

## 스피어 기어의 밀폐단조에 관한 상계해석

최재찬\*, 허관도\*\*, 김창호\*\*\*, 최종웅\*\*\*

### An Upper Bound Analysis for Closed-Die Forging of Spur Gear Forms

J. C. Choi\*, K. D. Hur\*\*, C. H. Kim\*\*\*, J. U. Choi\*\*\*

#### ABSTRACT

A kinematically admissible velocity field for the numerical analysis of closed-die forging process of spur gear is proposed. The velocity field is divided into three regions of deformation. In the analysis, the involute curve is approximated to be straight line and the upper-bound method is used to calculate energy dissipation rate. A constant frictional factor has been assumed on the contacting surfaces. The effects of root diameter, number of teeth, and friction factor are determined on the relative forging pressure. The frictionless relative pressure is independent of root diameter for the same number of teeth, but increases with the number of teeth on a given root diameter. In the presence of friction, the relative forging pressure increasing root diameter at the start of forging, but decreases with increasing root diameter in the processing of forging.

**Key Words** : Spur Gear Forging(스피어 기어 단조), Velocity Field(속도장), Upper Bound Method(상계법).

#### 기호설명

$r, \theta, z$  : 중심 B의 원통좌표계  
 $D_{rt}, r_{rt}$  : 이뿌리원의 직경과 반경  
 $\dot{E}_p$  : 내부에너지 소비율  
 $M$  : 모틀  
 $N$  : 기어의 잇수  
 $r_{od}$  : 이끝원 반경  
 $t_0$  : 초기소재의 높이  
 $U_\theta, U_\psi$  : 회전방향의 속도  
 $\dot{\sigma}_0$  : 초기항복응력  
 $\phi$  : BK와 치면 사이의 라디안 각  
 $r_s(t)$  : 소재 높이가 t일 때 중심 B에 대한 이 끝

#### 경계면

$R_s(t, \psi)$  : 소재 높이가 t일 때 중심 K에 대한 이 끝 경계면  
 $R, \psi, z$  : 중심 K의 원통좌표계  
 $\dot{E}_f$  : 마찰에너지 소비율  
 $\dot{E}_r$  : 전단에너지 소비율  
 $m$  : 마찰상수  
 $P_{av}$  : 평균단조 응력  
 $t$  : 가공물의 높이  
 $U_r, U_R$  : 반경방향의 속도  
 $U_z$  : 축방향의 속도  
 $\frac{\dot{\sigma}}{\epsilon}$  : 유효변형률 속도  
 $u$  : 편치의 하강속도

\* 부산대학교 공과대학 기계설계공학과 정밀정형 및 금형가공연구센터(정희원)

\*\* 동의 대학교 공과대학 기계설계학과(정희원)

\*\*\* 부산대학교 대학원

## 1. 서 론

최근 기어의 급격한 수요 증가에 따라 기어의 생산성 향상을 위한 연구 즉, 소성가공에 의한 기어의 성형법에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다.<sup>(1,2,3)</sup> 소성가공에 의한 기어의 성형법으로는 냉간압출, 냉간밀폐단조, 온간단조, 열간단조 및 분말야금법 등을 들 수 있으며, 이중 최소의 마무리 가공을 요하는 스퍼어 기어의 성형에는 냉간밀폐단조가 많은 관심을 끌게 되었다.

소성가공에 의하여 생산되는 기어의 정밀도는 전적으로 그 금형의 정밀도에 의존하게 되며, 또한 기어 단조 금형은 가혹한 작업조건하에서 사용되므로 금형설계시에는 단조하중과 압력을 구하는 것이 매우 중요하다. 단조하중과 압력을 구하는 해석법으로는 슬래브법, 상·하계법, 유한요소법 등이 있으며, 이중 상계해법은 실제의 하중보다 적어도 같거나 큰해를 예측하므로 금형설계에 매우 유용한 방법이다. 기어 단조에 관한 해석을 시도한 연구자들 중에서, Grover와 Juneja<sup>(4)</sup>는 스퍼어기어의 밀폐단조에 대하여 치형을 사다리꼴로 가정하고 상계법으로 해석하고자 하였으나, 제시된 속도장이 일부경계면에서 속도의 연속성을 만족시키지 못하는 모순점을 안고 있고, Abdul과 Dean<sup>(5)</sup>은 치면의 형상을 기어 중심축에 직각인 단면에서 치의 중심부를 지나가는 직선에 평행하게 가정하고 스퍼어 기어의 밀폐단조를 상계법으로 해석하고자 하였으나, Juneja등의 경우와 마찬가지로 속도의 연속성을 만족시키지 못하여 완전한 동적가용 속도장을 제시하지 못하였다. Ohga와 Kondo등<sup>(6)</sup>도 분류방식에 의한 스퍼어 기어 단조시의 속도장을 제시하였으나 역시, 속도불연속면에서 속도의 연속성을 만족시키지 못하였다. Kiuchi등<sup>(7)</sup>은 스퍼어 기어단조를 UBET로 해석한 바 있다.

본 논문에서는 스퍼어 기어의 밀폐단조에 대하여 체적 일정조건과 속도의 연속성 및 경계조건을 만족시키는 새로운 동적가용속도장을 제시하여 상계해를 구하고자 한다.

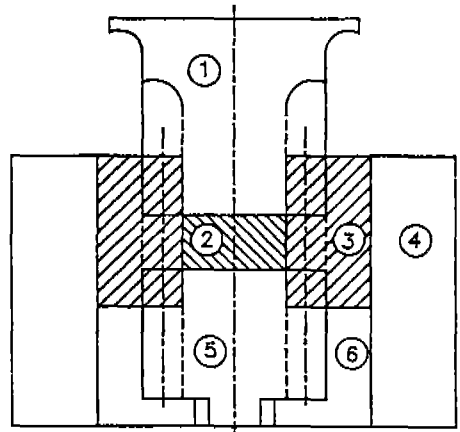
## 2. 이론해석

스퍼어 기어의 냉간밀폐단조에 관한 개략도를 Fig. 1에 나타낸다. 펀치와 이젝터에는 치가 가공되어 있고, 다이에 가공된 치와 맞물려서 하강 및 상승을 할 수 있다. 펀치는 일정한 속도로 하강하고, 그 결과 재료는 다이의 치 공간으로

유동되어 간다. 이때, 이젝터는 정지된 상태를 유지한다. Fig. 2는 스퍼어 기어의 반피치에 대하여 B와 K를 중심으로 하는  $r, \theta, z$ 와  $R, \psi, z$ 의 원통좌표계로 나타낸 것으로 I(BAD), II(BCD), III(CDGF) 3개의 변형영역으로 분할된다. 이 그림에서  $\theta + \psi$ 는 II 영역과 III 영역의 경계면 CD에서 표현되는 라디안 각이다. 본 논문에서는 이뿌리원에서 부터, 이끝원 직전까지의 변형에 대해서 해석한다.

이론 해석을 위해 다음을 가정한다.

- i) 치형은 인블류트곡선이 각각 이끝원과 기초원에서 만나는 점을 연결하여 이뿌리원까지 연장한 직선으로 한다.
- ii) 단조될 재료는 등방성, 비압축성 및 강-완전소성이고 Von Mises 항복조건을 따른다.



- ① Gear shaped punch
- ② Workpiece
- ③ Gear shaped die insert
- ④ Shrink ring
- ⑤ Gear shaped ejector
- ⑥ Ejector seat

Fig. 1 Schematic drawing of a spur gear forging.

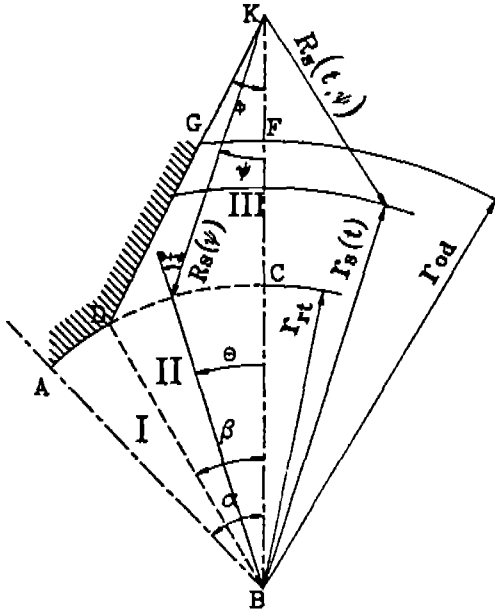


Fig. 2 Assumed kinematically admissible velocity field of parts of a straight tooth profile.

- iii) 편치와 가공품, 가공품과 다이 사이의 접촉면에서 마찰은 균일하다.
- iv) 초기 소재의 직경은 이뿌리원 직경과 같다.

2. 1 등적가용속도장

i) 영역 I ( $\beta \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq r \leq r_n$ )

경계면 AD에서 수직방향 속도성분이 없으므로  $U_r=0$ 로 가정하고, Z방향 속도는 Z에 선형적으로 비례한다고 가정한다. 속도 성분은

$$U_r=0 \tag{1}$$

$$U_\theta = -\frac{u(\alpha - \theta)r}{t} \tag{2}$$

$$U_z = -\frac{uz}{t} \tag{3}$$

이며, 따라서 변형률속도는 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}_{rr}=0$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{u}{t}$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} = -\frac{u}{t}$$

$$\dot{\epsilon}_{r\theta} = \dot{\epsilon}_{\theta z} = \dot{\epsilon}_{rz} = 0 \tag{4}$$

여기서  $\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} + \dot{\epsilon}_{zz} = 0$ 의 체적일정조건을 만족한다.

대칭평면인 AB에서는

$$U_{\theta,I} \Big|_{\theta=\alpha} = -\frac{u(\alpha-\alpha)r}{t} = 0$$

이 되므로 경계조건을 만족한다. 여기서  $U_{\theta,I}$ 의 하첨자 I는  $U_\theta$ 가 영역 I의 속도임을 표시한다.

ii) 영역 II ( $0 \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq r_n$ )

회전방향 속도 성분이  $\theta$ 에 비례한다고 가정한다. 속도 성분은

$$U_r = \frac{uar}{2t\beta} \tag{5}$$

$$U_\theta = -\frac{u(\alpha - \beta)r\theta}{t\beta} \tag{6}$$

$$U_z = -\frac{uz}{t} \tag{7}$$

이며, 따라서 변형률속도는 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{u\alpha}{2t\beta}$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{u(2\beta - \alpha)}{2t\beta} \tag{8}$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} = -\frac{u}{t}$$

$$\dot{\epsilon}_{r\theta} = \dot{\epsilon}_{\theta z} = \dot{\epsilon}_{rz} = 0$$

여기서  $\dot{\epsilon}_{rr} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} + \dot{\epsilon}_{zz} = 0$ 의 체적일정조건을 만족한다. 경계면인 BD에서 수직속도 성분의 연속성은

$$U_{\theta,I} \Big|_{\theta=\beta} = U_{\theta,II} \Big|_{\theta=\beta} = -\frac{u(\alpha - \beta)r\beta}{t\beta}$$

로 되어서 만족된다. 여기서  $U_{\theta,II}$ 의 하첨자 II는  $U_\theta$ 가 영역 II의 속도임을 표시한다.

대칭평면인 BC에서는

$$U_{\theta,II} \Big|_{\theta=0} = 0 \text{ 이 되므로 경계조건을 만족한다.}$$

iii) 영역 III ( $0 \leq \psi \leq \phi, R_s(t, \psi) \leq R \leq R_s(\psi)$ )

III영역의 속도장을 나타낼 때는 중심이 K인 R,  $\psi$ , Z 원통좌표계를 이용한다.  $R_s(t, \psi)$ 는 가공중의 소재높이가 t

일때의 이끝 경계면이고,  $R_s(\Psi)$ 는 II 영역의 경계면 CD를 나타낸다. III 영역의 재료유동은 중심점 K의 방향으로 향하고, 회전방향 유동은 없다고 가정하여 다음과 같은 속도장을 제시한다.

$$U_R = -\frac{u\alpha r_{\pi}}{2t\beta} \frac{1}{\cos(\theta + \Psi)} \frac{R_s(\Psi)}{R} - \frac{u}{t} \frac{R_s(\Psi)^2 - R^2}{2R} \quad (9)$$

$$U_{\Psi} = 0 \quad (10)$$

$$U_z = -\frac{uz}{t} \quad (11)$$

(9)식의  $R_s(\Psi)$ 와  $\cos(\theta + \Psi)$ 는 기하학적 관계에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_s(\Psi) = \overline{BK} \cos \Psi - \sqrt{r_{\pi}^2 - \overline{BK}^2 \sin^2 \Psi} \quad (12)$$

$$\cos(\theta + \Psi) = \frac{\sqrt{r_{\pi}^2 - \overline{BK}^2 \sin^2 \Psi}}{r_{\pi}} \quad (13)$$

여기서  $\overline{BK}$ 는 Fig. 2에서 B와 K사이의 길이이고 아래와 같이 표시된다.

$$\overline{BK} = r_{\pi} \sin \beta \cot \phi + r_{\pi} \cos \beta \quad (14)$$

(12), (13), (14) 식에 의해 III 영역의 속도장에 표현된  $\theta$ 와  $R_s(\Psi)$ 는  $\Psi$ 만의 함수임이 명백하다. 그러므로 수직 변형률 속도를 계산하면 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}_{RR} = \frac{u\alpha r_{\pi} R_s(\Psi)}{2t\beta \cos(\theta + \Psi) R^2} + \frac{uR_s(\Psi)^2}{2tR^2} + \frac{u}{2t} \quad (15)$$

$$\dot{\epsilon}_{\Psi\Psi} = -\frac{u\alpha r_{\pi} R_s(\Psi)}{2t\beta \cos(\theta + \Psi) R^2} - \frac{uR_s(\Psi)^2}{2tR^2} + \frac{u}{2t} \quad (16)$$

$$\dot{\epsilon}_{ZZ} = -\frac{u}{t}$$

여기서  $\dot{\epsilon}_{RR} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} + \dot{\epsilon}_{zz} = 0$ 의 체적일정 조건을 만족한다. 그리고  $U_{\Psi} = 0$ 이므로 경계면 DG와 CF에서 수직속도 성분은 존재하지 않고 경계면에 접선방향 속도만 존재한다. 그러므로 위 속도장은 다이아면 DG와 대칭평면 CF에서 경계조건을 만족한다. 영역 II와 III의 경계면 CD에 수직방향 속도성분은, 영역 II측에서는 CD가 중심 B이고 반경  $r_{\pi}$ 인 원호이므로  $U_r$ 이 되고, 영역 III측에서는  $U_R$

의 CD에 수직방향 속도성분으로 표현된다.

$$U_{r,II} \Big|_{r=r_{\pi}} = \frac{u\alpha r_{\pi}}{2t\beta} \quad (18)$$

$$\Big| U_{R,III} \Big|_{R=R_s(\Psi)} \cos(\theta + \Psi) = \frac{u\alpha r_{\pi}}{2t\beta} \quad (19)$$

여기서  $U_{r,II}$ ,  $U_{R,III}$ 는 영역 II와 III에서의  $U_r$ 와  $U_R$ 를 표시한다. 위의 (18), (19)식이 같으므로 경계면 CD에서 속도 연속성을 만족한다. 이상의 결과에서 제안한 속도장은 동적가용속도장이다.

## 2. 2 상계해

### 2-2-1. 내부에너지 소비율( $\dot{E}_p$ )

i) 영역 I ( $\beta \leq \theta \leq \alpha$ ,  $0 \leq r \leq r_{\pi}$ )

유효 변형률 속도는

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \left( \dot{\epsilon}_{rr}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2 + 2(\dot{\epsilon}_{r\theta}^2 + \dot{\epsilon}_{\theta z}^2 + \dot{\epsilon}_{zr}^2) \right)} \quad (20)$$

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon}_I = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{u}{t} \quad (22)$$

로 되고, 따라서 내부에너지 소비율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{E}_{p,I} &= \int_v \sigma_o \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon}_I dV \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_o u r_{\pi}^2 (\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서  $\dot{E}_{p,I}$ 는 영역 I에서의 내부에너지 소비율이다.

ii) 영역 II ( $0 \leq \theta \leq \beta$ ,  $0 \leq r \leq r_{\pi}$ )

유효 변형률 속도는

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon}_{II} &= \sqrt{\frac{2}{3} \left( \left( \frac{u\alpha}{2t\beta} \right)^2 + \left\{ \frac{u(2\beta - \alpha)}{2y\beta} \right\}^2 + \left( \frac{u}{t} \right)^2 \right)} \\ &= \frac{u}{\sqrt{3}t\beta} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2} \end{aligned} \quad (23)$$

로 되고, 따라서 내부 에너지 소비율은 다음과 같다.

$$\dot{E}_{P, II} = \frac{\sigma_o \mu}{\sqrt{3} t \beta} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2} \int_0^t \int_0^\beta \int_0^{r_n} r dr d\theta dz = \frac{\sigma_o \mu r_n^2}{2\sqrt{3}} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\beta^2} \quad (24)$$

iii) 영역 III ( $0 \leq \Psi \leq \phi$ ,  $R_s(t, \Psi) \leq R \leq R_s(\Psi)$ )

영역 III에서의 전단변형률 속도  $\dot{\epsilon}_{R\Psi}$ 는

$$\dot{\epsilon}_{R\Psi} = \frac{1}{2R} \frac{\partial U_R}{\partial \Psi} \quad (25)$$

이고,  $\frac{\partial U_R}{\partial \Psi}$  는 (12), (13)식을 이용하여 (9)식에서 구

하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial U_R}{\partial \Psi} = -\frac{U a r_n}{2t\beta R} \frac{f_1(\Psi) \cos(\theta + \Psi) - R_s(\Psi) f_2(\Psi)}{f_3(\Psi)} - \frac{u f_4(\Psi)}{2tR} \quad (26)$$

(26)식에서

$$f_1(\Psi) = \frac{\partial R_s(\Psi)}{\partial \Psi} = -\overline{BK} \sin \Psi + \frac{\overline{BK}^2 \sin 2\Psi}{2} \frac{1}{\sqrt{r_n^2 - \overline{BK}^2 \sin^2 \Psi}} \quad (27)$$

$$f_2(\Psi) = \frac{\partial}{\partial \Psi} \cos(\theta + \Psi) = -\frac{\overline{BK}^2 \sin 2\Psi}{2r_n} \frac{1}{\sqrt{r_n^2 - \overline{BK}^2 \sin^2 \Psi}} \quad (28)$$

$$f_3(\Psi) = \frac{\cos^2(\theta + \Psi)}{\frac{r_n^2 - \overline{BK}^2 \sin^2 \Psi}{r_n^2}} \quad (29)$$

$$f_4(\Psi) = \frac{\partial}{\partial \Psi} \{R_s(\Psi)^2\} = 2\{\overline{BK} \cos \Psi - \sqrt{r_n^2 - \overline{BK}^2 \sin^2 \Psi}\} \left\{ \frac{\overline{BK}^2 \sin 2\Psi}{2\sqrt{r_n^2 - \overline{BK}^2 \sin^2 \Psi}} - \overline{BK} \sin \Psi \right\} \quad (30)$$

$\dot{\epsilon}_{R\Psi}$ 는 (12), (13), (14), (27), (28), (29), (30)식들을

(26)식에 대입하고 다시 (25)식에 대입하면 얻어진다. 유효 변형률 속도는 (15), (16), (17), (25)식을 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$\frac{\dot{\epsilon}_{III}}{\epsilon_{III}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{RR}^2 + \dot{\epsilon}_{\Psi\Psi}^2 + \frac{\dot{\epsilon}_{zz}^2 + 2\dot{\epsilon}_{R\Psi}^2}{\epsilon_{III}^2}} \quad (31)$$

가공품의 높이가 t인 순간에 재료는 중심 B, 반경  $r_s(t)$  의 원호의 형태로 영역 III으로 유입되고, 압하율이 증가함에 따라 점차  $r_s(t)$ 이 커져서 GF면까지 확장된다고 가정한다. 그러면 중심 B의  $r_s(t)$ 원호는 중심 K의  $R_s(t, \Psi)$ 로 다음과 같이 표현된다.

$$R_s(t, \Psi) = \overline{BK} \cos \Psi - \sqrt{r_s(t)^2 - \overline{BK}^2 \sin^2 \Psi} \quad (32)$$

그리고 체적 일정 조건을 사용하여  $r_s(t)$ 과 t사이의 관계를 다음과 같이 구한다.

$$r_s(t)^3 - \frac{2\overline{BK} \sin \phi}{\phi} r_s(t)^2 + \left( \frac{r_n^2 \alpha}{\phi} \frac{t_o - t}{t} - r_n^2 + \frac{2\overline{BK} \sin \phi r_n}{\phi} - \frac{\overline{BK}^3 \sin^3 \phi}{3\phi r_n} \right) r_s(t) + \frac{\overline{BK}^3 \sin^3 \phi}{3\phi} = 0 \quad (33)$$

(32), (33)식의  $r_s(t)$ 의 범위는  $r_n \leq r_s(t) \leq r_{od}$ 이다. 그러면 내부에너지 소비율은

$$\dot{E}_{P, III} = \int_0^t \int_0^\phi \int_{R_s(t, \Psi)}^{R_s(t, \Psi)} \sigma_o \frac{\dot{\epsilon}_{III}}{\epsilon_{III}} R dR d\Psi dz \quad (34)$$

(34)식은 (12)~(17)식들과 (25)~(33)식들이 적용되어 수치적분된다.

### 2-2-2. 전단에너지 소비율( $\dot{E}_r$ )

i) 전단경계면 BD( $\Gamma_{BD}$ )

전단경계면 BD에서 상대 속도는

$$\Delta V |_{r_{BD}} = \frac{u a r}{2t\beta} \quad (35)$$

로 되고, 전단 에너지 소비율은 다음과 같다.

$$\dot{E}_{\Gamma_{BD}} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_0^t \int_0^{r_n} \frac{u a r}{2t\beta} dr dz$$

$$= \frac{\sigma_o u a r_n^2}{4\sqrt{3}\beta} \quad (36)$$

ii) 전단경계면 CD( $\Gamma_{CD}$ )

전단경계면 CD에서 상대 속도는

$$|\Delta V|_{\Gamma_{CD}} = \left| \frac{u a r_n}{2t\beta} \tan(\theta + \psi) - \frac{u(\alpha - \beta)r_n\theta}{t\beta} \right| \quad (37)$$

로 되고, 전단에너지 소비율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\Gamma_{CD}} &= \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_A |\Delta V|_{\Gamma_{CD}} dA \\ &= \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left| \int_0^t \int_0^\phi \frac{u a r_n}{2t\beta} \frac{BK \sin \psi}{\sqrt{r_n^2 - BK^2 \sin^2 \psi}} R_s(\psi) d\psi dz \right. \\ &\quad \left. - \frac{u(\alpha - \beta)r_n^2\beta}{2} \right| \quad (38) \end{aligned}$$

2-2-3. 마찰에너지 소비율( $\dot{E}_f$ )

i) 영역 I의 상·하표면에서 마찰에너지 소비율

영역 I의 상·하표면에서 상대 속도는

$$|\Delta V_1| = \frac{u(\alpha - \beta)r}{t} \quad (39)$$

로 되고, 마찰에너지 소비율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{E}_{f_1} &= \frac{2m\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_A |\Delta V_1| r d\theta dr \\ &= \frac{m\sigma_o u r_n^3 (\alpha - \beta)^2}{3\sqrt{3}t} \quad (40) \end{aligned}$$

ii) 다이벽면 AD에서 마찰 에너지 소비율

다이벽면 AD에서 상대속도는

$$|\Delta V_2| = \frac{u}{t} \sqrt{r_n^2 (\alpha - \theta)^2 + z^2} \quad (41)$$

로 되고, 마찰에너지 소비율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{E}_{f_2} &= \frac{m\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_A |\Delta V_2| r_n d\theta dz \\ &= \frac{m\sigma_o u r_n}{\sqrt{3}t} \int_\beta^\alpha I d\theta \quad (42) \end{aligned}$$

여기서 I는

$$\begin{aligned} I &= \frac{t}{2} \sqrt{t^2 + r_n^2 (\alpha - \theta)^2} + \frac{1}{2} r_n^2 \\ &\quad (\alpha - \theta)^2 \ln \frac{t + \sqrt{t^2 + r_n^2 (\alpha - \theta)^2}}{r_n (\alpha - \theta)} \quad (43) \end{aligned}$$

이다.

iii) 영역 II의 상·하표면에서 마찰에너지 소비율

영역 II의 상·하표면에서 상대 속도는

$$|\Delta V_3| = \frac{u(\alpha - \beta)r}{t\beta} \sqrt{\left\{ \frac{\alpha}{2(\alpha - \beta)} \right\}^2 + \theta^2} \quad (44)$$

로 되고, 마찰에너지 소비율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{E}_{f_3} &= \frac{2m\sigma_o}{\sqrt{3}} \frac{u(\alpha - \beta)}{t\beta} \int_0^\beta \int_0^{r_n} r \\ &\quad \sqrt{\left\{ \frac{\alpha}{2(\alpha - \beta)} \right\}^2 + \theta^2} r dr d\theta \\ &= \frac{m\sigma_o u (\alpha - \beta) r_n^3}{3\sqrt{3}t\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left[ \beta \sqrt{\beta^2 + \left\{ \frac{\alpha}{2(\alpha - \beta)} \right\}^2} + \left\{ \frac{\alpha}{2(\alpha - \beta)} \right\}^2 \right]^2 \ln \\ &\frac{2(\alpha - \beta) \left\{ \beta + \sqrt{\beta^2 + \left\{ \frac{\alpha}{2(\alpha - \beta)} \right\}^2} \right\}}{\alpha} \quad (45) \end{aligned}$$

iv) 다이벽면 DG에서 마찰에너지 소비율

다이벽면 DG에서 상대 속도는

$$|\Delta V_4| = \sqrt{U_{R,III}^2 + U_{z,III}^2} \quad |_{\psi=\phi} \quad (46)$$

로 되고, 마찰에너지 소비율은 다음과 같다.

$$\dot{E}_{f_4} = \frac{m\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_0^t \int_{R_{d(\phi)}}^{R_{d(\theta)}} I_2 dR dz \quad (47)$$

여기서  $I_2$ 는

$$I_2 = \sqrt{\left\{ \frac{uar_r R_s(\phi)}{2t\beta \cos(\beta + \phi)R} + \frac{u}{t} \frac{R_s(\phi)^2 - R^2}{2R} \right\} + \left\{ \frac{uz}{t} \right\}^2}$$

이다.

v) 영역 III의 상·하표면에서 마찰에너지 소비율  
 영역 III의 상·하표면에서  $U_{\psi}=0$ 이므로 상대속도는  $U_R$ 이다.

그러므로 영역 III의 상·하표면에서 마찰 에너지 소비율은 다음과 같다.

$$\dot{E}_{f_s} = \frac{2m\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_0^{\phi} \int_{R_s(\psi)}^{R(t,\psi)} \left[ \frac{uar_r R_s(\psi)}{2t\beta \cos(\theta + \psi)R} + \frac{u}{t} \frac{R_s(\psi)^2 - R^2}{2R} \right] RdRd\psi$$

$$= \frac{2m\sigma_o}{\sqrt{3}} \int_0^{\phi} \left[ \frac{uar_r R_s(\psi)}{2t\beta \cos(\theta + \psi)} \{R_s(\psi) - R_s(t, \psi)\} + \frac{uR_s(\psi)^2}{2t} \{R_s(\psi) - R_s(t, \psi)\} - \frac{u}{3t} \{R_s(\psi)^3 - R_s(t, \psi)^3\} \right] d\psi$$

(48)

2-2-4. 전체에너지 소비율

영역 I, II, III에서 전체에너지 소비율은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{E}_t &= \dot{E}_{PI} + \dot{E}_{PII} + \dot{E}_{PIII} + \dot{E}_{Gamma_m} \\ &+ \dot{E}_{Gamma_{cn}} + \dot{E}_{f_1} + \dot{E}_{f_2} + \dot{E}_{f_3} \\ &+ \dot{E}_{f_4} + \dot{E}_{f_5} \end{aligned}$$

(49)

스피어 기어 전체에 대한 에너지 소비율은, 일정한 속도  $U$ 로 움직이는 펀치에 제공된 동력과 같아야 한다.  
 그러므로

$$\begin{aligned} \dot{E}_T &= 2N \dot{E}_t \\ &= P_{av} \cdot A \cdot u \end{aligned}$$

여기서  $A$ 는 펀치와 가공품의 접촉면적이다.

$$A = \left[ \frac{1}{2} \phi (r_{rt}^2 - r_s(t)^2) + \overline{BK} \sin \phi \right]$$

$$\begin{aligned} & \left[ (r_s(t) - r_{rt}) + \frac{\overline{BK}^3 \sin^3 \phi}{6} \frac{r_s(t) - r_{rt}}{r_s(t) \cdot r_{rt}} \right] \\ & (2N) + \Pi r_{rt}^2 \end{aligned}$$

(50)

평균 상대압력에 관한 상계값은 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{P_{av}}{\sigma_o} = \frac{2N \dot{E}_t}{\sigma_o A u}$$

(51)

3. 결과 및 고찰

Juneja(4)는 기어의 냉간 밀폐단조에 관한 해석을 할 때 II와 III의 경계를 원호로 하지 않고, Fig. 2의 D점에서 BK에 내린 수직선으로 가정했다. II영역에서 이경계면을 나오는 평균속도를 이용하여 III영역의 반경방향 속도를 구

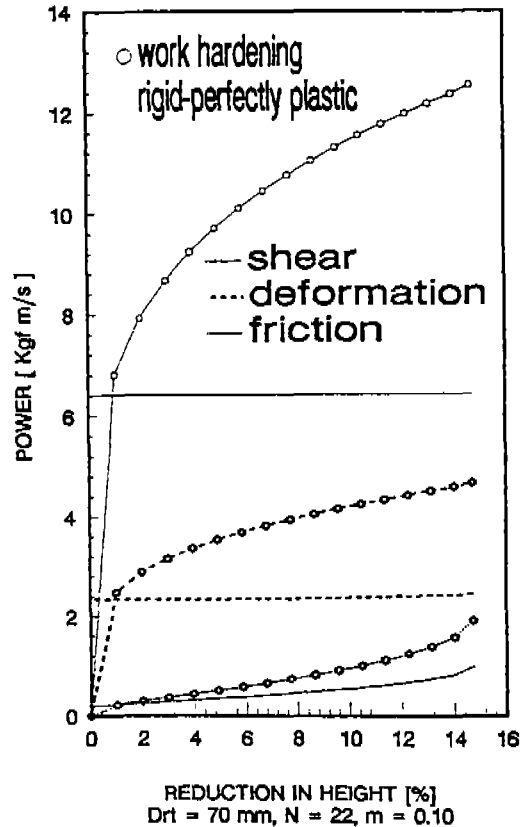


Fig. 3 Energy dissipation rates versus height reduction for each shear, deformation and friction.

하고, III영역에서 회전방향 속도 성분과 z축 방향의 속도성분이 없다고 가정했기 때문에 II와 III의 경계면에 수직방향 속도성분의 연속성을 만족하지 못하는 속도장이었다. Dean<sup>(5)</sup>은 II와 III의 경계를 원호로 하였지만, Juneja와 마찬가지로 이 경계면에서 평균속도를 이용하였기 때문에 수직방향 속도성분의 연속성을 만족시키지 못하였고, 또한 치면에서 경계조건을 만족시키지 못하는 속도장이었다. 그러나 본 논문에서 제한한 속도장은 이론해석에서 본바와 같이 완전한 동적가속도장이다.

본 논문에서는 압력각을 20°, 스퍼어기어의 완제품 두께를 24mm, 치높이를 2.25M으로 하고  $\phi$ ,  $\beta$ , BK는 각각 모듈과 잇수 및 이뿌리원 직경에 따라 계산한다. 에너지 소비율과 하중 및 편치의 평균 상대입력을 마찰상수, 이뿌리원 직경 및 잇수들의 각 조건에 대하여 수치해석적으로 계산한 결과들은 Fig.3~Fig.11 및 Tabl.1~Table.3과 같다. Fig.3과 Fig.4는 AISI 1010<sup>(6)</sup>에 대해서, 강-완전 소성으로 해석할 때는 항복응력을 25Kg/mm<sup>2</sup>로 하고, 가공경화성으로 해석할 때는 유효응력을  $K\bar{\epsilon}^n$ 으로 구하여 변형에 대한 에너지 소비율 및 하중을 나타낸 것이다. 여기서 K는 73Kg/mm<sup>2</sup>, 가공경화지수 n은 0.22,  $\bar{\epsilon}$ 는  $\ln(t_0/t)$ 를 사용한다. Fig.3에서 압하율이 약 14.8%가 되면 가공경화

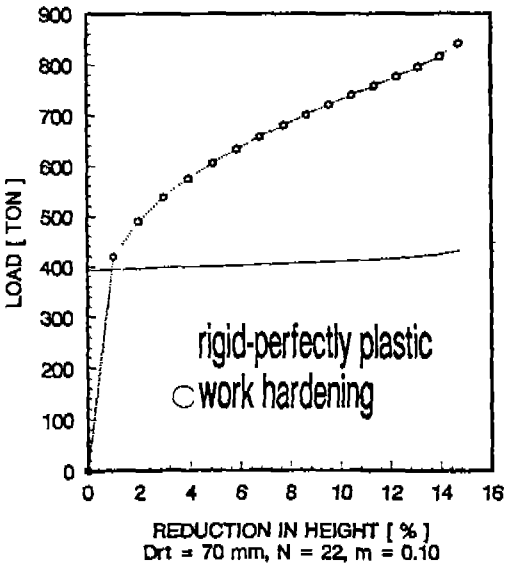


Fig. 4 Comparison of spur gear forging load between rigid-perfectly plastic and work hardening conditions.

Table 1 Calculated initial heights of billet  
(Thickness of spur gear : 24mm)

N	Drt	t <sub>0</sub>
22	40	28.14
	50	
	70	
42	40	27.01
	50	
	70	
62	40	26.46
	50	
	70	

Table 2 Relative forging pressure for various root diameters.

(N=42, t<sub>0</sub>=27.01mm)

Drt	relative pressure			
	zero height reduction		11.146% height reduction	
	m=0	m=0.5	m=0	m=0.5
40	6.179	6.449	5.522	7.969
50	6.179	6.475	5.518	7.552
60	6.179	6.507	5.516	7.295
70	6.179	6.543	5.514	7.127

Table 3 Comparison of forging loads(ton)

(m=0.1,  $\sigma_0=25$  Kgf/mm<sup>2</sup>, u=1.0 mm/sec, M=2.0, t=24mm)

N	CHO I	DEAN	JUNEJA
22	140.0	162.8	185.3
32	385.1	423.5	476.9
42	801.9	849.6	947.9
52	1420.1	1467.4	1626.2

를 고려한 에너지 소비율이 강-완전 소성의 에너지 소비율보다 약 2배 정도 커지는 것을 알 수 있고, 전단에너지 소비율이 내부에너지 소비율과 마찰에너지 소비율보다 차지하는 비중이 큰 것을 알 수 있다. 그런데 마찰상수가 0.2 이상되고 압하율이 약 14.8%가 되면 마찰 에너지 소비율



이 내부에너지 소비율보다 커지게 되므로, 단조를 실시할 때 윤활조건에 대한 영향을 충분히 고려해야 할 것이다. Fig.4와 같이 단조하중은 가공경화를 고려하면 압하율에

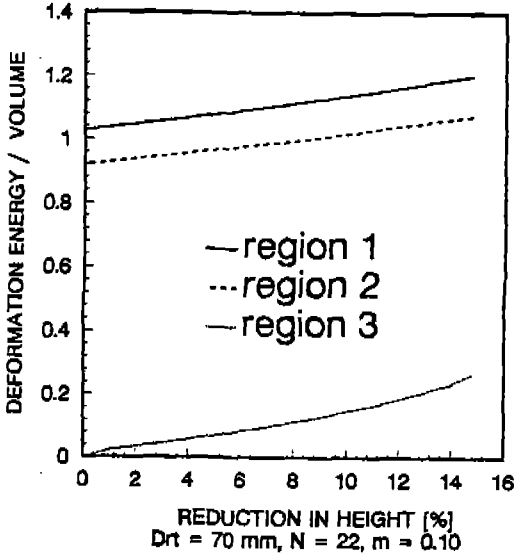


Fig. 5 Variation of deformation energy dissipation rates per unit volume with respect to height reduction for each regions.

따라서 급격히 증가하는 현상을 보인다.

Fig.5는 I, II, III의 각 영역에서, 단위체적당 내부에너지 소비율을 압하율에 따라 나타낸 것으로, 압하율이 커질수록 III영역의 단위체적당 내부에너지 변화율이 커지는 것을 볼 수 있다.

Fig.6은 압하율에 대한 상대압력의 변화를 여러가지의 마찰조건에 대해 나타낸 것이다. 이 그림에서, 압하율이 거의 완제품 높이에 접근할수록 마찰상수의 영향이 상당히 증가함을 알 수 있다.

Fig.7과 Fig.8은 이뿌리원 직경이 동일할 때, 잇수의 변화에 대한 상대압력의 변화를 마찰조건 0.0~0.5의 범위에서 나타낸 것이다. 이 두 그림에서 상대압력은 잇수가 증가할수록 또한 마찰이 클수록 높다는 것을 나타낸다. 이뿌리원 직경이 같고  $m=0$ 일 때, 상대압력은 잇수가 많은 것이 크다. 이것은 잇수의 증가에 의해 전단되는 경계면의 갯수가 증가하기 때문이다. 무마찰이고 잇수가 같을 때는, 이뿌리원 직경에 관계없이 치가 성형될려는 순간의 상대압력은

동일하다. 이것은 완제품 높이와 잇수가 같을 때는, 이뿌리원의 직경에 관계없이 본 논문의 밀폐단조 형태에서는 초기소재의 높이가 같기 때문이다. Table 1은 스퍼어 기어 완제품 두께를 24mm로 할 때, 기어 잇수 22, 42, 62에 대한 이뿌리원 직경이 40, 50, 70일 때의 초기소재 높이를 계

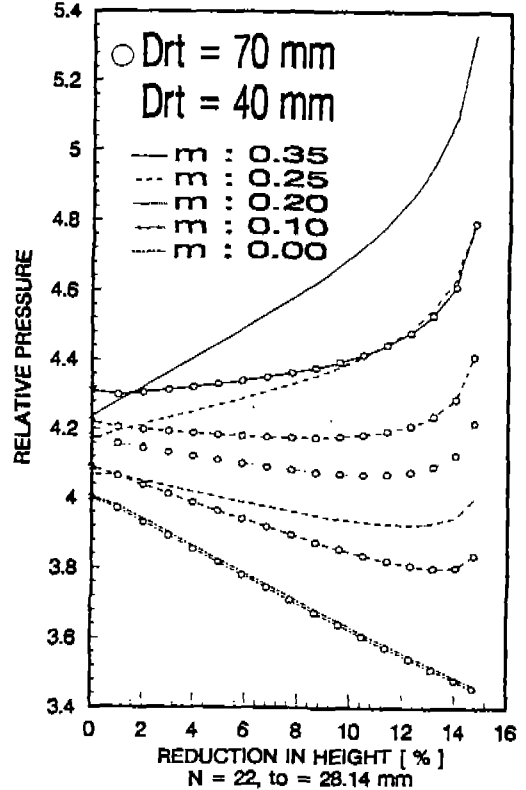


Fig. 6 Variation of relative pressure with respect to height reduction for various friction factors.

산한 것인데 잇수가 같으면 이뿌리원 직경에 관계없이 초기소재 높이가 같다. 그러나, Fig.6~Fig.8에서  $m=0$ 의 경우에는 잇수와 이뿌리원 직경에 관계없이 압하율이 증가할수록 상대압력이 감소하는 경향을 보이고 있다. 이것은 내부에너지 소비율과 전단에너지 소비율을 나타낸 (22), (24), (34), (36) (38)식들과 편차와 가공품의 접촉면적을 나타낸 (50)식을 검토해 보면 그 타당성을 알 수 있다. 즉,  $m=0$ 일 때 일정한 이뿌리원 직경과 잇수에 대해 압하율이 증가할수록  $r_s(t)$ 이  $r_{r0}$ 보다 커지므로 상대압력은 작아진다. Fig.9는 기어의 잇수가 동일할 때, 각각 압하율에 대한 전단의 상대압력과  $m=0.5$ 인 경우에 마찰의 상대압력이 이

뿌리원 직경에 따라서 변화하는 것을 표시하고 있다. 이 그림에서 마찰이 존재하고 기어의 잇수가 같을 때, 압하율 0%에서 마찰에 대한 상대압력은 이뿌리원 직경이 클수

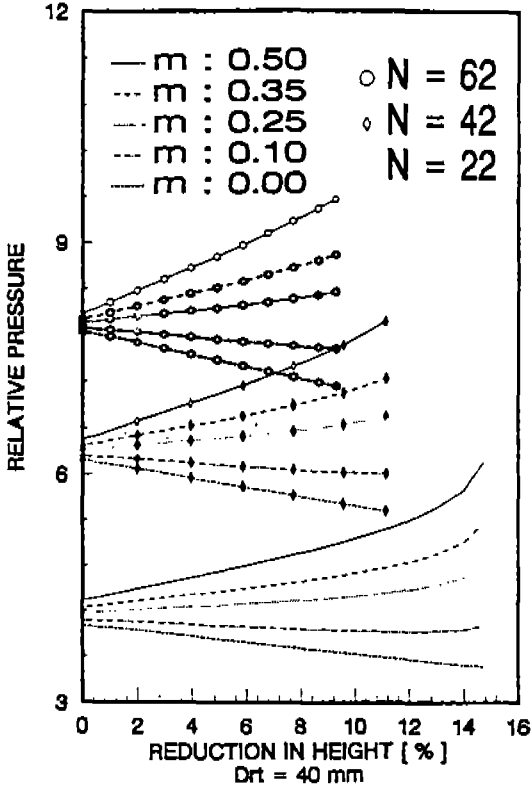


Fig. 7 Variation of relative pressure with respect to height reduction for each number of teeth.

록 크게 나타난다. 이것은 치가 성형되기 시작하는 순간에 I 과 II 영역의 내부에너지 소비율과 BD에서 전단에너지 소비율의 식에는 분자에  $r_n^2$ 항이 곱해져 있기 때문에 상대압력이  $r_n$ 에 관계 없이 일정하다. 그러나 I 과 II 영역의 상·하 마찰면과 다이면 AD에서 마찰에너지 소비율을 나타내는 (40), (42), (45)식에는 분자에  $r_n^3$ 이 포함되어 있으므로 이뿌리원 직경이 클수록 상대압력이 크게됨을 알 수 있다. 그런데 잇수가 동일하고 마찰 조건이 같을 때, 압하율이 증가하면 이뿌리원 직경이 큰것일수록 상대압력이 감소하는 결과를 Fig.9와 Fig.11과 같이 얻을 수 있다. Fig.11의 상대압력은 전체 에너지 소비율에 관한 것이다. Fig.10은 잇수가 같을 때, 동일한 압하율에 대한 치 깊이는

이뿌리원 직경이 작은 것보다 큰 것이 더 깊다는 결과를 보여준다. 이 결과가 Fig.11의 경향이 나오게 되는  $r_s(t)$ 를 제공하는 것으로 본다. Fig.9와 Fig.11의 경향을 수치로

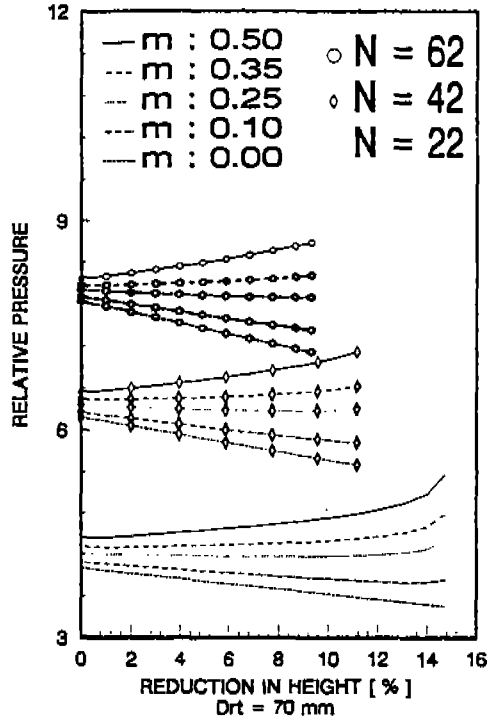


Fig. 8 Variation of relative pressure with respect to height reduction for each number of teeth.

나타낸 것이 Table 2이다. 즉 잇수 42일 때, 압하율 0%에서  $m=0$ 이면 이뿌리원 직경에 무관하게 상대압력이 6.179로 일정하고, 압하율 11.146%에서  $m=0$ 이면 이뿌리원 직경이 커질수록 상대압력은 감소한다. 그리고  $m=0.5$ 인 경우 상대압력은 압하율 0%에서는 이뿌리원 직경이 커질수록 커지고, 압하율 11.146%에서는 이뿌리원 직경이 커질수록 오히려 감소한다. Table 3은 본 논문의 상계해 결과와 Juneja<sup>(4)</sup>와 Dean<sup>(5)</sup>의 해석 결과를 비교한 것인데, 본 논문의 상계해 결과가 두연구자의 해석결과보다 낮은 값을 가진다. Ohga와 Kondo 등이 실험으로 얻은 결과  $X_2$ <sup>(6)</sup>는 잇수 22, 모듈 1.0, 이뿌리원의 직경 19.5mm, 이뿌리원의 직경 24mm, 초기소재 높이 5.0mm 및 전위계수 0일 때, 상

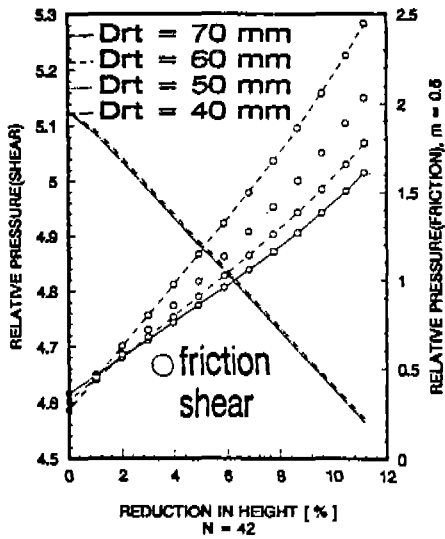


Fig. 9 Variation of relative pressure for shear and friction with respect to height reduction for each root diameter.

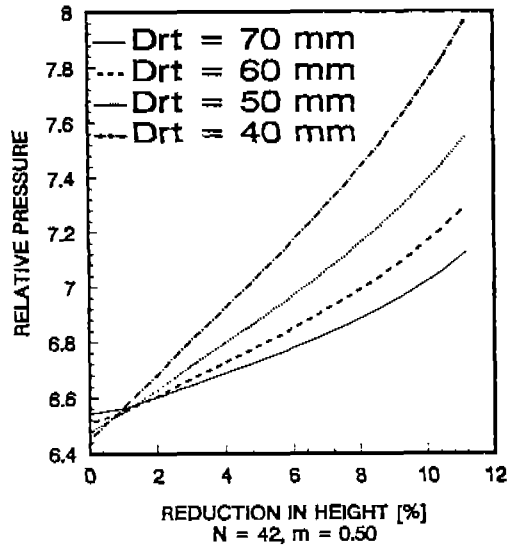


Fig. 11 Variation of relative pressure with respect to height reduction for each root diameter.

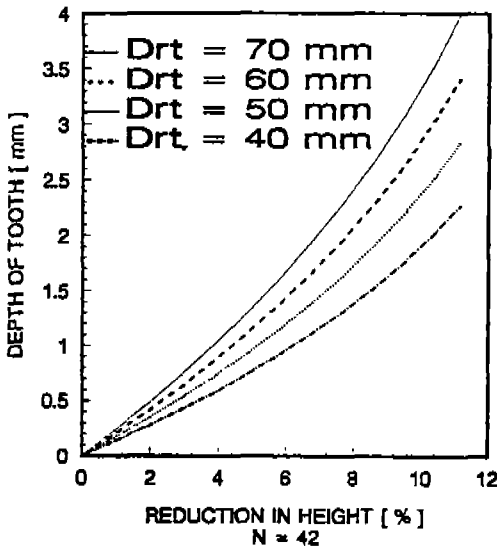


Fig. 10 Tooth depth variation with respect to height reduction for each root diameter.

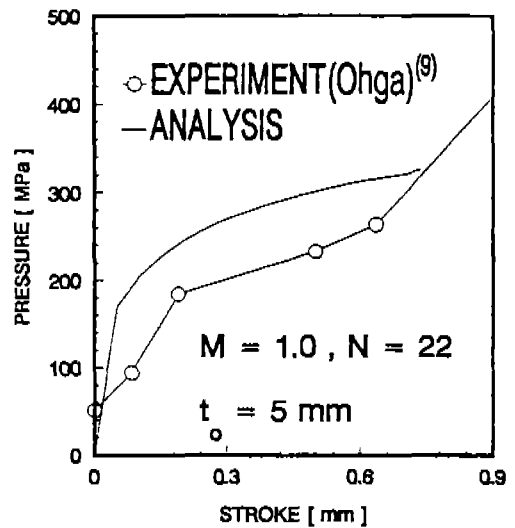


Fig.12 Comparison of experimental results<sup>9)</sup> with analysis.

대압력이 3.7이다. 이 경우에 마찰계수  $f$ 는 0.1인데, 본 논문의 마찰상수  $m$ 값으로는 약 0.173이다. 이와 같은 조건에서, 본 논문의 상계해 결과인 상대압력은 3.7590 이므로 해석결과와 큰 차이가 없는 것으로 생각된다. Fig. 12 는 Kondo와 Ohga<sup>9)</sup>가 인볼류트 스퍼어기어를 밀폐단조

한 결과와 비교한 것인데, 상계해가 비교적 높게 평가되고 있다. 냉간 단조용 금형을 설계할 때는 여러가지 피가공재의 기계적 특성과 원제품의 단면적 등을 고려하여, 상계해석된 상대압력을 활용하는 것이 바람직하다고 생각된다. 이상의 비교 검토에서, 치형을 직선으로 가정한 것과 인볼

류트 치형과는 다소 차이가 있겠지만 냉간 밀폐단조용 금형설계시 유용한 자료가 될 수 있을 것으로 본다.

#### 4. 결 론

원통형 소재를 이용하여 스피어기어를 밀폐단조 할 때 필요한 단조하중과 편치가 받는 평균압력을 계산하기 위하여, 새로운 동적가공 속도장을 제안했다.

이 속도장에 의한 상계해의 결과로써 다음과 같은 것들을 얻었다.

- (1) 이뿌리원 직경이 같을 때, 잇수가 많고 마찰이 클수록 단조압력은 증가한다.
- (2) 치가 성형될려는 순간에, 마찰이 없고 잇수가 같으면 단조압력은 이뿌리원 직경의 크기에 관계없이 같다. 이 때 마찰이 존재하면 이뿌리원 직경이 클수록 단조압력이 커진다.
- (3) 마찰이 조재할 때, 잇수가 같으면 압하율이 증대될수록 이뿌리원 직경이 작은 것의 상대압력이 높아진다.

#### 참 고 문 헌

1. S. K. Samanta, "Helical Gear : A Novel Method of Manufacturing It", NAMRC, pp.199~205, 1976
2. F. Dohmann and O. Traudt, "Metal Flow and Tool Stress in Cold Forging of Gear Components", Advanced Technology of Plasticity, Vol. II, pp.1081~1089.
3. A. R. O. Abdul-Rahman and T. A. Dean, "The Quality of Hot Forged Spur Gear Forms. part I : Mechanical and Metallurgical Properties", Int. J. Mach. Tool Des. Res., Vol. 21, No. 2, pp. 109~127, 1981
4. O. P. Grover and B. L. Juneja, "Analysis of Closed-Die Forging of Gear-Like Elements", "Advanced Technology of Plasticity", Vol, II, pp.888~893, 1984
5. N. A. Abdul and T. A. Dean, "An Analysis of the Forging of Spur Gear Forms" Int. J. Mach. Tool Des. Res., Vol. 26, No. 2, pp.113~123, 1986.
6. K. Ohga, K. Kondo and T. Jitsunari, "Research on Precision Die Forging Utilizing Divided flow", Bulletin of JSME, Vol. 28, No. 244, October, 1985.
7. M. Kiuchi, H. Chung and J. Yanagimoto, "Analysis of Upsetting of Hollow Billets with square and Gear-type Dies : Application of UBET to Forging VI", J. of the JSTP, Vol. 31, No. 354, pp.907~912, 1990.
8. T. Altan, F. W. Boulger, "Flow Stress of Metals and Its Application in Metal forming Analysis", ASME, J. of Eng. for Ind., pp.1009~1019, Nov., 1973.
9. K. Kondo, K. Ohga, "Development of Precision Cold Die Forging Process Utilizing Divided Flow", Journal of the JSTP, Vol. 27, No. 300, 1986.