일하게 수식을 전개하여 셀의 축방향 구간에 대한 적분을 수행하지 않고 미지의 Fourier 계수들을 선형 제차방정식으로 나타내어 좀더 정확한 수식을 유도하였다. Stokes 변환과 Fourier 급수전개를 이용하여 유체가 가득 채워진 원통형 셀의 고유진동 해석은 참고문헌(7)에 제시되어 있지만 부분적으로 유체가 채워진 셀의 고유진동 해석에는 적용할 수가 없으므로 본 논문에서는 유체가 부분적으로 셀에 담겨있을 때, Stokes 변환⁽⁸⁾을 이용한 급수전개로 하단이 고정되고 상단이 자유인 경계조건을 갖는 셀과 양단이 모두 고정된 경계조건을 갖는 셀의 고유진동수를 구하는 이론적인 해석 방법을 제시하였다. 참고문헌들에서 제시한 Galerkin방법이나 유한요소법으로 얻은 셀의 고유진동수와 본 논문에서 제시한 방법으로 구한 셀의 고유진동수를 비교하여, 유체가 부분적으로 채워진 셀의 고유진동수를 계산할 수 있는 이론적 해석 방법의 적용성을 고찰하였다.

2. 이론의 전개

2.1 원통형 셀에 대한 운동방정식과 경계조건

Fig. 1에서 보는 바와 같이 높이가 H , 평균 반경이 R , 내반경이 R_i , 두께가 h 인 얇은 원통형 셀 안에 유체가 높이 L 만큼 차 있는 구조물을 생각해 보자. 셀의 해석을 위하여 Fig. 2에 나타난 바와 같이 유체가 채워진 셀 영역, 즉 $0 \leq x \leq L$ 인 영역과 유체가 채워지지 않은 셀 영역, 즉 $0 \leq z \leq H$ 인 영역으로

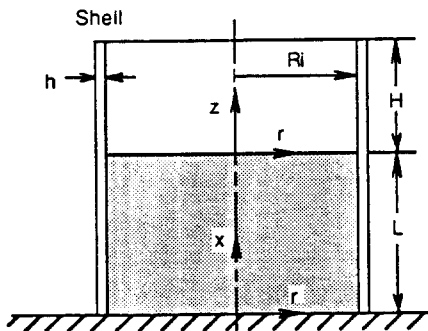
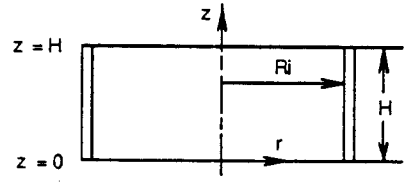
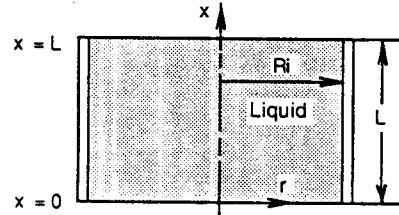


Fig. 1 Partially liquid filled cylindrical shell with various boundary conditions



(유체가 채워지지 않은 셀 영역: E 영역)



(유체로 채워진 셀 영역: W 영역)

Fig. 2 Cylindrical shell model divided into two regions

나누어 생각을 할 수 있다. 여기서 편의상, 유체가 채워진 셀 영역을 W영역이라 부르고 유체가 채워지지 않은 셀 영역을 E영역이라 부르기로 한다. 먼저 유체가 채워지지 않은 셀의 영역, 즉 E영역에서 원통형 셀의 축방향 z , 접선방향 θ , 반경방향 r 의 동적 변위들에 대한 Sanders 방정식은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.^(8,9)

$$\begin{aligned}
 & R^2 U_{,zz} + \frac{(1-\mu)}{2} \left(1 + \frac{k}{4}\right) U_{,00} \\
 & + R \left\{ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{3(1-\mu)}{8} k \right\} V_{,z0} \\
 & + \mu R W_{,z} + \frac{(1-\mu)}{2} R k W_{,z00} = \gamma^2 U_{,tt}, \\
 & R \left\{ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{3(1-\mu)}{8} k \right\} U_{,z0} \\
 & + (1+k) V_{,00} + \frac{(1-\mu)}{2} R^2 \left(1 + \frac{9k}{4}\right) V_{,zz} \\
 & - \frac{(3-\mu)}{2} R^2 k W_{,zz0} + W_{,0} - k W_{,000} = \gamma^2 V_{,tt}, \\
 & \frac{(1+\mu)}{2} R k U_{,z00} + \mu R U_{,z} - \frac{(3-\mu)}{2} R^2 k V_{,z00} \\
 & + V_{,0} + W + k (R^4 W_{,zzzz} + 2R^2 W_{,zz00} + W_{,0000} - V_{,000}) \\
 & = -\gamma^2 W_{,tt}, \quad 0 \leq z \leq H \quad (1)
 \end{aligned}$$

유체로 채워진 셀 영역, 즉 W 영역에 유체의 영향을 고려한 Sanders 방정식은 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.⁽⁸⁻¹⁰⁾.

$$\begin{aligned}
 & R^2 u_{,xx} + \frac{(1-\mu)}{2} \left(1 + \frac{k}{4}\right) u_{,00} \\
 & + R \left\{ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{3(1-\mu)}{8} k \right\} v_{,x0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu R w_{,x} + \frac{(1-\mu)}{2} R k w_{,x\theta\theta} = \gamma^2 u_{,tt} \\
 & R \left\{ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{3(1-\mu)}{8} k \right\} u_{,x\theta} \\
 & + (1+k) v_{,\theta\theta} + \frac{(1-\mu)}{2} R^2 \left(1 + \frac{9k}{4} \right) v_{,xx} \\
 & - \frac{(3-\mu)}{2} R^2 k w_{,xx\theta} + w_{,\theta} - k w_{,\theta\theta\theta} = \gamma^2 v_{,tt}, \\
 & \frac{(1+\mu)}{2} R k u_{,x\theta\theta} + \mu R u_{,x} - \frac{(3-\mu)}{2} R^2 k v_{,xxx} \\
 & + v_{,\theta} + w + k (R^4 w_{,xxxx} + 2R^2 w_{,xx\theta\theta} + w_{,\theta\theta\theta\theta} - v_{,\theta\theta\theta}) \\
 & = -\gamma^2 w_{,tt}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2)
 \end{aligned}$$

수식의 기호에 대한 상세한 설명은 기호설명과 부록들에 서술되어 있다. 원통형 셀 양단에서의 경계 조건은 양단에서의 변위 및 기울기로 나타나는 기하학적 경계조건들과 힘과 모멘트로 나타나는 하중에 대한 경계조건들로 나타난다.

셀의 하단이 고정되고 상단은 자유인 경계조건 (clamped-free boundary condition)은 셀의 하단에서 변위와 기울기가 구속되고 상단에서 하중이 작용하지 않으므로 식 (3)과 식 (4)로 나타나고, 유체가 채워진 W 영역과 유체가 채워지지 않은 E 영역이 서로 만나는 곳, 즉 $x=L$ 또는 $z=0$ 인 경계에서는 기하학적인 연속성과 하중에 대한 연속성이 유지되어야 하기 때문에 식 (5)와 식 (6), 그리고 (7)이 만족되어야 한다.

$$u(0) = w_{,x}(0) = 0 \quad (3)$$

$$N_{z\theta}(H) = Q_z(H) = 0 \quad (4)$$

$$w(L) = W(0), \quad v(L) = V(0), \quad u(L) = U(0) \quad (5)$$

$$w_{,x}(L) = W_{,z}(0), \quad v_{,x}(L) = V_{,z}(0) \quad (6)$$

$$Q_x(L) = Q_z(0), \quad N_x(L) = N_z(0), \quad (7)$$

$$M_x(L) = M_z(0)$$

여기서,

$$N_z = D \left[U_{,z} + \frac{\mu}{R} V_{,\theta} + \frac{\mu}{R} W \right],$$

$$N_x = D \left[u_{,x} + \frac{\mu}{R} v_{,\theta} + \frac{\mu}{R} w \right],$$

$$N_{z\theta} = \frac{D(1-\mu)}{2} \left[\frac{1}{R} \left(1 - \frac{3}{4} k \right) U_{,\theta} \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{9}{4} k \right) V_{,z} - 3k W_{,z\theta} \right],$$

$$N_{x\theta} = \frac{D(1-\mu)}{2} \left[\frac{1}{R} \left(1 - \frac{3}{4} k \right) u_{,\theta} \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{9}{4} k \right) v_{,x} - 3k w_{,x\theta} \right],$$

$$\begin{aligned}
 Q_z = K \left[-\frac{(1-\mu)}{2R^3} U_{,\theta\theta} + \frac{(3-\mu)}{2R^2} V_{,z\theta} \right. \\
 \left. - \frac{(2-\mu)}{R^2} W_{,z\theta\theta} - W_{,zzz} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_x = K \left[-\frac{(1-\mu)}{2R^3} u_{,\theta\theta} + \frac{(3-\mu)}{2R^2} v_{,x\theta} \right. \\
 \left. - \frac{(2-\mu)}{R^2} w_{,x\theta\theta} - w_{,xxx} \right],
 \end{aligned}$$

$$M_z = K \left[\frac{\mu}{R^2} (V_{,\theta} - W_{,\theta\theta}) - W_{,zz} \right],$$

$$M_x = K \left[\frac{\mu}{R^2} (v_{,\theta} - w_{,\theta\theta}) - w_{,xx} \right] \quad (8)$$

$$D = Eh / (1 - \mu^2), \quad K = Eh^3 / 12(1 - \mu^2) \quad (9)$$

셀의 양단이 고정되는 경계조건 (clamped-clamped boundary condition)은 셀의 양단에서 변위와 기울기가 구속되어야 하므로 식 (10)과 식 (11)로 나타나고, 이 경계조건에서도 유체가 채워진 셀의 W 영역과 유체가 채워지지 않은 셀의 E 영역이 서로 만나는 곳에서 기하학적인 연속성과 하중에 대한 연속성이 유지되어야 하기 때문에 식 (5)와 (6), 그리고 (7)이 역시 만족되어야 한다.

$$u(0) = w_{,x}(0) = 0 \quad (10)$$

$$U(H) = W_{,z}(H) = 0 \quad (11)$$

2.2 셀의 모드 함수

유체가 채워지지 않은 E 영역과 유체가 채워진 W 영역에 대하여 원통형 셀의 고유진동에 대한 동적 변위들은 축방향의 모우드함수와 원주방향의 모우드함수 및 시간에 대한 조화함수의 곱으로 각각 식 (12)와 식 (13)으로 나타낼 수 있다.⁽⁸⁾

E 영역에 대하여

$$U(z, \theta, t) = U(z) \cos n\theta \exp(i\omega t)$$

$$V(z, \theta, t) = V(z) \sin n\theta \exp(i\omega t)$$

$$W(z, \theta, t) = W(z) \cos n\theta \exp(i\omega t) \quad (12)$$

W 영역에 대하여

$$u(x, \theta, t) = u(x) \cos n\theta \exp(i\omega t)$$

$$v(x, \theta, t) = v(x) \sin n\theta \exp(i\omega t)$$

$$w(x, \theta, t) = w(x) \cos n\theta \exp(i\omega t) \quad (13)$$

여기서 $U(z)$, $V(z)$, $W(z)$, $u(x)$, $v(x)$, 그리고 $w(x)$ 는 E 영역과 W 영역에 대한 축방향, 접선방향, 반경방향의 변위에 해당하는 축방향 모우드 함수들을 각각 나타내고 있고 식 (14) 및 (15)와 같이 Fourier 급수의 선형 조합의 합으로 나타낼 수 있으며 이들은 서로 직교를 이룬다.⁽⁸⁾

E 영역에 대하여

$$U(z) = E_{on} + \sum_{m=1}^{\infty} E_{mn} \cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right)$$

$$V(z) = \sum_{m=1}^{\infty} F_{mn} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)$$

$$W(z) = \sum_{m=1}^{\infty} G_{mn} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right)$$

W 영역에 대하여

$$u(x) = A_{on} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$v(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (15)$$

축방향 모드함수들과 그 미분들은 참고문헌(8)에서 제시하고 있는 Stokes 변환을 이용하여 구할 수 있고, 셀 양단에서 임의의 가능한 경계조건의 조합에 대하여 축방향 모우드함수들과 그 미분들로 나타낼 수 있다. 축방향 모우드함수들과 그 미분들은 부록 I에 나타나 있다.

2.3 유체에 대한 운동방정식

원통형 셀 안에 밀도가 ρ_0 인 비압축성, 비점성, 비회전성 유체가 높이 L 만큼 채워있을 경우, 선형포텐셜 유동 이론에 의하면 유체의 속도포텐셜(velocity potential) ϕ 는 식 (16)의 Laplace 방정식을 만족한다.

$$\phi_{,rr} + \frac{1}{r}\phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta\theta} + \phi_{,xx} = 0 \quad (16)$$

유체 상단의 자유표면에서 유체의 운동을 무시하면, 유체와 셀이 접촉하는 면에서의 경계조건은 식 (17)로 나타난다.

$$\phi_{,r}|_{r=R_i} = -w(x, \theta, t), \quad 0 < x < L \quad (17)$$

식 (16)과 식 (17)의 경계조건을 만족하는 속도포텐셜을 식 (18)과 같이 가정한다.

$$\phi(r, x, \theta, t) = \sum_{i=1}^m D_{mn} \operatorname{In}\left(\frac{m\pi r}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos n\theta \exp(i\omega t) \quad (18)$$

여기서 $\operatorname{In}(m\pi r/L)$ 은 제 1종 변형 Bessel 함수이다. 또한 식 (15)와 (17), 그리고 식 (18)로부터 미정계수 D_{mn} 을 식 (19)와 같이 C_{mn} 으로 나타낼 수 있다.

$$D_{mn} = \frac{L}{m\pi} \left[\operatorname{In}'\left(\frac{m\pi R_i}{L}\right) \right]^{-1} C_{mn} \quad (19)$$

여기서 $\operatorname{In}'(\)$ 은 Bessel 함수 $\operatorname{In}(\)$ 의 미분을 나타낸다. 그런데 셀의 내벽에 작용하는 유체의 동압 $p(x, \theta, t)$ 는 식 (20)으로 나타낼 수 있으므로⁽¹⁰⁾, 식 (18)과 식 (19)로부터 식 (2)에 포함된 $Ri^2 p(x, \theta, t)/D$ 는 식 (21)로 표현된다.

$$p(x, \theta, t) = \rho_0 \omega^2 \phi(R_i, x, \theta) \exp(i\omega t) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{Ri^2 p(x, \theta, t)}{D} &= \frac{Ri^2}{D} \rho_0 \omega^2 \sum_{i=1}^m C_{mn} \left(\frac{L}{m\pi}\right) \left[\operatorname{In}\left(\frac{m\pi R_i}{L}\right) \right] \\ &\quad \times \left[\operatorname{In}'\left(\frac{m\pi R_i}{L}\right) \right]^{-1} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\ &\quad \cos n\theta \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (21)$$

2.4 수식의 전개

부록 I에서 Fourier 급수전개로 표현된 모우드함수들과 그 미분들을 식 (1)에 대입하면 미정계수 $E_{mn}, F_{mn}, G_{mn}, E_{on}$ 에 대하여 식 (22) 및 식 (23)과 같이 E 영역 양단에서의 변위와 하중값으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{on} &= \frac{1}{2(a_{21} - \Omega)} \left[f_1(V_o + V_H) + f_4(W_o + W_H) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2R^2(1 - \mu^2)}{EhH} \{N_z^o + N_z^H\} \right], \quad a_{21} \neq \Omega \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} E_{mn} \\ F_{mn} \\ G_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_\alpha & d_\beta & d_\gamma \\ d_\delta & e_\beta & e_\gamma \\ d_\gamma & e_\gamma & f_\gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1[V_o + (-1)^m V_H] + f_4[W_o + (-1)^m W_H] \\ - \frac{2R^2(1 - \mu^2)}{EhH} [N_z^o + (-1)^m N_z^H] \\ f_2 m[V_o + (-1)^m V_H] + f_5 m[W_o + (-1)^m W_H] \\ f_3 m[V_o + (-1)^m V_H] + f_6 m[W_o + (-1)^m W_H] \\ - \frac{2R^2(1 - \mu^2)}{EhH} m[M_z^o + (-1)^m M_z^H] \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서,

$$V_o = -\frac{2}{\pi \sin n\theta} V(0, \theta),$$

$$V_H = \frac{2}{\pi \sin n\theta} V(H, \theta),$$

$$W_o = -\frac{2}{\pi \sin n\theta} W(0, \theta),$$

$$W_H = \frac{2}{\pi \sin n\theta} W(H, \theta),$$

$$N_z^o = \frac{N_z(0, \theta)}{\cos n\theta}, \quad N_z^H = -\frac{N_z(H, \theta)}{\cos n\theta},$$

$$M_z^o = -\frac{\pi M_z(0, \theta)}{H \cos n\theta}, \quad M_z^H = \frac{\pi M_z(H, \theta)}{H \cos n\theta}.$$

동일한 방법으로 부록 I에 Fourier 급수전개로 표현된 모우드함수 및 그 미분들과 식 (21)의 유체력을 식 (2)에 대입하면 미정계수 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, A_{on}$ 에 대하여 W 영역 양단에서의 변위와 하중으로 식 (24) 및 식 (25)와 같이 표현할 수 있다.

$$A_{on} = \frac{1}{2(a_{21} - \Omega)} \left[q_1(v_o + v_L) + q_4(w_o + w_L) - \frac{2R^2(1 - \mu^2)}{EhL} \{N_x^o + N_x^L\} \right], \quad a_{21} \neq \Omega \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ a_\beta & b_\beta & b_\gamma \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[v_o + (-1)^m v_L] + q_4[w_o + (-1)^m w_L] \\ -\frac{2R^2(1 - \mu^2)}{EhL} [N_x^o + (-1)^m N_x^L] \\ q_2 m[v_o + (-1)^m v_L] + q_5 m[w_o + (-1)^m w_L] \\ q_3 m[v_o + (-1)^m v_L] + q_6 m[w_o + (-1)^m w_L] \\ -\frac{2R^2(1 - \mu^2)}{EhL} m[M_x^o + (-1)^m M_x^L] \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서,

$$\begin{aligned} v_o &= -\frac{2}{\pi \sin n\theta} v(0, \theta), \quad v_L = \frac{2}{\pi \sin n\theta} v(L, \theta), \\ w_o &= -\frac{2}{\pi \sin n\theta} w(0, \theta), \quad w_L = \frac{2}{\pi \sin n\theta} w(L, \theta), \\ N_x^o &= \frac{N_x(0, \theta)}{\cos n\theta}, \quad N_x^L = -\frac{N_x(L, \theta)}{\cos n\theta}, \\ M_x^o &= -\frac{\pi M_x(0, \theta)}{L \cos n\theta}, \quad M_x^L = \frac{\pi M_x(L, \theta)}{L \cos n\theta} \end{aligned}$$

따라서 모든 Fourier계수들 $A_{on}, A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, E_{on}, E_{mn}, F_{mn}$, 그리고 G_{mn} 은 셀의 양단($x=0$ 및 $z=H$), 또는 E 영역과 W 영역이 만나는 경계($x=L$ 및 $z=0$)의 값들로 나타난다. 고정-자유단을 갖는 셀의 경우에 셀의 양단에서의 값 v_o, w_o, N_x^o 및 M_x^o 이 영이 되어야 하며 덧붙여서 E 영역과 W 영역이 만나는 경계값들의 연속성이 유지되어야 하므로 경계조건식 식 (5~7)에 급수전개로 나타나는 변위들과 그 미분값들을 대입하고, 식 (22)~(25)의 Fourier 계수들 $A_{on}, A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, E_{on}, E_{mn}, F_{mn}$, 그리고 G_{mn} 을 대입하면 다음 12개의 식들을 얻을 수 있다. 식 (22)~(25)에서 사용된 계수들은 부록 II에 기술되어 있다.

$$\begin{aligned} N_x^o s_o e_{11} + N_x^L s_o e_{12} + M_x^o s_o e_{13} + M_x^L s_o e_{14} \\ + v_L e_{16} + w_L e_{18} = 0, \\ N_x^o s_o e_{13} + N_x^L s_o e_{14} + M_x^o s_o e_{33} + M_x^L s_o e_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + v_L e_{36} + w_L e_{38} = 0, \\ N_x^o y_o c_{16} + M_x^o y_o c_{36} + V_o c_{56} + V_H c_{55} \\ + W_o c_{58} + W_H c_{57} = 0, \\ N_x^o y_o c_{18} + M_x^o y_o c_{38} + V_o c_{58} + V_H c_{57} + W_o c_{78} \\ + W_H c_{77} = 0, \\ w_L = -W_o, \\ v_L = -V_o, \\ N_x^o s_o e_{12} + N_x^L s_o e_{11} + M_x^o s_o e_{14} + M_x^L s_o e_{13} \\ + v_L e_{15} + w_L e_{17} - (N_x^o y_o c_{11} + M_x^o y_o c_{13} + V_o c_{15} \\ + V_H c_{16} + W_o c_{17} + W_H c_{18}) = 0, \\ H(N_x^o s_o e_{14} + N_x^L s_o e_{13} + M_x^o s_o e_{34} + M_x^L s_o e_{33} \\ + v_L e_{35} + w_L e_{37}) \\ - L(N_x^o y_o c_{13} + M_x^o y_o c_{33} + V_o c_{35} + V_H c_{36} \\ + W_o c_{37} + W_H c_{38}) = 0, \\ H(N_x^o s_o e_{19} + N_x^L s_o e_{29} + M_x^o s_o e_{39} + M_x^L s_o e_{49} \\ + v_L e_{69} + w_L e_{89}) \\ - L(N_x^o y_o c_{19} + M_x^o y_o c_{39} + V_o c_{59} + V_H c_{69} \\ + W_o c_{79} + W_H c_{89}) = 0, \\ N_x^o s_o e_{18} + N_x^L s_o e_{17} + M_x^o s_o e_{38} + M_x^L s_o e_{37} \\ + v_L e_{57} + w_L e_{77} - (N_x^o y_o c_{17} + M_x^o y_o c_{37} + V_o c_{57} \\ + V_H c_{58} + W_o c_{77} + W_H c_{78}) = 0, \\ N_x^L = -N_x^o, \\ L M_x^L = -H N_x^o \end{aligned} \quad (26)$$

여기서, $s_o = -\frac{2R^2}{EhL}(1 - \mu^2)$, 그리고 $y_o = -\frac{2R^2}{EhL}(1 - \mu^2)$ 이다.

계수들 e_{ij} 및 $c_{ij}(i=1,2,\dots,8$ 그리고 $j=1,2,\dots,9)$ 는 부록 III에 기술되어 있다. 식 (26)은 식 (27)과 같이 8차 선형 제차방정식으로 간단하게 표현할 수 있다.

$$\{\lambda_{ij}\} [N_x^o s_o, N_x^L s_o, M_x^o s_o, M_x^L s_o, v_L, w_L, V_H, W_H]^T = \{0\} \quad (27)$$

행렬의 요소들 $\lambda_{ij}(i, j=1,2,\dots,8)$ 는 부록 IV에 기술되어 있다. 식 (27)이 자명한 해가 아닌 해(non-trivial solution)를 갖기 위하여 식 (27)의 행렬식은 영이 되어야 한다. 부분적으로 유체가 채워진 원통형 셀이 고정-자유단의 경계조건을 갖을 때, 셀의 고유진동수는 $\det[\lambda_{ij}] = 0$ 으로부터 구한다.

양단이 고정된 셀의 경우에는 셀 양단에서의 값 v_o, w_o, V_H 및 W_H 가 영이 되어야 하며 먼저의 경우와 마찬가지로 E 영역과 W 영역이 만나는 경계값들의 연속성이 유지되어야 하므로 경계조건식 (5), (6) 및 (7)에 급수전개로 나타나는 변위들과 그 미

분값들을 대입하고, 식 (22~25)의 Fourier 계수들 $A_{on}, A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, E_{on}, E_{mn}, F_{mn}$ 그리고 G_{mn} 을 대입하면 다음 12개의 식들을 얻을 수 있다.

3. 수치계산의 예

참고문헌 (1)과 (4)에서 예제로 제시된 유체로 채워진 셸들의 고유진동수들을 식 (27)과 식 (29)로부터 구하고 참고문헌의 값들과 비교하여 보았다. 이론식에서 급수전개항이 무한에 가까울수록 정밀한 계산이 되지만 급수전개항을 늘려가면 어느 정도부터는 일정한 값에 수렴하게 된다. 따라서 본 논문에서는 충분히 수렴하는 값을 얻을 수 있도록 급수전개항 m 을 400으로 정하여 정확한 계산을 하였다.

3.1 고정-자유단의 경계조건을 갖는 셸

참고문헌 (4)에서는 유체가 담긴 고정-자유단을 갖는 셸의 고유진동 해석을 Karadenitz 축대칭 유한요소법으로 수행하여 셸의 고유진동수를 구한 다음, 실험에서 구한 고유진동수와 비교하고 있다. 참고문헌 (4)에서 예제로 계산한 원통형 셸은 반경이

Table 1 Natural frequencies of partially liquid filled cylindrical shell with clamped-free boundary condition (Hz) (Maguire¹ [reference (4)] : finite element method using Karadenitz axisymmetric shell analysis program, Maguire² [reference (4)] : experiment) [60% liquid level, $R=76.54$ mm, $L+H=1.35$ m, $L=0.81$ m, $h=2.286$ mm, $E=200$ GPa, $\mu=0.3$, $\rho=7850$ kg/m³, $\rho_0=1000$ kg/m³]

m'	Method	Circumferential mode number (n)			
		1	2	3	4
1	Maguire ¹	71.5	197.1	492.4	985.9
	Maguire ²	-	-	-	-
	Theory	74.4	195.3	491.6	983.5
2	Maguire ¹	321.3	262.2	561.7	1,018.0
	Maguire ²	-	252.0	520.0	-
	Theory	319.8	261.9	557.5	1,015.8
3	Maguire ¹	817.0	386.5	698.0	1,088.0
	Maguire ²	-	361.6	-	-
	Theory	808.1	382.6	691.3	1,086.3
4	Maguire ¹	1,392.0	640.7	726.1	1,219.0
	Maguire ²	-	616.6	-	-
	Theory	1,387.7	639.4	725.3	1,205.3
5	Maguire ¹	1,944.0	943.9	817.8	1,370.0
	Maguire ²	-	-	795.9	-
	Theory	1,935.1	937.5	818.3	1,361.5

$$\begin{aligned}
 & N_x^o S_o e_{11} + N_x^L S_o e_{12} + M_x^o S_o e_{13} + M_x^L S_o e_{14} \\
 & + v_L e_{16} + w_L e_{18} = 0, \\
 & N_x^o S_o e_{13} + N_x^L S_o e_{14} + M_x^o S_o e_{33} + M_x^L S_o e_{34} \\
 & + v_L e_{36} + w_L e_{38} = 0, \\
 & N_z^o y_o c_{12} + N_z^H y_o c_{11} + M_z^o y_o c_{14} + M_z^H y_o c_{13} \\
 & + V_o c_{16} + W_o c_{18} = 0, \\
 & N_z^o y_o c_{14} + N_z^H y_o c_{13} + M_z^o y_o c_{34} + M_z^H y_o c_{33} \\
 & + V_o c_{36} + W_o c_{38} = 0, \\
 & w_L = -W_o, \\
 & v_L = -V_o, \\
 & N_x^o S_o e_{12} + N_x^L S_o e_{11} + M_x^o S_o e_{14} + M_x^L S_o e_{13} + v_L e_{15} \\
 & + w_L e_{17} - (N_z^o y_o c_{11} + N_z^H y_o c_{12} + M_z^o y_o c_{13} \\
 & + M_z^H y_o c_{14} + V_o c_{15} + W_o c_{17}) = 0, \\
 & H(N_x^o S_o e_{14} + N_x^L S_o e_{13} + M_x^o S_o e_{34} + M_x^L S_o e_{33} \\
 & + v_L e_{35} + w_L e_{37}) - L(N_z^o y_o c_{13} \\
 & + N_z^H y_o c_{14} + M_z^o y_o c_{33} \\
 & + M_z^H y_o c_{34} + V_o c_{35} + W_o c_{37}) = 0, \\
 & H(N_x^o S_o e_{19} + N_x^L S_o e_{29} + M_x^o S_o e_{39} + M_x^L S_o e_{49} \\
 & + v_L e_{69} + w_L e_{89}) - L(N_z^o y_o c_{19} \\
 & + N_z^H y_o c_{29} + M_z^o y_o c_{39} \\
 & + M_z^H y_o c_{49} + V_o c_{59} + W_o c_{79}) = 0, \\
 & N_x^o S_o e_{18} + N_x^L S_o e_{17} + M_x^o S_o e_{38} + M_x^L S_o e_{37} + v_L e_{57} \\
 & + w_L e_{77} - (N_z^o y_o c_{17} + N_z^H y_o c_{18} \\
 & + M_z^o y_o c_{37} + M_z^H y_o c_{38} \\
 & + V_o c_{57} + W_o c_{77}) = 0, \\
 & N_x^L = -N_z^o, \\
 & L M_x^L = -H N_z^o \tag{28}
 \end{aligned}$$

계수들 e_{ij} 및 c_{ij} ($i=1,2,\dots,8$ 그리고 $j=1,2,\dots,9$) 는 부록 III에 기술되어 있다. 식 (28)은 식 (29)와 같이 8차 선형 제차방정식으로 간단하게 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \{\lambda_{ij}\} [N_x^o S_o, N_x^L S_o, N_z^H S_o, M_x^o S_o, M_z^H S_o, v_L, w_L]^T \\
 & = \{0\} \tag{29}
 \end{aligned}$$

행렬의 요소들 λ_{ij} ($i, j=1,2,\dots,8$) 는 부록 IV에 기술되어 있다. 식 (29)가 자명한 해가 아닌 해를 갖기 위하여 식 (29)의 행렬식은 영이 되어야 한다. 부분적으로 유체가 채워진 원통형 셸의 양단이 고정되어 있을 때, 셸의 고유진동수는 $\det[\lambda_{ij}] = 0$ 으로부터 구한다.

0.07654 m 이고, 길이가 1.35 m 이며, 두께는 0.002286 m이다. 셸의 재질은 스테인레스강이고 탄성계수는 $200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, Poisson 비는 0.3, 밀도는 7850 kg/m^3 이다. 그리고 유체의 밀도는 1000 kg/m^3 이며 셸에 채워진 유체의 높이는 0.81 m이다. 이 셸에 대하여 본 논문에서 제시한 이론적인 방법을 이용하여 유체가 부분적으로 채워진 경우에 대해서 고유진동수를 구하고 Table 1에서 참고문헌 (4)의 값들과 비교하였다. Table 1에서 보는 바와 같이 고정-자유단을 갖는 셸에 대하여 본 논문에서 제시한 이

Table 2 Natural frequencies of partially liquid filled cylindrical shell with clamped-clamped boundary condition (Hz) (Yamaki [reference (1)]: Galerkin's method) [50% liquid level, $R=100.0 \text{ mm}$, $h=0.247 \text{ mm}$, $E=5.56 \text{ GPa}$, $\mu=0.3$, $\rho=1405 \text{ kg/m}^3$, $\rho_0=1000 \text{ kg/m}^3$, For case 500-a: $L+H=0.1138 \text{ m}$, $L=0.0569 \text{ m}$, For case 2000-1: $L+H=0.227 \text{ m}$, $L=0.1135 \text{ m}$]

m'	Method	Circumferential mode number (n)	
		11 (Case : 500-a)	8 (Case : 2000-1)
1	Yamaki Theory	125.4	58.78
		125.8	56.2
2	Yamaki Theory	300.0	145.5
		312.5	150.6
3	Yamaki Theory	518.5	268.3
		544.3	280.6
4	Yamaki Theory	716.3	387.4
		749.3	404.0
5	Yamaki Theory	856.7	478.5
		883.7	495.7
6	Yamaki Theory	1,022.0	548.0
		1,072.0	567.3
7	Yamaki Theory	1,272.0	640.3
		1,354.0	661.1
8	Yamaki Theory	1,548.0	735.4
		1,637.9	764.6
9	Yamaki Theory	1,728.0	858.8
		1,810.3	867.3
10	Yamaki Theory	2,056.0	1,062.0
		2,225.6	1,073.3
11	Yamaki Theory	2,411.0	1,545.0
		2,426.6	1,632.4

론적인 방법으로 구한 고유진동수가 참고문헌 (4)의 고유진동수와 거의 일치하고 있음을 볼 수 있다.

3.2 양단이 고정된 셸

참고문헌 (1)에서는 유체가 부분적으로 채워지고 양단이 고정된 셸의 고유진동 해석을 Galerkin 방법으로 수행하여 구한 셸의 고유진동수와 실험으로 얻은 고유진동수를 비교하였다. 참고문헌 (1)에서 제시하고 있는 원통형 셸은 반경이 100 mm이고, 길이가 113.8 mm (Case 500-a)와 227 mm (Case 2000-1)이며, 두께는 0.247 mm이다. 셸의 재질은 폴리에스터이고 탄성계수는 $5.56 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, Poisson 비는 0.3, 밀도는 1405 kg/m^3 이다. 그리고 유체의 밀도는 1000 kg/m^3 이며 셸에 채워진 유체의 높이는 셸 높이의 반이다. 참고문헌 (1)에서 예제로 제시된 유체가 부분적으로 채워진 셸에 대하여 본 논문에서 제시된 방법으로 고유진동수를 구하고 Table 2에서 비교하였다. Table 2에서 보는 바와 같이 양단 고정된 셸에 대해서도 본 논문에서 제시한 방법이 참고문헌 (1)의 고유진동수와 접근하고 있음을 알 수 있다.

4. 계산의 제한 및 결과의 고찰

4.1 계산이 제한

본 논문에서 제시한 이론적인 방법은 유체가 부분적으로 채워진 원통형 셸의 고유진동수를 계산하는데 매우 유용하게 사용될 수 있다. 그러나 본 계산 방법은 식 (22)와 식 (24)에 나타나나 바와 같이 $a_{21} = \Omega$ 인 경우에는 Fourier 계수 E_{0n} 이 무한대가 되기 때문에 $a_{21} \neq \Omega$ 이어야 하는 제한을 갖게 된다. 또한 부록 II에서의 계수값들이 무한대가 되지 않도록 Γ_{mn} 과 Δ_{mn} 이 영이 되어서는 안된다. 그러나 Γ_{mn} 이 영의 값을 갖거나 Δ_{mn} 이 영의 값을 갖는 경우는 극히 특수한 경우이기 때문에 일반적인 대부분의 경우에 이로 인하여 해를 얻을 수 없는 경우는 거의 없다. 또 하나의 특수한 경우를 생각할 수 있는데, 유체가 셸의 전체의 높이까지 채워진 경우, 즉 H 가 영이 되면 부록 III에서 δ 값이 무한대가 되어 계산할 수 없게 된다. 이 경우에는 참고문헌 (7)의 경우를 적용하면 전혀 문제없이 해결된다. 본 논문의 계산 방법은 유체 자유표면에서 유체의 운동을 무시하였기 때문에 중력의 영향으로 생기는 유체 표면에서의 유체 진동모우드, 즉 sloshing 모우드의 고유진동수를 구할 수 없다. 그러나 이 sloshing 모우드의 고유진동수는 셸의 진동모우드(bulging mode)에 해당하

는 고유진동수에 비하여 상대적으로 매우 작은 값을 갖고 있으며, ^(1,2) Table 2에서 보는 바와 같이 sloshing 모우드를 고려한 Yamaki의 셸 고유진동수의 값과 sloshing 모우드를 고려하지 않은 본 논문의 이론치 셸 고유진동수 값에 큰 차이가 없다.

4.2 결과의 고찰

Table 1과 Table 2에서 보는 바와 같이 참고문헌 (1)과 (4)의 결과와 본 논문에서 제시한 방법으로 구한 이론값에는 약간의 차이가 있는데, 이는 다음의 이유들 때문에 생길 수 있다. 첫째, 참고문헌 (1)에서는 sloshing 모드를 고려하였으나 본 논문에서는 유체의 sloshing 모드를 고려하지 않았다. 둘째, 본 논문의 수식에서는 Bessel 함수를 계산하게 되는데, Bessel 함수의 정확한 값을 계산할 수 없으므로 참고문헌 (11)에서 제시한 근사치 계산법을 사용하므로써 생길 수 있는 오차가 있다. 특히 이 근사치 Bessel 함수의 값은 Bessel 함수의 값이 커질 수록 더 큰 오차를 포함하게 된다. 셋째, 참고문헌 (1)과 (4)의 계산값도 근사해법이므로 어느 정도 참값과의 오차를 포함하고 있을 수 있다. 그러나 Table 1과 Table 2에서 보는 바와 같이, 본 논문에서 제시한 방법은 공학적으로 유용하게 적용될 수 있다. 또한 단순지지와 같은 여러가지 경계조건을 갖는 셸의 경우에도 본 논문에서 제시한 방법을 조금만 응용하면 손쉽게 정확한 고유진동수를 구할 수 있다.

5. 결 론

참고문헌 (8)에서 제시한 Stokes 변환과 Fourier 급수전개를 이용하여 유체가 부분적으로 담긴 셸의 고유진동의 이론적 해석 방법을 제시하였다. 기존의 Galerkin 방법⁽¹⁾과 Rayleigh's quotient를 이용한 방법에서는 수식을 전개할 때, 셸의 축방향 진동모우드와 유체의 축방향 속도포텐셜이 일치하지 못하므로 셸의 축방향 구간에 대한 적분을 수행하여 근사치를 구하고 있지만, 본 논문에서는 실제 진동현상과 일치하도록 유체와 셸이 접하는 곳에서 셸의 축방향 진동모우드와 유체의 축방향 운동모우드가 동일하게 수식을 전개하여 셸의 축방향 구간에 대한 적분을 수행하지 않고 미지의 Fourier 계수들을 선형 제차 방정식으로 나타내어 좀 더 정확한 수식을 유도하였다. 또한 예제를 통하여 유체가 부분적으로 채워진 셸에 대하여 고정-자유단의 경계조건을 갖는

셸과 양단이 고정된 셸의 고유진동수들을 구하고 참고문헌들에서 제시하고 있는 Galerkin 방법, 유한요소법 그리고 실험을 통해서 구한 값들과 비교해 보았다. 그 결과 참고문헌들의 고유진동수와 거의 일치하는 값을 얻을 수 있었으며, 본 논문에서 제시한 이론적 해석 방법을 적용하면 유체가 담긴 셸의 고유진동수를 충분히 정확하게 계산할 수 있다는 확신을 얻었다.

참 고 문 헌

- (1) N. Yamaki, J. Tani, and Y. Yamaji, 1984, "Free Vibration of a Clamped-Clamped Circular Cylindrical Shell Partially Filled with Liquid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 94, No. 4, pp. 531~550.
- (2) R. K. Gupta, and G. L. Hutchinson, 1988, "Free Vibration Analysis of Liquid Storage Tanks," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 122, No. 3, pp. 491~506.
- (3) A. A. Lakis, and M. Sinno, 1992, "Free Vibration of Axisymmetric and Beam-Like Cylindrical Shells, Partially Filled with Liquid," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 235~268.
- (4) J. R. Maguire, 1991, "A Study of Cylindrical Shell Vibrations in Fluid," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Flow Induced Vibrations, International Conference, IMechE 1991-6*.
- (5) T. Mikami, and J. Yoshimura, 1992, "The Collocation Method for Analyzing Free Vibration of Shells of Revolution with Either Internal or External Fluids," *Computers and Structures*, Vol. 44(1/2), pp. 343~351.
- (6) Y. Y. Huang, S. K. Wang and W. M. Cheng, 1988, "Fluid-Structure Coupling Boundary Element Method for Analyzing Free Vibration of Axisymmetric Thick-Walled Tanks," *Boundary Element X, Volume 1; Mathematical and Computational Aspects*, Editor; C. A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag.
- (7) 정경훈, 이성철, 1994, Fourier 급수전개를 이용한 유체로 가득 채워진 원통형 셸의 자유진동

해석, 소음진동공학회지, Vol. 4, No. 2, p. 137

- (8) H. Chung, 1981, "Free Vibration Analysis of Circular Cylindrical Shells," Journal of Sound and Vibration, Vol. 74, No. 3, pp. 331~350.
- (9) Stefan Markus, 1988, "The Mechanics of Vibrations of Cylindrical Shells," Elsevier Science Publishing Company, Inc.
- (10) Y. Y. Huang, 1991, "Orthogonality of Wet Modes in Coupled Vibrations of Cylindrical Shells Containing Liquids," Journal of Sound and Vibration, Vol. 145, No. 1, pp. 51~60.
- (11) W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, 1986, Numerical Recipes — The Art of Scientific Computing, Chapter 6.5, Cambridge University Press.

부록 I : 모우드함수와 그 미분치들

유체가 채워지지 않은 셸 영역 (E영역)에서

$$U(z, \theta) = \left[E_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} E_{mn} \cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \right] \cos n\theta, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$U_{,z}(z, \theta) = -\left(\frac{\pi}{H}\right) \left[\sum_{m=1}^{\infty} E_{mn} m \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \right] \cos n\theta, \quad 0 < z < H$$

$$U_{,z}(z, \theta) = -\left(\frac{\pi^2}{2H}\right) \tilde{U}_0 \cos n\theta$$

$$U_{,z}(H, \theta) = -\left(\frac{\pi^2}{2H}\right) \tilde{U}_H \cos n\theta$$

$$U_{,zz}(z, \theta) = -\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \left[\frac{\tilde{U}_0 + \tilde{U}_H}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{ \tilde{U}_0 + \tilde{U}_H (-1)^m - m^2 E_{mn} \} \cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \right] \cos n\theta, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$V(z, \theta) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} F_{mn} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \right] \sin n\theta, \quad 0 < z < H$$

$$V(0, \theta) = -\left(\frac{\pi}{2}\right) V_0 \sin n\theta$$

$$V(H, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}\right) V_H \sin n\theta$$

$$V_{,z}(z, \theta) = \left(\frac{\pi}{H}\right) \left[\frac{V_0 + V_H}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{ V_0 + V_H (-1)^m + m F_{mn} \} \cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \right] \sin n\theta, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$V_{,zz}(z, \theta) = -\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \{ V_0 m + V_H m (-1)^m + m^2 F_{mn} \} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \right] \sin n\theta, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$V_{,zz}(0, \theta) = -\left(\frac{\pi^3}{2H^2}\right) \tilde{V}_0 \sin n\theta,$$

$$V_{,zz}(H, \theta) = \left(\frac{\pi^3}{2H^2}\right) \tilde{V}_H \sin n\theta,$$

$$W(z, \theta) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} G_{mn} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \right] \cos n\theta, \quad 0 < z < H$$

$$W(0, \theta) = -\left(\frac{\pi}{2}\right) W_0 \cos n\theta,$$

$$W(H, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}\right) W_H \cos n\theta,$$

$$W_{,z}(z, \theta) = \left(\frac{\pi}{H}\right) \left[\frac{W_0 + W_H}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{ W_0 + W_H (-1)^m + m G_{mn} \} \cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \right] \cos n\theta, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$W_{,zz}(z, \theta) = -\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \{ W_0 m + W_H m (-1)^m + m G_{mn} \} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \right] \cos n\theta, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$W_{,zz}(0, \theta) = -\left(\frac{\pi^3}{2H^2}\right) \tilde{W}_0 \cos n\theta,$$

$$W_{,zz}(H, \theta) = -\left(\frac{\pi^3}{2H^2}\right) \tilde{W}_H \cos n\theta,$$

$$W_{,zzz}(z, \theta) = \left(\frac{\pi}{H}\right)^3 \left[\frac{W_0 + W_H}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{ W_0 + W_H (-1)^m - W_0 m^2 + W_H m^2 (-1)^m - m^3 G_{mn} \} \cos\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \right] \cos n\theta, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$W_{,zzzz}(z, \theta) = \left(\frac{\pi}{H}\right)^4 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \{ -W_0 m - W_H m (-1)^m + W_0 m^3 + W_H m^3 (-1)^m + m^4 G_{mn} \} \sin\left(\frac{m\pi z}{H}\right) \right] \cos n\theta, \quad 0 \leq z \leq H$$

$$W_{,zzzz}(0, \theta) = \tilde{W}_0 \cos n\theta,$$

$$W_{,zzzz}(H, \theta) = \tilde{W}_H \cos n\theta$$

유체로 채워진 셸 영역 (W영역)에서

$$u(x, \theta) = \left[A_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \cos n\theta, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$u_{,x}(x, \theta) = -\left(\frac{\pi}{L}\right) \left[\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \cos n\theta, \quad 0 < x < L$$

$$u_{,x}(x, \theta) = -\left(\frac{\pi^2}{2L}\right) \tilde{u}_0 \cos n\theta,$$

$$u_{,x}(L, \theta) = \left(\frac{\pi^2}{2L}\right) \tilde{u}_L \cos n\theta,$$

$$u_{,xx}(x, \theta) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[\frac{\tilde{u}_0 + \tilde{u}_L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{ \tilde{u}_0 + \tilde{u}_L (-1)^m - m^2 A_{mn} \} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \cos n\theta, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$v(x, \theta) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \sin n\theta, \quad 0 < x < L$$

$$\begin{aligned}
 v(0, \theta) &= -\left(\frac{\pi}{2}\right)v_0 \sin n\theta, \\
 v(L, \theta) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)v_L \sin n\theta, \\
 v_{,x}(x, \theta) &= \left(\frac{\pi}{L}\right)\left[\frac{v_0+v_L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\{v_0+v_L(-1)^m + m B_{mn}\} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] \sin n\theta, \quad 0 \leq x \leq L \\
 v_{,xx}(x, \theta) &= -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left[\sum_{m=1}^{\infty}\{v_0 m + v_L m(-1)^m + m^2 B_{mn}\} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] \sin n\theta, \quad 0 < x < L \\
 v_{,xx}(0, \theta) &= -\left(\frac{\pi^3}{2L^2}\right)\tilde{v}_0 \sin n\theta, \\
 v_{,xx}(L, \theta) &= \left(\frac{\pi^3}{2L^2}\right)\tilde{v}_L \sin n\theta, \\
 w(x, \theta) &= \left[\sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] \cos n\theta, \quad 0 < x < L \\
 w(0, \theta) &= -\left(\frac{\pi}{2}\right)w_0 \cos n\theta, \\
 w(L, \theta) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)w_L \cos n\theta, \\
 w_{,x}(x, \theta) &= \left(\frac{\pi}{L}\right)\left[\frac{w_0+w_L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\{w_0+w_L(-1)^m + m C_{mn}\} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] \cos n\theta, \quad 0 < x < L \\
 w_{,xx}(x, \theta) &= -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left[\sum_{m=1}^{\infty}\{w_0 m + w_L m(-1)^m + m^2 C_{mn}\} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] \cos n\theta, \quad 0 < x < L \\
 w_{,xx}(0, \theta) &= -\left(\frac{\pi^3}{2L^2}\right)\tilde{w}_0 \cos n\theta, \\
 w_{,xx}(L, \theta) &= \left(\frac{\pi^3}{2L^2}\right)\tilde{w}_L \cos n\theta, \\
 w_{,xxx}(x, \theta) &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^3\left[\frac{w_0+w_L}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\{\tilde{w}_0 + \tilde{w}_L(-1)^m - \tilde{w}_0 m^2 - \tilde{w}_L m^2(-1)^m - m^3 C_{mn}\} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] \cos n\theta, \quad 0 \leq x \leq L \\
 w_{,xxxx}(x, \theta) &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^4\left[\sum_{m=1}^{\infty}\{-\tilde{w}_0 m - \tilde{w}_L m(-1)^m + \tilde{w}_0 m^3 + \tilde{w}_L m^3(-1)^m + m^4 C_{mn}\} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] \cos n\theta, \quad 0 \leq x \leq L \\
 w_{,xxxx}(0, \theta) &= \tilde{\tilde{w}}_0 \cos n\theta, \\
 w_{,xxxx}(L, \theta) &= \tilde{\tilde{w}}_L \cos n\theta
 \end{aligned}$$

부록 II : 부록 III 과 수식 (22)~(28)에 나타난 계수들

유체가 채워지지 않은 셀 영역(E영역)에 대하여

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \left[\frac{\pi R}{H}\right]^2, \quad b_3 = -\left[\frac{\pi R}{H}\right] \left[\frac{1+\mu}{2} - \frac{3(1-\mu)}{8} k\right] n, \\
 b_4 &= -\left[\frac{\pi R}{H}\right] \left[\mu - \frac{1+\mu}{2} kn^2\right], \\
 b_5 &= \left[\frac{\pi R}{H}\right]^2 \left[\frac{1-\mu}{2}\right] \left[1 + \frac{9}{4} k\right], \\
 b_7 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi R}{H}\right]^2 (3-\mu) kn, \\
 b_9 &= \left[\frac{\pi R}{H}\right]^4 k, \quad b_{10} = 2 \left[\frac{\pi R}{H}\right]^2 kn^2, \\
 g_1 &= \left[\frac{\pi R}{H}\right] \left[\frac{1-\mu}{2}\right] \left[1 - \frac{3}{4} k\right] n, \quad g_2 = -b_5, \\
 g_3 &= -\left[\frac{\pi R}{H}\right]^2 \left[\frac{3(1-\mu)}{2}\right] kn, \\
 g_4 &= -\left[\frac{\pi R}{H}\right] \left[\frac{1-\mu}{2}\right] kn^2, \\
 g_5 &= -b_7, \quad g_6 = -(b_9 m^2 + g_{12}), \quad g_{12} = \left[\frac{\pi R}{H}\right]^2 (2-\mu) k n^2, \\
 g_{13} &= g_{23} n, \quad g_{23} = -\left[\frac{\pi R}{H}\right]^2 \mu k n, \\
 g_{18} &= 2 \left[\frac{\pi R}{H}\right]^2 (1-\mu) k n^2, \quad r_{11} = b_1 m^2 + a_2, \\
 r_{12} &= b_3 m, \quad r_{13} = b_4 m, \quad r_{22} = b_5 m^2 + a_6, \\
 r_{23} &= b_7 m^2 + a_8, \quad r_{33} = b_9 m^4 + b_{10} m^2 + a_{11}, \\
 d_\alpha &= \frac{(r_{22} r_{33} - r_{23}^2)}{\Gamma_{mn}}, \quad d_\beta = \frac{(r_{13} r_{23} - r_{12} r_{33})}{\Gamma_{mn}}, \\
 d_r &= \frac{(r_{12} r_{23} - r_{13} r_{22})}{\Gamma_{mn}}, \quad e_\beta = \frac{(r_{11} r_{33} - r_{13}^2)}{\Gamma_{mn}}, \\
 e_r &= \frac{(r_{12} r_{13} - r_{11} r_{23})}{\Gamma_{mn}}, \quad f_r = \frac{(r_{11} r_{22} - r_{12}^2)}{\Gamma_{mn}}, \\
 \Gamma_{mn} &= \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{vmatrix}, \quad \Gamma_{mn} \neq 0
 \end{aligned}$$

유체로 채워진 셀 영역(W영역)에 대하여

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \left[\frac{\pi R}{L}\right]^2, \quad a_{21} = \frac{1}{2} (1-\mu) \left(1 + \frac{k}{4}\right) n^2, \quad a_2 = a_{21} - \Omega, \\
 a_3 &= -\left[\frac{\pi R}{L}\right] \left[\frac{1+\mu}{2} - \frac{3(1-\mu)}{8} k\right] n, \\
 a_4 &= -\left[\frac{\pi R}{L}\right] \left[\mu - \frac{1-\mu}{2} kn^2\right], \\
 a_5 &= \left[\frac{\pi R}{L}\right]^2 \left[\frac{1-\mu}{2}\right] \left[1 + \frac{9}{4} k\right], \\
 a_{61} &= (1+k) n^2, \quad a_6 = a_{61} - \Omega, \quad a_7 = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi R}{L}\right]^2 (3-\mu) kn, \\
 a_{81} &= (1+kn^2) n, \quad a_9 = \left[\frac{\pi R}{L}\right]^4 k, \\
 a_{10} &= 2 \left[\frac{\pi R}{L}\right]^2 kn^2, \quad a_{11} = 1 + kn^4 - \Omega, \\
 a_{12} &= 1 + kn^4, \quad q_1 = \left[\frac{\pi R}{L}\right] \left[\frac{1-\mu}{2}\right] \left[1 - \frac{3}{4} k\right] n,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_2 &= -a_5, \quad q_3 = -\left[\frac{\pi R}{L}\right]^2 \left[\frac{3(1-\mu)}{2}\right] k n, \\
 q_4 &= -\left[\frac{\pi R}{L}\right] \left[\frac{1-\mu}{2}\right] k n^2, \quad q_5 = -a_7, \\
 q_6 &= -(a_9 m^2 + q_{12}), \quad q_{12} = \left[\frac{\pi R}{L}\right]^2 (2-\mu) k n^2, \\
 q_{13} &= q_{23} n, \quad q_{23} = -\left[\frac{\pi R}{L}\right]^2 \mu k n, \\
 q_{18} &= 2\left[\frac{\pi R}{L}\right]^2 (1-\mu) k n^2, \quad s_{11} = a_1 m^2 + a_2, \\
 s_{12} &= a_3 m, \quad s_{13} = a_4 m, \quad s_{22} = a_5 m^2 + a_6, \\
 s_{23} &= a_7 m^2 + a_8, \quad s_{33} = a_9 m^4 + a_{10} m^2 + a_{11} - Z_{mn} \Omega, \\
 Z_{mn} &= \frac{\rho_o Ri \operatorname{In}\left(\frac{m\pi Ri}{L}\right)}{\rho h \left[\left(\frac{m\pi Ri}{L}\right) I_{n-1}\left(\frac{m\pi Ri}{L}\right) - n \operatorname{In}\left(\frac{m\pi Ri}{L}\right) \right]}, \\
 a_\alpha &= \frac{(S_{22}S_{33} - S_{23}^2)}{\Delta_{mn}}, \quad a_\beta = \frac{(S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33})}{\Delta_{mn}}, \\
 a_\gamma &= \frac{(S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22})}{\Delta_{mn}}, \quad b_\beta = \frac{(S_{11}S_{33} - S_{13}^2)}{\Delta_{mn}}, \\
 b_\gamma &= \frac{(S_{12}S_{13} - S_{11}S_{23})}{\Delta_{mn}}, \quad c_\gamma = \frac{(S_{11}S_{22} - S_{12}^2)}{\Delta_{mn}}, \\
 \Delta_{mn} &= \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{mn} \neq 0
 \end{aligned}$$

부록 III : 고유진동수 행렬식의 요소에 사용된 계수값들

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{1}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_\alpha, \quad e_{12} = \frac{1}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_\alpha (-1)^m, \\
 e_{13} &= \sum_{m=1}^{\infty} a_\gamma m, \quad e_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} a_\gamma m (-1)^m, \\
 e_{15} &= \frac{q_1}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} [q_1 a_\alpha + q_2 a_\beta m + q_3 a_\gamma m], \\
 e_{16} &= \frac{q_1}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} [q_1 a_\alpha + q_2 a_\beta m + q_3 a_\gamma m] (-1)^m, \\
 e_{17} &= \frac{q_4}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} [q_4 a_\alpha + q_5 a_\beta m + q_6 a_\gamma m], \\
 e_{18} &= \frac{q_4}{2a_2} + \sum_{m=1}^{\infty} [q_4 a_\alpha + q_5 a_\beta m + q_6 a_\gamma m] (-1)^m, \\
 e_{19} &= \sum_{m=1}^{\infty} a_\beta m (-1)^m, \quad e_{29} = \sum_{m=1}^{\infty} a_\beta m, \\
 e_{33} &= \sum_{m=1}^{\infty} c_\gamma m^2, \quad e_{34} = \sum_{m=1}^{\infty} c_\gamma m^2 (-1)^m, \\
 e_{35} &= \sum_{m=1}^{\infty} [q_1 a_\gamma m + q_2 b_\gamma m^2 + q_3 c_\gamma m^2], \\
 e_{36} &= \sum_{m=1}^{\infty} [q_1 a_\gamma m + q_2 b_\gamma m^2 + q_3 c_\gamma m^2] (-1)^m, \\
 e_{37} &= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [q_4 a_\gamma m + q_5 b_\gamma m^2 + q_6 c_\gamma m^2 + 1],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{38} &= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [q_4 a_\gamma m + q_5 b_\gamma m^2 + q_6 c_\gamma m^2 + 1] (-1)^m, \\
 e_{39} &= \sum_{m=1}^{\infty} b_\gamma m^2 (-1)^m, \quad e_{49} = \sum_{m=1}^{\infty} b_\gamma m^2, \\
 e_{57} &= \frac{q_1 q_4}{2a_2} + \frac{q_3}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{q_4 (q_1 a_\alpha + q_2 a_\beta m + q_3 a_\gamma m) \\
 &\quad + q_5 (q_1 a_\beta m + q_2 b_\beta m^2 + q_3 b_\gamma m^2) \\
 &\quad + q_6 (q_1 a_\gamma m + q_2 b_\gamma m^2 + q_3 c_\gamma m^2) + q_3\}, \\
 e_{69} &= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [q_1 a_\beta m + q_2 b_\beta m^2 + q_3 b_\gamma m^2 + 1], \\
 e_{77} &= \frac{q_1^2}{2a_2} - \frac{q_{18}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{q_4 (q_4 a_\alpha + q_5 a_\beta m + q_6 a_\gamma m) \\
 &\quad + q_5 (q_4 a_\beta m + q_5 b_\beta m^2 + q_6 b_\gamma m^2) \\
 &\quad + q_6 (q_4 a_\gamma m + q_5 b_\gamma m^2 + q_6 c_\gamma m^2) - a_9 m^2 - q_{18}\}, \\
 e_{89} &= \sum_{m=1}^{\infty} [q_4 a_\beta m + q_5 b_\beta m^2 + q_6 b_\gamma m^2], \\
 c_{11} &= \frac{1}{2b_2} + \sum_{m=1}^{\infty} d_\alpha, \quad c_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} d_\gamma m, \\
 c_{15} &= \frac{g_1}{2b_2} + \sum_{m=1}^{\infty} [g_1 d_\alpha + g_2 d_\beta m + g_3 d_\gamma m], \\
 c_{16} &= \frac{g_1}{2b_2} + \sum_{m=1}^{\infty} [g_1 d_\alpha + g_2 d_\beta m + g_3 d_\gamma m] (-1)^m, \\
 c_{17} &= \frac{g_4}{2b_2} + \sum_{m=1}^{\infty} [g_4 d_\alpha + g_5 d_\beta m + g_6 d_\gamma m], \\
 c_{18} &= \frac{g_4}{2b_2} + \sum_{m=1}^{\infty} [g_4 d_\alpha + g_5 d_\beta m + g_6 d_\gamma m] (-1)^m, \\
 c_{19} &= \sum_{m=1}^{\infty} d_\beta m (-1)^m, \quad c_{33} = \sum_{m=1}^{\infty} f_\gamma m^2, \\
 c_{35} &= \sum_{m=1}^{\infty} [g_1 d_\gamma m + g_2 e_\gamma m^2 + g_3 f_\gamma m^2], \\
 c_{36} &= \sum_{m=1}^{\infty} [g_1 d_\gamma m + g_2 e_\gamma m^2 + g_3 f_\gamma m^2] (-1)^m, \\
 c_{37} &= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [g_4 d_\gamma m + g_5 e_\gamma m^2 + g_6 f_\gamma m^2 + 1], \\
 c_{37} &= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [g_4 d_\gamma m + g_5 e_\gamma m^2 + g_6 f_\gamma m^2 + 1] (-1)^m, \\
 c_{38} &= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [g_4 d_\gamma m + g_5 e_\gamma m^2 + g_6 f_\gamma m^2 + 1] (-1)^m, \\
 c_{39} &= \sum_{m=1}^{\infty} e_\gamma m^2, \\
 c_{55} &= \frac{g_1^2}{2b_2} + \frac{g_2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [g_1^2 d_\alpha + g_2^2 e_\beta m^2 + g_3^2 f_\gamma m^2 \\
 &\quad + 2g_1 g_2 d_\beta m + 2g_2 g_3 e_\gamma m^2 + 2g_1 g_3 d_\gamma m + g_2], \\
 c_{56} &= \frac{g_1^2}{2b_2} + \frac{g_2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [g_1^2 d_\alpha + g_2^2 e_\beta m^2 + g_3^2 f_\gamma m^2 \\
 &\quad + 2g_1 g_2 d_\beta m + 2g_2 g_3 e_\gamma m^2 + 2g_1 g_3 d_\gamma m \\
 &\quad + g_2] (-1)^m, \\
 c_{57} &= \frac{g_1 g_4}{2b_2} + \frac{g_3}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{g_4 (g_1 d_\alpha + g_2 d_\beta m + g_3 d_\gamma m) \\
 &\quad + g_5 (g_1 d_\beta m + g_2 e_\beta m^2 + g_3 e_\gamma m^2) \\
 &\quad + g_6 (g_1 d_\gamma m + g_2 e_\gamma m^2 + g_3 f_\gamma m^2) + g_3\},
 \end{aligned}$$

$$c_{58} = \frac{g_1 g_4}{2b_2} + \frac{g_3}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{g_4(g_1 d_\alpha + g_2 d_\beta m + g_3 d_\gamma m) + g_5(g_1 d_\beta m + g_2 e_\beta m^2 + g_3 e_\gamma m^2) + g_6(g_1 d_\gamma m + g_2 e_\gamma m^2 + g_3 f_\gamma m^2) + g_3\} (-1)^m,$$

$$c_{59} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [g_1 d_\beta m + g_2 e_\beta m^2 + g_3 e_\gamma m^2 + 1],$$

$$c_{69} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [g_1 d_\beta m + g_2 e_\beta m^2 + g_3 e_\gamma m^2 + 1] (-1)^m,$$

$$c_{77} = \frac{g_4^2}{2b_2} - \frac{g_{18}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{g_4(g_4 d_\alpha + g_5 d_\beta m + g_6 d_\gamma m) + g_5(g_4 d_\beta m + g_5 e_\beta m^2 + g_6 e_\gamma m^2) + g_6(g_4 d_\gamma m + g_5 e_\gamma m^2 + g_6 f_\gamma m^2) - b_9 m^2 - g_{18}\},$$

$$c_{78} = \frac{g_4^2}{2b_2} - \frac{g_{18}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{g_4(g_4 d_\alpha + g_5 d_\beta m + g_6 d_\gamma m) + g_5(g_4 d_\beta m + g_5 e_\beta m^2 + g_6 e_\gamma m^2) + g_6(g_4 d_\gamma m + g_5 e_\gamma m^2 + g_6 f_\gamma m^2) - b_9 m^2 - g_{18}\} (-1)^m,$$

$$c_{79} = \sum_{m=1}^{\infty} [g_4 d_\beta m + g_5 e_\beta m^2 + g_6 e_\gamma m^2],$$

$$c_{89} = \sum_{m=1}^{\infty} [g_4 d_\beta m + g_5 e_\beta m^2 + g_6 e_\gamma m^2] (-1)^m,$$

$$\delta = (L/H)$$

부록 IV : 고유진동수 행렬식의 요소들

고정-자유단을 갖는 셀

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= e_{11}, \lambda_{12} = e_{12}, \lambda_{13} = e_{13}, \lambda_{14} = e_{14}, \lambda_{15} = e_{16}, \\ \lambda_{16} &= e_{18}, \lambda_{17} = \lambda_{18} = \text{zero}; \\ \lambda_{21} &= e_{13}, \lambda_{22} = e_{14}, \lambda_{23} = e_{33}, \lambda_{24} = e_{34}, \\ \lambda_{25} &= e_{36}, \lambda_{26} = e_{38}, \lambda_{27} = \lambda_{28} = \text{zero}; \\ \lambda_{31} &= \lambda_{33} = \text{zero}, \lambda_{32} = \delta C_{16}, \lambda_{34} = \delta^2 C_{36}, \lambda_{35} = C_{56}, \\ \lambda_{36} &= C_{58}, \lambda_{37} = -C_{55}, \lambda_{38} = -C_{57}; \\ \lambda_{41} &= \lambda_{43} = \text{zero}, \lambda_{42} = \delta C_{18}, \lambda_{44} = \delta^2 C_{38}, \lambda_{45} = C_{58}, \\ \lambda_{46} &= C_{78}, \lambda_{47} = -C_{57}, \lambda_{48} = -C_{77}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{51} &= e_{12}, \lambda_{52} = e_{11} + \delta C_{11}, \lambda_{53} = e_{14}, \lambda_{54} = e_{13} + \delta^2 C_{13}, \\ \lambda_{55} &= e_{15} + C_{15}, \lambda_{56} = e_{17} + C_{17}, \lambda_{57} = -C_{16}, \lambda_{58} = -C_{18}; \\ \lambda_{61} &= e_{14}, \lambda_{62} = e_{13} + \delta^2 C_{13}, \lambda_{63} = e_{34}, \lambda_{64} = e_{33} + \delta^3 C_{33}, \\ \lambda_{65} &= e_{35} + \delta C_{35}, \lambda_{66} = e_{37} + \delta C_{37}, \lambda_{67} = -\delta C_{36}, \\ \lambda_{68} &= -\delta C_{38}; \\ \lambda_{71} &= e_{19}, \lambda_{72} = e_{29} + \delta^2 C_{19}, \lambda_{73} = e_{39}, \lambda_{74} = e_{49} + \delta^3 C_{39}, \\ \lambda_{75} &= e_{69} + \delta C_{59}, \lambda_{76} = e_{89} + \delta C_{79}, \lambda_{77} = -\delta C_{69}, \\ \lambda_{78} &= -\delta C_{89}; \\ \lambda_{81} &= e_{18}, \lambda_{82} = e_{17} + \delta C_{17}, \lambda_{83} = e_{38}, \lambda_{84} = e_{37} + \delta^2 C_{37}, \\ \lambda_{85} &= e_{57} + C_{57}, \lambda_{86} = e_{77} + C_{77}, \lambda_{87} = -C_{58}, \lambda_{88} = -C_{78}. \end{aligned}$$

양단이 고정된 셀

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= e_{11}, \lambda_{12} = e_{12}, \lambda_{14} = e_{13}, \lambda_{15} = e_{14}, \lambda_{17} = e_{16}, \\ \lambda_{18} &= e_{18}, \lambda_{13} = \lambda_{16} = \text{zero}; \\ \lambda_{21} &= e_{13}, \lambda_{22} = e_{14}, \lambda_{24} = e_{33}, \lambda_{25} = e_{34}, \lambda_{27} = e_{36}, \\ \lambda_{28} &= e_{38}, \lambda_{23} = \lambda_{26} = \text{zero}; \\ \lambda_{31} &= \lambda_{34} = \text{zero}, \lambda_{32} = \delta C_{12}, \lambda_{33} = -\delta C_{11}, \lambda_{35} = \delta^2 C_{14}, \\ \lambda_{36} &= -\delta C_{13}, \lambda_{37} = C_{16}, \lambda_{38} = C_{18}; \\ \lambda_{41} &= \lambda_{44} = \text{zero}, \lambda_{42} = \delta C_{14}, \lambda_{43} = -\delta C_{13}, \lambda_{45} = \delta^2 C_{38}, \\ \lambda_{46} &= -\delta C_{33}, \lambda_{47} = C_{36}, \lambda_{48} = -C_{38}; \\ \lambda_{51} &= e_{12}, \lambda_{52} = e_{11} + \delta C_{11}, \lambda_{53} = -\delta e_{12}, \lambda_{54} = e_{14}, \\ \lambda_{55} &= e_{13} + \delta^2 C_{13}, \lambda_{56} = -\delta C_{14}, \lambda_{57} = e_{15} + C_{15}, \\ \lambda_{58} &= e_{17} + C_{17}; \\ \lambda_{61} &= e_{14}, \lambda_{62} = e_{13} + \delta^2 C_{13}, \lambda_{63} = -\delta^2 e_{14}, \lambda_{64} = e_{34}, \\ \lambda_{65} &= e_{33} + \delta^3 C_{33}, \lambda_{66} = -\delta^2 C_{34}, \lambda_{67} = e_{35} + \delta C_{35}, \\ \lambda_{68} &= e_{37} + \delta C_{37}; \\ \lambda_{71} &= e_{19}, \lambda_{72} = e_{29} + \delta^2 C_{19}, \lambda_{73} = -\delta^2 C_{29}, \lambda_{74} = e_{39}, \\ \lambda_{75} &= e_{49} + \delta^3 C_{39}, \lambda_{76} = -\delta^2 C_{49}, \lambda_{77} = e_{69} + \delta C_{59}, \\ \lambda_{78} &= e_{89} + \delta C_{79}; \\ \lambda_{81} &= e_{18}, \lambda_{82} = e_{17} + \delta C_{17}, \lambda_{83} = -\delta C_{18}, \lambda_{84} = e_{38}, \\ \lambda_{85} &= e_{37} + \delta^2 C_{37}, \lambda_{86} = -\delta C_{38}, \lambda_{87} = e_{57} + C_{57}, \\ \lambda_{88} &= e_{77} + C_{77}. \end{aligned}$$