

마그네틱 커플링을 장착한 축계의 동적해석(I)

김 성 결*, 이 성 진*, 이 장 무**

Dynamic Analysis of Spindle System with Magnetic Coupling(I)

S. K. Kim*, S. J. Lee*, J. M. Lee**

ABSTRACT

In this study, the transverse and the torsional vibration analyses of a precision dynamic drive system with the magnetic coupling are accomplished. The force of the magnetic coupling is regarded as an equivalent transverse stiffness, which has a nonlinearity as a function of the gap and the eccentricity between a driver and a follower. Such an equivalent stiffness is calculated by and determined by the physical law and the calculated equivalent stiffness is modelled as the truss element. The form of the torque function transmitted through the magnetic coupling is a sinusoidal and such an equivalent angular stiffness, which represents the torque between a driver and a follower, is modelled as a nonlinear spring. The main spindle connected to a follower is assumed to a rigid body. And then finally we have the nonlinear partial differential equation with respect to the angular displacements. Through the procedure mentioned above, we accomplish the results of the torsional vibration analysis in a spindle system with the magnetic coupling.

Key Words : Precision Dynamic Drive System(정밀 동력 전달계), Magnetic Coupling(영구 자석 커플링), Nonlinear Spring(비선형 스프링), Nonlinear Partial Differential Equations(비선형 편 미분 방정식)

1. 서 론

정밀 부품을 가공하는 정밀 공작 기계의 구동부는 고정 밀도를 유지하도록 동적 성능이 높게 설계되어야 한다. 모터와 주축을 연결하는 동력 전달 장치(coupling)는 접촉식과 비접촉식으로 나눌 수 있으며, 비접촉식은 접촉식에 비해 진동절연 효과를 크게 기대할 수 있다. 마그네틱 커플링은 이러한 비접촉식 동력 전달 기구의 하나이며, 자력(magnetic force)을 이용하여 토오크를 전달한다.

영구 자석의 재료적, 기계적 성질 등과 관련된 연구는 70년대 후반에 상당한 성과를 거두었으며, 그중 마그네틱 베어링, 마그네틱 커플링의 동특성에 관한 연구는 C. J. Fellow^[1], J. P. Yonnet^{[2][3]} 등에 의하여 수행되었다. 본

논문에서는, 기존의 연구가 마그네틱 커플링 자체의 동특성 연구에만 국한되어 있고, 마그네틱 커플링이 부착된 축계의 동특성 해석은 미비하므로 다음과 같은 연구를 수행하도록 한다. 첫째, 구동부와 종동부 사이의 상대 각변위와 전달 토오크와의 관계를 해석하고^[1], 둘째, 편심이 발생되었을 경우에 대한 축방향과 반경 방향의 동가 강성 및 전달력에 관하여 연구하고자 한다. 셋째, 구동부 각속도의 불균일성으로 인한 비틀림 진동을 해석하기 위하여, 마그네틱 커플링의 종동부와 연결된 주축계를 강체(rigid body)로 모델링하고, 구동부에 조화 가진을 작용시켜 구한 주축계의 응답을 진동수 비의 변화에 대하여 도출한다. 네째, 구동부와 종동부의 편심으로 인해 발생하는 횡방향 진동 해석을 수행한다. 마그네틱 커플링을 장착한 축계를 위한

* 서울대학교 대학원 기계설계학과

** 서울대학교 기계설계학과

요소 법으로 모델링하여 커플링의 종류와 커플링 사이의 간극의 변화에 따른 자유 진동 해석과, 구동부측의 조화 가진시 마그네틱 커플링의 진동 절연 효과를 연구하기 위하여 강제 진동 해석을 수행한다.

2. 마그네틱 커플링의 동특성

2.1 전달 토크와 각변위와의 관계

우리가 사용하는 커플링은, 두개의 영구 자석을 일정한 간극을 두고 설치하여 두 자석 사이에 토크를 전달하는 동기 구동 커플링(synchronous coupling)이다. 전달되는 토크는, 축의 회전 속도와는 무관하며 단지 구동부와 종동부 커플링에 부착된 자석들의 상대 각변위에 의존한다. 또한, 구동부와 종동부 커플링에 각각 부착된 자석들은 동기 속도로 움직인다. 동기 커플링은 동심형(axial type : CR model)과 면형(face type : CD model)의 두가지 형태로 대별된다.

동기 영구 자석 커플링에 의하여 전달되는 토크와 각 변위 사이의 관계는 Fellows^[1], Weissmann^[7] 등에 의하여 연구되었고, 그 관계는 Fig.1과 같다.

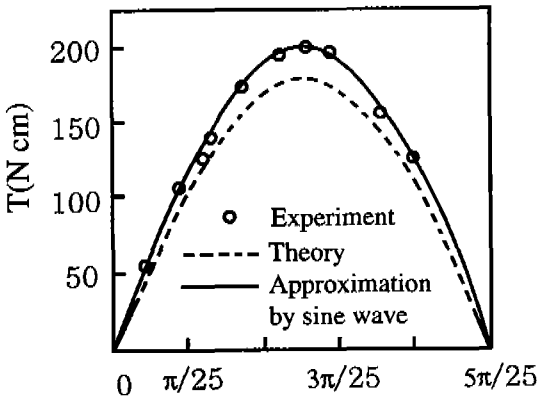


Fig. 1 Experimental and theoretical results of magnetic transmission torque by Weissmann et al.

$$T = T_m \sin \phi_m \quad (1)$$

ϕ_m : angle between the driver and the follower

2.2 전달력, 축방향 강성과 편심과의 관계

중심축의 편심에 기인하는 직선 변위 해석의 관점에서,

박 현^[8]은 자속의 변화와 작용력의 변화를 제시하였다. 본 논문에서는 커플링의 구동부와 종동부 사이의 편심에 기인하는 축 방향 힘과 반경 방향 힘에 대하여 해석하였다. 막대 형태의 자석의 경우에 형성되는 자기장 H 를 계산하면 식(2)와 같다.

$$H_1 = \int_{S_1} dH_1 \quad (2)$$

여기서

$$dH_1 = \begin{cases} dH_{r_1} = \frac{1}{2\pi\mu_0} J_1 dS_1 \frac{\cos(\theta - \beta_1)}{r_{12}^2} \\ dH_{\theta_1} = \frac{1}{2\pi\mu_0} J_1 dS_1 \frac{\sin(\theta - \beta_1)}{r_{12}^2} \end{cases}$$

J_1 : magnetization, S_1 : cross section area

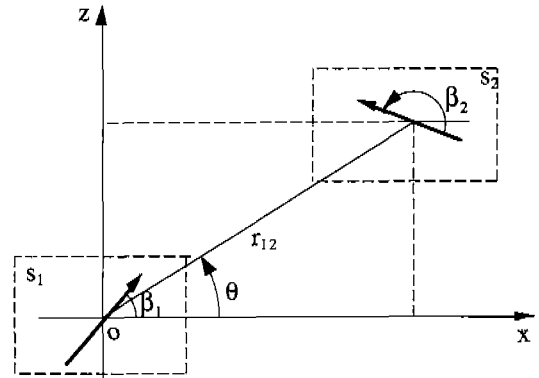


Fig. 2 Geometrical disposition

첫번째 자석에 의해 형성된 장에 존재하는 내부 에너지는 식(3)과 같다.

$$dW = -J_2 H_1 dv_2$$

$$J_2 = \begin{cases} H_{2r} = J_2 \cos(\beta_2 - \theta) \\ H_{2\theta} = J_2 \sin(\beta_2 - \theta) \end{cases} \quad (3)$$

$$dv_2 = dS_2 dl$$

따라서, 두 자석에 의한 단위 길이당 존재하는 자기 에너지는 식(4)가 된다.

$$\frac{W}{l} = \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{-1}{2\pi\mu_0} \frac{J_1 J_2}{r_{12}^2} \cos(\beta_1 + \beta_2 - 2\theta) dS_1 dS_2$$

l : length of magnet (4)

식 (4)를 미분하여 F_z, F_x 를 구한다.

$$\begin{aligned} \frac{F_z}{l} &= \frac{dW}{dz} = - \left(\frac{\partial W}{\partial r_{12}} \cdot \frac{\partial r_{12}}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\ &= \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{1}{\pi \mu_0} \frac{J_1 J_2}{r_{12}^3} \\ &\quad \sin(\beta_1 + \beta_2 - 3\theta) dS_1 dS_2 \\ \frac{F_x}{l} &= \frac{dW}{dx} = - \left(\frac{\partial W}{\partial r_{12}} \cdot \frac{\partial r_{12}}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\ &= \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{-1}{\pi \mu_0} \frac{J_1 J_2}{r_{12}^3} \\ &\quad \cos(\beta_1 + \beta_2 - 3\theta) dS_1 dS_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$(r_{12} = \sqrt{x^2 + z^2}, \tan \theta = z/x)$$

앞에서 제시된 축 방향 힘 F_z 와 축 방향 강성 K_z 와는 식(6)과 같은 관계가 있다.

$$K_x = - \frac{dF_x}{dx} \quad K_z = - \frac{dF_z}{dz} \quad (6)$$

따라서, 축방향 등가 강성 K_z 는 식(7)로 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{K_z}{l} &= \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{3}{\pi \mu_0} \frac{J_1 J_2}{r_{12}^4} \\ &\quad \cos(\beta_1 + \beta_2 - 4\theta) dS_1 dS_2 \end{aligned} \quad (7)$$

면 형태의 마그네틱 커플링의 경우 축방향 강성과 반경 방향 강성간에는 식(8)과 같은 관계가 성립한다.

$$K_r = - \frac{K_z}{2} \quad (8)$$

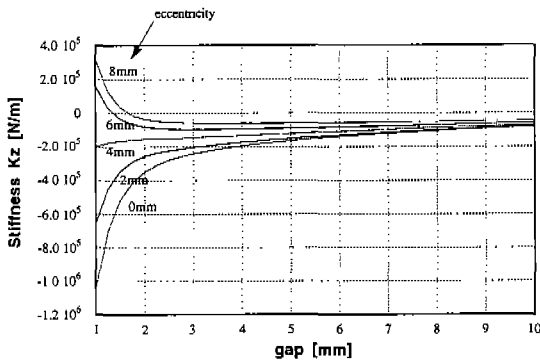


Fig. 3 Axial stiffness(K_z) of CD85F magnetic coupling

위에서 사용된 이론과 식을 이용하여 면형(face type)의 마그네틱 커플링에 대해서 축방향 강성과 편심과의 관계를 표시하면 Fig.3와 같다.

위의 Fig.3에서 강성 값이 음인 경우는 복원력이 작용함을 의미한다. 반대로 강성이 양의 값을 갖게되면 복원력이 아니라 반발력이 작용하게 되므로 편심이 6mm이상 생길 경우는 안정성이 깨어지게 된다. 실제의 공작 기계의 경우, 편심이 1mm를 넘는 경우는 거의 없으므로 편심에 의한 불안정성은 문제가 되지 않는다.

3. 주축계의 각변위 진동 해석

3.1 해석 이론

Fig.4는 마그네틱 커플링을 장착한 축계를 도시한다.

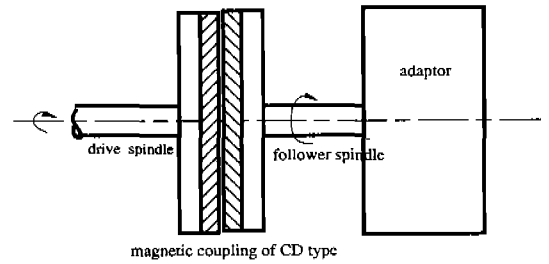


Fig. 4 Schematic diagram of rotating spindle with magnetic coupling

마그네틱 커플링을 장착한 축계의 비틀림 진동 해석을 위해 Fig.4의 축계를 Fig.5과 같은 1자유도 계의 수학적 모델로 구성하였다.

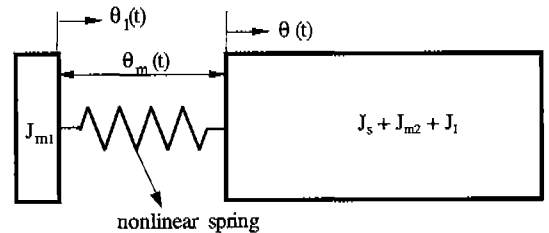


Fig. 5 Mathematical model of rotating spindle with magnetic coupling

θ_1 : applied angular displacement

θ : angular displacement of response

- J_{m1} : polar mass moment of inertia in magnetic coupling of driver spindle
- J_{m2} : polar mass moment of inertia in magnetic coupling of follower spindle
- J_s : polar mass moment of inertia in main spindle
- J_a : polar mass moment of inertia in adaptor

두 마그네틱 커플링 사이에서 전달되는 토크는 구동부와 종동부 사이의 상대 각 θ_m 의 정현파 함수로 나타낼 수 있다.^{[6][7]} 두 마그네틱 커플링 사이에 작용하는 토크를 비선형 스프링으로 모델링하여 지배 방정식을 유도하면 식(9)가 된다.

$$(J_{m2} + J_s + J_a) \frac{d^2 \theta}{dt^2} = T_m \sin(\theta_1 - \theta) \quad (9)$$

$$J_T = J_{m2} + J_s + J_a$$

$$\theta_m = \theta - \theta_1 \quad (10)$$

축계의 비틀림 진동 해석을 위해 가진 진폭 각 θ_1 을 정현파 함수로 가정하면, 식(11)이 되고, 식(11)을 식(9)에 대입하여 식(12)를 구한다.

$$\theta_1 = A \cos \omega t \quad (11)$$

A : amplitude of excitation,

ω : frequency of excitation

$$\frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + \omega_n^2 \sin \theta_m = \omega^2 A \cos \omega t \quad (12)$$

$$\omega_n^2 = T_m / J_T$$

여기서, θ_m 을 식(13)과 같이 테일러 급수 전개(Taylor series)를 하여 식(12)에 대입하면, 최종적인 운동 방정식이 구성된다.

$$\sin \theta_m = \theta_m - \frac{\theta_m^3}{3!} \quad (13)$$

$$\frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + \omega_n^2 \left(\theta_m - \frac{\theta_m^3}{6} \right) = \omega^2 A \cos \omega t \quad (14)$$

식(14)는 Duffing 방정식과 동일한 형태를 갖는다. Ritz의 평균법(averaging method)을 사용하여, (14)에 식(15)를 대입하여 정리하면,^[9] 진폭과 진동수비와의 관계식은 식(16)이 된다.

$$\theta_m = a \phi(t) = a \cos \omega t \quad (15)$$

a : weight factor(amplitude of response)

$\phi(t)$: selected function of time

$$\frac{1}{8} a^3 = a \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 A \quad (16)$$

3. 2 해석 결과

가진 진폭 A를 0.1rad으로 하여 가진 하였을 때, 진동수 비에 대한 종동부 축 각변위의 진폭 변화를 구해보면 Fig.6와 같다.

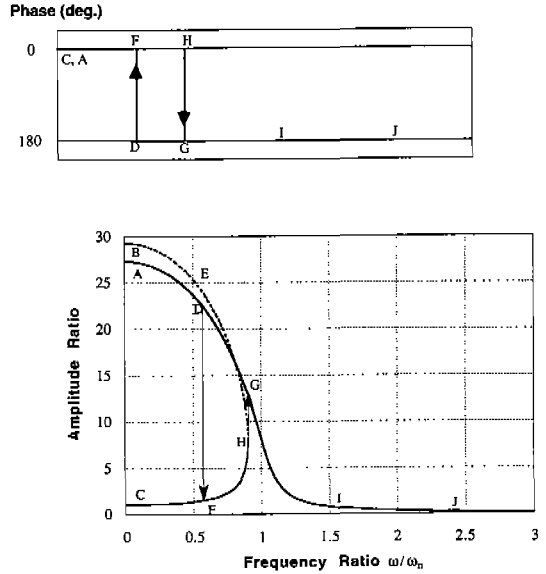


Fig. 6 Amplitude of main spindle with frequency ratio.(A=0.1rad)

$\omega/\omega_n=0$ 인 곳으로부터 가진 진동수를 증가시키면, CFH를 따라 진폭이 증가하고, H점에서 G점으로 점프현상을 보이며, 그 이후로는 GIJ를 따라가면서 진폭은 0에 수렴하게 된다. 가진 진동수를 ω_{cr} 보다 큰 값에서 점차로 작게 하여 해석하면, JIGDFC를 따라 진폭이 변하며, D에서 F로 점프현상에 의해 급변한다. 구간 HEB는 불안정한(unstable) 구간이며 실제 현상에서는 일어나지 않는다. H점은 ω_{cr} 일 때를 나타내고 ω_{cr}/ω_n 의 값은 0.90633이다.

4. 축계의 횡방향 변위의 진동 해석

4. 1 해석 이론

정밀 동력 전달 시스템의 해석을 위하여 Fig.7에 도시

된 것과 같이 정밀 동력 전달 시스템을 제작하였다.

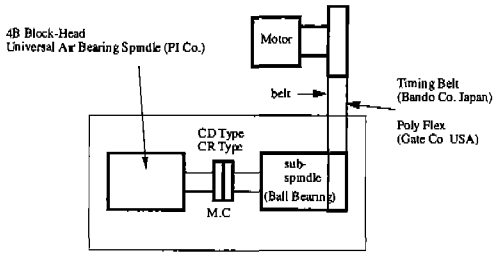


Fig. 7 Schematic diagram of a precision dynamic drive system

보조 주축은 두 개의 볼베어링으로, 주축은 공기 베어링으로 하우징에 의해 지지되고 있다. 축계를 유한요소법으로 모델링하기 위해서 우선 이 두 종류의 베어링의 강성을 알아야 한다. 보조 주축에 장착된 볼베어링의 강성은, 비선형성을 가지며 일반적으로 실험식으로 표현된다.^{[10][11]}

$$Stiff = \frac{dF_r}{dS} = n(1/\zeta) ZK \delta^{n-1} \cos \alpha \quad (17)$$

- Z : no. of balls
- δ : displacement
- n : constant(1.5 in case of ball bearing)
- α : contact angle
- K : load-deflection constant
- ζ : constant

주축에 장착된 공기 베어링의 강성은 공기압등 여러가지 조건 변화에 따라 달라진다. 실험에 사용된 PISA(U.S.A)의 4" Block-Head Universal Air Bearing Spindle의 경우, 공기압이 150psi 일 때 정격 사용되며 강성은 아래와 같다.

- a. 축 강성 : 35.72 kgf/ μ m
- b. 반경 강성 : 11.91 kgf/ μ m
- c. 각 강성 : 4.61 $\times 10^{-2}$ kgf·m/ μ rad

위에서 구한 강성치들을 바탕으로 베어링을 등가 강성의 트러스 요소로 모델링하였다. 보조 주축과 주축은 보 요소로 모델링하여 비틀림 진동은 무시하고 굽힘 진동만을 고려하였다. 또한, 영구 자석 커플링 부분과 어댑터 부분도 보 요소로 모델링하였다. 이 부분은 축에 비해 그 강성이 크므로 해석 결과 거의 변형이 일어나지 않고 강체와 같은

움직임을 나타내었다. 구동부와 종동부 커플링 사이에 작용하는 하중과 등가강성은 식(3)~(8)에서 계산하여 트러스 요소로 모델링하였다.

4. 2 해석 결과

4. 2. 1 자유 진동 해석

정밀 동력 전달 시스템에 대한 유한요소 모델링을 구성하여 세가지 종류의 마그네틱 커플링을(면형 : CD model) 장착한 각 경우에 대해, 축계의 자유 진동 해석을 수행하였으며, Table 1은 해석결과이다.

Table 1 Natural frequency of a dynamic drive system with magnetic coupling (gap=3mm)

No. of Mode	Natural Frequency (Hz)		
	CD 50F	CD 85F	CD 100F
1	522.0	458.0	429.0
2	545.0	476.0	446.0
3	661.0	657.0	656.0
4	789.0	788.0	786.0
5	914.0	915.0	913.0
6	917.0	916.0	914.0
7	970.0	1158.0	1190.0
8	993.0	1179.0	1212.0
9	2130.0	2084.0	2058.0
10	2131.0	2085.0	2060.0

Table 1에서 나타난 바와 같이 마그네틱 커플링의 크기에 따라 고유 진동수가 달라짐을 알 수 있다. 크기가 클수록 커플링이 갖는 강성치는 비례하여 커지게 된다. 그러나, 이러한 강성치의 변화 폭 보다도 커플링의 질량이 커지는 폭이 훨씬 큼으로 인하여 고유 진동수는 반대로 작아지는 결과를 보이게 된다.

4. 2. 2 강제 진동 해석

마그네틱 커플링에 의한 진동 절연 효과를 보기위하여 강제 진동 해석을 수행하였다. 자유 진동 해석에서 사용한 유한 요소 모델을 이용하고, 벨트에 의해 모터와 보조주축이 연결되는 부분에 100N의 동하중을 정현파 함수로 가진 하였다. 마그네틱 커플링의 구동부와 종동부 그리고 주축

우측단-여기에 선반인 경우 척이 있는 부분-의 동적 변위의 최대값과 가진부분과의 변위의 비를 계산하였다.

Table 2 Isolation of vibration in a dynamic drive system with magnetic coupling

Type of M.C.	Gap	CD 100F	CD 85F	CD 50F
500	3mm	0.083	0.0809	0.0677
	5mm	0.0802	0.078	0.0576
1000	3mm	0.0798	0.0783	0.0664
	5mm	0.0769	0.0752	0.0562
1500	3mm	0.0815	0.0792	0.0654
	5mm	0.0789	0.0762	0.0558

마그네틱 커플링을 장착한 축계의 강제 진동 해석 결과를 요약하면 다음과 같다. 첫째, 모터의 회전 속도의 증가에 따라 가진 위치에서의 변위는 감소하고 있으며, 주축의 우측단 변위도 감소한다. 둘째, 구동부와 종동부 사이의 간극이 3mm보다도 5mm에서 더 큰 진동 절연 효과가 모든 마그네틱 커플링 형태에서 나타나고 있는데, 이는 커플링의 간극이 클수록 비접촉 상태의 커플링의 등가 강성이 작아져 유연성을 갖기 때문이다. 셋째, 커플링의 크기가 작을수록 진동 절연 효과가 크게 발생되었는데, 이는 횡방향 변위 해석결과, CD 100F(면형)에 비해 CD 50F(면형)의 등가 강성이 유연하기 때문이다. 그런데 비접촉 상태의 구동부, 종동부 커플링의 등가 강성이 유연할수록 진동 절연 효과는 증대되나, 구동부의 동력을 종동부인 주축에 정확하게 전달하기 위해서는 비교적 크기가 큰 마그네틱 커플링을 사용해야 하는 문제점이 발생된다. 넷째, 전체적인 해석 결과, 가진 위치에서의 변위에 비해 주축 우측단에서의 변위가 Table 2에서 제시된 것과 같이 변위가 작게 해석되어 상당한 진동절연 효과를 나타내고 있는데, 이 요인으로는 비접촉 방식의 마그네틱 커플링의 사용과 일정 공기압에서 비교적 큰 지지 강성을 갖는 공기 베어링의 사용에 있다. 이는 주축의 지지 강성이, 하중 조건에 따라 변하게 되는 접촉식 베어링과는 다르게 일정하게 큰 값을 가지므로 종동부에서의 진동이 절연되었다.

5. 결 론

본 논문에서는 자석의 기본 개념을 도입하여 마그네틱 커플링이 가지는 동특성을 파악하고, 이러한 특성을 바탕으로 마그네틱 커플링을 장착한 축계의 횡방향 변위 진동과 비틀림 진동을 해석하는 방법을 제시하였다. 이론적 해석 방법을, 본 논문의 실험을 위해 제작된 정밀 동력전달 시스템에 적용시켜 횡방향 진동과 비틀림 진동을 시뮬레이션하였다. 본 논문을 통해서 얻어진 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 영구 자석 자체가 가지고 있는 재료의 불안정성 때문에 마그네틱 커플링은 불안정한 상태에서 그 기능을 나타내어야 한다. 이러한 불안정성은 간극이 작은 경우에 있어서의 강성의 급격한 감소 경향을 통해, 그리고 강성치가 양의 값을 갖는 것을 통해 근사적으로 알 수 있었다. 둘째, 횡방향 변위 해석에서는, 몇 종류의 마그네틱 커플링에 대하여 강성을 이론적으로 해석하였다. 간극이 3mm 이상 떨어진 경우에는 안정성을 유지하면서 동력전달이 가능하고, 또한 횡방향 변위 해석을 통해 구동부와 종동부의 축 중심을 일치시킴으로써 마그네틱 커플링을 장착한 축 시스템의 안정성을 유지할 수 있다. 셋째, 비틀림 진동의 이론적 해석 결과를 통해서, 가진 주파수가 고유 진동수의 2배 이상이 되면, 주축의 비틀림 진동은 거의 일어나지 않으며, 구동부와 종동부 사이에 위상차가 180° 발생되었다. 넷째, 면형(CD model) 마그네틱 커플링을 장착한 실험용 주축계의 횡방향 진동 해석을 통해, 등가 강성이 질량에 비해 상당히 큰 영향을 미치므로 고유 진동수가 400 Hz 보다 더 큰 값을 갖게 되었다. 이는 일반적인 공작 기계의 운전 속도인 1500~2000rpm 에서는 공진이 발생되지 않음을 알 수 있었다. 다섯째, 축계의 강제 진동 해석을 통해서, 가진 부분의 변위에 비해 주축의 변위가 10배 이상 작아짐을 볼 수 있다. 이러한 현상은 마그네틱 커플링이 횡방향 진동을 흡수하는 성질이 있음을 보여주는 것이다.

참 고 문 헌

1. C.J.Fellows, "Permanent Magnet Couplings", CME June 1979, pp.79-84
2. Jean Paul Yonnet, "A New Type of Permanent Magnet Coupling", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-17 No.6, November 1981
3. Jean Paul Yonnet, "Permanent Magnetic Bearing

- and Couplings”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-17, No.1, January 1981
4. R.M.Hornreich, S.Shtrikman, “Optimal Design of Synchronous Torque Couplers”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-14, No.5, September 1978
 5. Hiroyuki Kojima, Kosuke Nagaya, “Nonlinear Torsional Vibration of a Rotating Shaft System with a Magnet Coupling”, Bulletin of JSME, Vol. 27, No.228, June 1984
 6. Meirovitch, “Elements of Vibration Analysis”, McGRAW-HILL
 7. Weissmann, D., et al., Proc. 3rd Int. Workshop R.E-Co Mag. Appl., 6(1978), pp325
 8. 박 현, “마그네틱 커플링을 장착한 회전축계의 진동해석에 관한 연구”, 서울대학교 석사 학위 논문, 1992
 9. William Weaven Jr., “Vibration Problems in Engineering” pp166~
 10. 김 성걸, “베어링의 비선형 특성을 고려한 주축계 동특성 해석 연구”, 서울대학교 석사 학위 논문, 1988
 11. Tedric A. Harris, “Rolling Bearing Analysis”, John Wiley and Sons, Inc., 1966