

불확정 구조계의 확률유한요소해석

정 영 수*

1. 서 론

정적, 동적에 관계없이 구조해석의 본래의 목적은 구조물의 안전에 관한 신뢰성을 높임으로서 고품질의 경제적인 구조물을 만드는 것에 있다. 근래에는 Computer의 급속한 발달과 함께 강력한 수치해석기법인 유한요소법이 이러한 목적에 크게 기여하고 있으며 이를 이용한 많은 상용 Program등이 개발되어 있다.

그러나 많은 구조물은 자연환경하에 설치되어 지기 때문에 불확정한 외력을 받을 수밖에 없다. 따라서 의미있는 구조해석을 하기 위해서는 우선 외력에 관한 불확정성을 분명하게 해둘 필요가 있고 이 경우 비재현적 현상이므로 확률론에 기초를 둔 해석이 필요하게 된다.

해석하는 것에 따라서 구조물의 장래의 안전에 관한 신뢰성을 보증하는 방법을 얻을 수 있다고 생각한다.

한편 구조물이 안전성을 확보키 위해서는 外力의 불확정성 이외에 실제의 구조물이 해석을 위해 이상화되는 모델과는 다르게 되어 있으므로 구조물의 불확실성을 고려해야 한다. 실제로 유한요소 해석시 구조물의 해석 모델은 과거의 경험이나 공학적 판단에 기초하여 여러가지 구조물의 불확정성요소에 관계없이 이상화되어 최악의 경우에는 사고에 관계가 없다고 보증할 수 없는 것이다.

더우기 최근에는 장대교량, 초대형건축물 및 원자력발전소와 같은 중요한 구조물이 증가추세에 있으며 그들의 예기치 못할 사고위험성에 민감하게 느끼고 있는 우리의 현실에 구조물의 불확정성에 관계되는 연구 또는 外力에 대한 경우와 마찬가지로 많은 연구가 필요하리라 생각된다.

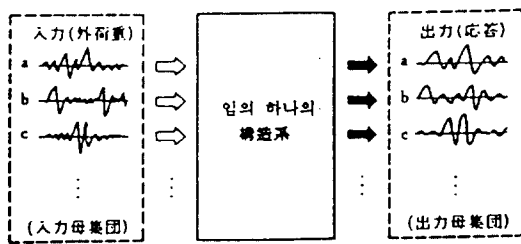


그림 1. 不確定 荷重境遇의 入出力系

그림 1은 외력이 불확정한 경우의 구조응답의 개념을 나타내고 있다. 즉 그림상의 입력과 그것에 대응하는 출력은 단지 몇개의 표본함수를 나타내는 것이고 그것들이 속하는 모집단의 통계량을

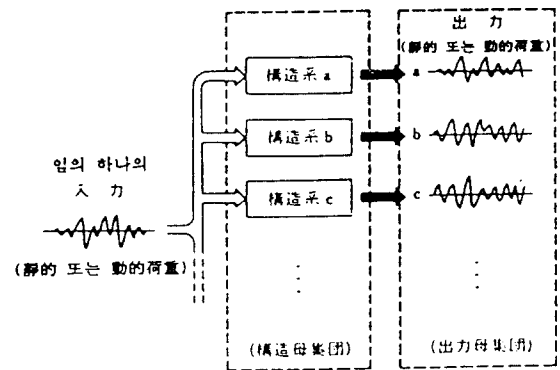


그림 2. 確率構造系の 概念圖

* 중앙대학교 신철대학 토목공학과

불확정 성질을 포함한 구조계는 확률론을 기초하여 확률구조계로서 처리할 수 있으며 그림 2는 그 개념을 표시한 것이다. 즉 입력은 동일하지만 구조계를 특정시키지 않으므로 그림과 같이 출력은 통계량을 갖는 집단으로 구성된다. 따라서 출력의 표본함수도 모집단을 형성하며 이 모집단의 통계량을 해석하여 구조물의 안전성을 파악할 수 있는 것이다. 확률 구조계의 출력모집단의 통계량으로부터 구조물의 신뢰성 평가를 위한 여러 방안들이 제시되었다. 그중 Monte Carlo 모의분석법은 구조계의 표본을 모집단으로부터 무작위로 추출한 후 구조해석을 수행하여 출력된 표본 통계량으로부터 구조물의 안전에 관한 신뢰성을 평가하는 것이다. 그러나 소규모의 구조계인 경우를 제외하고는 많은 계산시간이 소요되므로 그다지 현실적이지 못한 것으로 인식되고 있다.

本 少考는 불확정 구조계의 확률유한요소해석에 관해서 참고문헌[1]을 참조하여 기본개념 및 간단한 예제를 다음과 같이 기술하였다.

2. 確率變數函數

구조응답의 임의성분 y 는 그 계를 구성하는 Parameter들인 x_1, x_2, \dots 의 함수인

$$y = g(x_1, x_2, \dots) \quad (1)$$

으로 나타낼 수 있다. 한편 확률구조계에서는 상기 식의 변수 x_1, x_2, \dots 의 일부 또는 전부가 어떤 특성을 갖는 확률변수(Random Variable)라고 가정하는 것으로서 확률해석은 이들 확률변수의 함수인 y 의 확률적 특성을 구한 후 이로부터 구조물의 안전성을 파악코자 하는 것이다.

2.1 確率變數의 確率密度函數

확률변수들과 구조응답의 관계함수를 일반적으로 기술하면 다음과 같다. 즉

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned} \quad (2)$$

에 있어서 확률변수 $X_1, X_2, \dots, X_n(X)$ 의 결합확률 밀도함수(Joint Probability Density Function)인, $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 가 주어지면 실제의 출력인 y_1, y_2, \dots, y_n 과의 관계로부터 다음과 같은 연립방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (3)$$

만약 x_1, x_2, \dots, x_n 들이 유일한 실수해를 갖는다면 확률변수 $Y(=\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\})$ 의 결합확률밀도는 다음 식에 의해 평가된다.

$$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\left| J \left(\frac{g_1, g_2, \dots, g_n}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right) \right|} \quad (4)$$

단,

$$J \left(\frac{g_1, g_2, \dots, g_n}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right) = \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (5)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

윗 식에서 특히 대문자 X_i, Y_i 와 소문자 x_i, y_i 를 확률변수와 그들의 실제값으로 구별하며 변환행렬인 Jacobian : $J \left(\frac{g_1, g_2, \dots, g_n}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right)$ 의 성분 $\frac{\partial g_i}{\partial x_i}$ 는 (x_1, x_2, \dots, x_n) 에 관한 편미분값을 의미한다. 만약 연립방정식 (3)이 1組以上の 해를 갖는다면 식 (4)의 우변에 전부의 해에 대응하는 項으로 나열되며 또 식 (3)이 실수해를 갖지 않는다면 $f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ 으로 한다.

그림 3은 2개 변수의 경우 (y_1, y_2) 에 관한 해가 몇개 존재하며, $((x'_1, x'_2) ; i=1, 2, 3, \dots)$ 에 대한 변

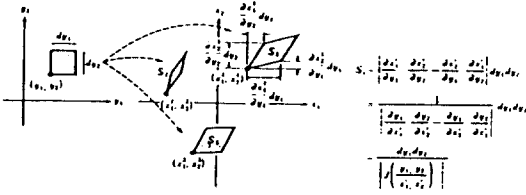


그림 3. 確率變數 變換過程의 對應하는 微小領域

환의 개념을 나타내는 것이다. 즉 $y_1 y_2$ 평면의 미소구형영역 $dy_1 dy_2$ 는 $x_1 x_2$ 평면에서는 $dy_1 dy_2 / |J(y_1 y_2 / x_1 x_2)|$ 의 평행사변형 영역군에 대응하며 양 좌표계에서의 영역內的 확률값이 동일하다는 것으로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$f_Y(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \sum f_X(x_1, x_2) dy_1 dy_2 / |J(y_1 y_2 / x_1 x_2)| \quad (6)$$

Y_i 의 개수가 $m(i=1, 2, \dots, m)$ 으로 X_i 의 개수 n 보다 큰 경우에는 Y 의 확률밀도함수는 Singular이고 또 반대($m < n$)의 경우에는 보조변수 $Y_{m+1} = X_{m+1}, Y_{m+2} = X_{m+2}, \dots, Y_n = X_n$ 을 도입하여 실행한 후

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_m}(y_1, y_2, \dots, y_m) = \iint \dots \int_{(n-m)회} f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_{m+1} dy_{m+2} \dots dy_n \quad (7)$$

이 되는 주변분포를 취하는 것에 의해 y_1, y_2, \dots, y_m 의 결합확률밀도가 평가된다. 이로부터 Y 의 확률적 특성을 구할 수 있으며 구조물의 신뢰도를 파악할 수 있다.^[1, 2]

2.2 1차 및 2차 近似法

한편, 근사적 수법중에서 대표적이고 확률유한 요소법의 기초를 주는 Taylor 전개에 의한 방법을 서술하면 다음과 같다. 즉 확률변수 X_1, X_2, \dots, X_n 의 함수로써

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (8)$$

가 주어진 경우에 이 식을 기대값 $\bar{X} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$ 의 범위에서 Taylor 전개하면 다음과 같다.

$$Y = g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_x (X_i - \bar{X}_i) \quad (9) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_x (X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j) + \dots$$

$(\cdot)_x$ 는 미분값을 $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$ 에서 평가하는 것을 의미한다. 그러나 이들 미분값은 주어진 것과 같이 순조로운 형태로 나타낼 수 있는 함수인 경우에 한해서만 본 기법을 적용할 수 있는 것이다. 가령 우변의 제 2항 즉 X 의 1차항까지 고려한다면 Y 의 기대값, $E[Y]$ 와 분산, $\text{Var}[Y]$ 는

$$E[Y] = g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \quad (10)$$

$$\text{Var}[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \right)_x \text{Cov}[X_i X_j] \quad (11)$$

와 같다. $\text{Cov}[X_i X_j]$ 는 $E[(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)]$ 가 되는 2차 모우멘트를 의미하고 공분산(Covariance)이라 일컫는다. 이것이 잘 알려진 1차 근사법(First-Order Approximation) 또는 식 (9)에서 우변의 3항 즉 X 의 2차항까지 고려하면

$$E[Y] = g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_x \text{Cov}[X_i X_j] \quad (12)$$

$$\text{Var}[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_x \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \right)_x \text{Cov}[X_i X_j] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_x \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_j \partial X_k} \right)_x E[(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)(X_k - \bar{X}_k)] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_x \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_k \partial X_l} \right)_x \times (E[(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)(X_k - \bar{X}_k)(X_l - \bar{X}_l)] - \text{Cov}[X_i X_j] \text{Cov}[X_k X_l])$$

를 유도할 수 있다. 이것을 2차 근사법(Second-Order Approximation)이라 부른다. 함수가 식(8)이 아닌 식(3)의 형태를 갖는 경우에도 각각의 함수 g_1, g_2, \dots 에 대해 같은 모양으로 전개할 수 있다. 예

를 들어 Y_i 와 Y_j 의 공분산 $Cov[Y_i, Y_j]$ 등을 평가할 수 있다. 이해를 돕기 위한 간단한 예제를 소개하면 다음과 같다.

2.3 數値解析例題

이상의 2가지 방법을 그림 4의 간단한 유한요소 모델에 적용하면 다음과 같다.

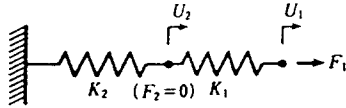


그림 4. 確定的 外力 F_1 를 받는 確率剛性모델

즉 그림 4의 직열탄성계에서 강성계수 K_1, K_2 가 어떤 확률적 특성을 갖는 확률변수라 가정하고 그 경우 질점 1에 주어진 확정적外力 F_1 에 의해서 발생하는 변위가 어떤 확률특성을 갖는가를 조사해보면 우선 系の 강성방정식은 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1+K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

상기 식을 변위에 관해서 풀면

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{K_1 K_2} \begin{bmatrix} K_1+K_2 & K_1 \\ K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

이다. 우선 $K_1 K_2$ 의 결합확률밀도함수 $f_{K_1, K_2}(k_1, k_2)$ 가 주어진 경우 다음과 같이 변위 U_1, U_2 의 결합확률밀도함수 $f_{U_1, U_2}(u_1, u_2)$ 를 평가할 수 있다. 처음에 식(5)를 이용해서 변환 Jacobian은

$$\begin{aligned} J \begin{pmatrix} u_1, u_2 \\ k_1, k_2 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{k_1+k_2}{k_1 k_2} F_1 \right) & \frac{\partial}{\partial k_2} \left(\frac{k_1+k_2}{k_1 k_2} F_1 \right) \\ \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{1}{k_2} F_1 \right) & \frac{\partial}{\partial k_2} \left(\frac{1}{k_2} F_1 \right) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{k_1^2} F_1 & -\frac{1}{k_2^2} F_1 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} F_1 \end{vmatrix} = \left(\frac{F_1}{k_1 k_2} \right)^2 \quad (16) \end{aligned}$$

이 된다. 한편 $u_1 \neq u_2$ 이므로 식(14)로부터

$$k_1 = \frac{F_1}{u_1 - u_2} \quad (17)$$

$$k_2 = \frac{F_1}{u_2}$$

을 얻을 수 있으므로 u_1, u_2 에 대한 k_1, k_2 의 해는 1개 조만 존재하는 것을 알 수 있다. 따라서 식(4)에 기초하여 결합확률밀도 함수 $f_{U_1, U_2}(u_1, u_2)$ 가 다음과 같이 평가된다.

$$\begin{aligned} f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) &= \left(\frac{k_1 k_2}{F_1} \right)^2 f_{K_1, K_2}(k_1, k_2) \\ &= \left\{ \frac{F_1}{(u_1 - u_2) u_2} \right\}^2 f_{K_1, K_2} \left(\frac{F_1}{u_1 - u_2}, \frac{F_1}{u_2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

더우기 U_1 의 확률밀도함수 $f_{U_1}(u_1)$ 을 평가하려고 하면

$$f_{U_1}(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) du_2 \quad (19)$$

을 수행하면 구할 수 있다. 만약 $f_{U_1}(u_1)$ 만을 求하는 것이 목적이면 기 언급한 바와 같이 보조변수 $v_1 = k_2$ 를 도입해서 식(16)과 식(17) 대신에

$$\begin{aligned} J \begin{pmatrix} u_1, v_1 \\ k_1, k_2 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{k_1+k_2}{k_1 k_2} F_1 \right) & \frac{\partial}{\partial k_2} \left(\frac{k_1+k_2}{k_1 k_2} F_1 \right) \\ \frac{\partial}{\partial k_1} \frac{1}{k_2} & \frac{\partial}{\partial k_2} \frac{1}{k_2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{F_1}{k_1^2} \quad (20) \end{aligned}$$

$$k_1 = \frac{v_1 F_1}{u_1 v_1 - F_1} \quad (21)$$

$$k_2 = v_1$$

가 된다. 따라서 결합확률밀도함수는

$$\begin{aligned} f_{U_1, v_1}(u_1, v_1) &= \frac{k_1^2}{F_1} f_{K_1, K_2}(k_1, k_2) \\ &= \left(\frac{v_1}{u_1 v_1 - F_1} \right)^2 |F_1| f_{K_1, K_2} \left(\frac{v_1 F_1}{u_1 v_1 - F_1}, v_1 \right) \end{aligned} \quad (22)$$

을 거쳐서

$$f_{U_1}(v_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U_1, V_1}(u_1 v_1) dv_1 \quad (23)$$

처럼 $f_{U_1}(u_1)$ 을 구할 수 있다.

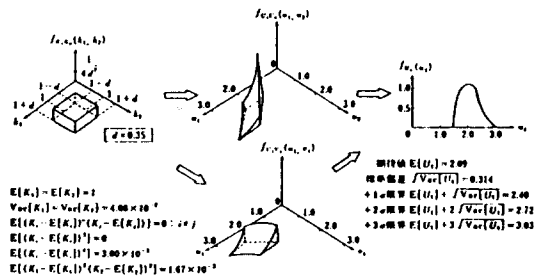


그림 5. 確率變數 變換에 의한 變位の 解析結果

그림 5는 하나의 例로써 $F_1 = 1$ 그리고 K_1, K_2 의 결합확률밀도함수가 다음의 형태일 때를 보인 것이다.

$$f_{K_1, K_2}(k_1, k_2) = \begin{cases} \frac{1}{4d^2} & ; 1-d \leq k_1, k_2 \leq 1+d \\ 0 & ; \text{기타} \end{cases} \quad (24)$$

그림 5처럼 $d=0.35$ 인 경우에는

$$\begin{aligned} E[K_1] &= \bar{K}_1 = \iint k_1 f_{K_1, K_2}(k_1, k_2) dk_1 dk_2 \quad (25) \\ E[(K_1 - \bar{K}_1)^n (K_2 - \bar{K}_2)^m] \\ &= \iint (k_1 - \bar{K}_1)^n (k_2 - \bar{K}_2)^m f_{K_1, K_2}(k_1, k_2) dk_1 dk_2 \quad (26) \end{aligned}$$

이를 기초로 K_1, K_2 의 기대값 즉 기대값에 대한 모멘트 및 $f_{U_1}(u_1)$ 로 부터 수식적으로 u_1 의 통계값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E[U_1] = \bar{U}_1 = \int u_1 f_{U_1}(u_1) du_1 \quad (27)$$

$$\text{Var}[U_1] = \int (u_1 - \bar{U}_1)^2 f_{U_1}(u_1) du_1 \quad (28)$$

다음에는 1차 및 2차 근사법에 의해서 U_1 의 기대값과 분산을 평가하는 것을 시험해 본다. 식 (15)에 주어진 U_1 을 식 (9)에 따라서 Taylor 전개

를 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\bar{K}_1 + \bar{K}_2}{\bar{K}_1 \bar{K}_2} F_1 - \left\{ \frac{F_1}{\bar{K}_1^2} (K_1 - \bar{K}_1) + \frac{F_1}{\bar{K}_2^2} (K_2 - \bar{K}_2) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{2F_1}{\bar{K}_1^3} (K_1 - \bar{K}_1)^2 + \frac{2F_1}{\bar{K}_2^3} (K_2 - \bar{K}_2)^2 \right\} + \dots \quad (29) \end{aligned}$$

따라서 1차 근사법의 식 (10), (11)에 의하면

$$E[U_1] = \frac{\bar{K}_1 + \bar{K}_2}{\bar{K}_1 \bar{K}_2} F_1 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[U_1] &= \frac{F_1^2}{\bar{K}_1^4} \text{Var}[K_1] + \frac{F_1^2}{\bar{K}_2^4} \text{Var}[K_2] \\ &+ \frac{2F_1^2}{\bar{K}_1^2 \bar{K}_2^2} \text{Cov}[K_1, K_2] \quad (31) \end{aligned}$$

2차 근사법의 식 (12), (13)에 의하면

$$\begin{aligned} E[U_1] &= \frac{\bar{K}_1 + \bar{K}_2}{\bar{K}_1 \bar{K}_2} F_1 + \frac{F_1}{\bar{K}_1^3} \text{Var}[K_1] \\ &+ \frac{F_1}{\bar{K}_2^3} \text{Var}[K_2] \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[U_1] &= \frac{F_1^2}{\bar{K}_1^4} \text{Var}[K_1] + \frac{F_1^2}{\bar{K}_2^4} \text{Var}[K_2] \\ &+ \frac{2F_1^2}{\bar{K}_1^2 \bar{K}_2^2} \text{Cov}[K_1, K_2] \\ &- \frac{2F_1^2}{\bar{K}_1^5} E[(K_1 - \bar{K}_1)^3] \\ &- \frac{2F_1^2}{\bar{K}_2^5} E[(K_2 - \bar{K}_2)^3] \\ &- \frac{2F_1^2}{\bar{K}_1^3 \bar{K}_2^2} E[(K_1 - \bar{K}_1)(K_2 - \bar{K}_2)^2] \\ &- \frac{2F_1^2}{\bar{K}_1^2 \bar{K}_2^3} E[(K_1 - \bar{K}_1)^2 (K_2 - \bar{K}_2)] \\ &- \frac{2F_1^2}{\bar{K}_1^3 \bar{K}_2^2} E[(K_1 - \bar{K}_1)^2 (K_2 - \bar{K}_2)] \\ &+ \frac{F_1^2}{\bar{K}_1^6} \{E[(K_1 - \bar{K}_1)^4] - (\text{Var}[K_1])^2\} \\ &+ \frac{F_1^2}{\bar{K}_2^6} \{E[(K_2 - \bar{K}_2)^4] - (\text{Var}[K_2])^2\} \\ &+ \frac{2F_1^2}{\bar{K}_1^3 \bar{K}_2^3} \{E[(K_1 - \bar{K}_1)^2 (K_2 - \bar{K}_2)^2] \\ &- \text{Var}[K_1] \text{Var}[K_2]\} \quad (33) \end{aligned}$$

을 얻을 수 있다. 앞의 경우와 같이 $F_1 = 1$ 그리고 $d=0.2, 0.35, 0.5$ 의 3 경우에 대한 K_1, K_2 의 각 모우먼트($d=0.035$ 에 대해서는 그림 5에 도시됨)를 상기 식을 이용하여 구한 U_1 의 통계량 및 정밀해를 표 1에 요약하였다.

표 1. 1차 및 2차 근사법에 의한 변위 U_1 의 통계량과 정밀해

	d = 0.2			d = 0.35			d = 0.7		
	근사값		정밀값	근사값		정밀값	근사값		정밀값
	1차	2차		1차	2차		1차	2차	
$E[U_1]$	2.00	2.03	2.02	2.00	2.08	2.09	2.00	2.17	2.20
$\sqrt{\text{Var}[u_1]}$	0.163	0.164	0.168	0.286	0.290	0.314	0.408	0.422	0.503
$E[U_1] + \sqrt{\text{Var}[u_1]}$	2.16	2.19	2.19	2.29	2.37	2.40	2.41	2.59	2.70
$E[U_1] + 2\sqrt{\text{Var}[u_1]}$	2.33	2.36	2.36	2.57	2.66	2.72	2.82	3.01	3.21
$E[U_1] + 3\sqrt{\text{Var}[u_1]}$	2.49	2.52	2.52	2.86	2.95	3.03	3.22	3.44	3.71

3. 問題點 및 結論

위에서 기술한 방법은 식 (1)에 표시한 것처럼 구조응답 y 가 계를 구성하는 Parameter x_1, x_2, \dots 에 의해 적절히 표시될 수 있는 경우를 전제로 하고 있다. 즉 위 例題의 유한요소해석에서는 강성방정식 식 (14)가 식 (15)의 형태로 표시될 수 있는 경우인 것이다. 확실히 m 개의 연립 1차 방정식

$$\begin{aligned} K_{11}U_1 + K_{12}U_2 + \dots + K_{1m}U_m &= F_1 \\ K_{21}U_1 + K_{22}U_2 + \dots + K_{2m}U_m &= F_2 \\ \dots\dots\dots \\ K_{m1}U_1 + K_{m2}U_2 + \dots + K_{mm}U_m &= F_m \end{aligned} \quad (34)$$

의 해 U_i 는 계수행렬 K 가 Nonsingular일 때 Cramer의 방법에 의해

$$U_i = \frac{\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1i-1} & F_1 & K_{1i+1} & \dots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2i-1} & F_2 & K_{2i+1} & \dots & K_{2m} \\ \dots\dots\dots \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mi-1} & F_m & K_{mi+1} & \dots & K_{mm} \end{vmatrix}}{|K|} \quad (35)$$

라고 주어지기 때문에 다음과 같은 정적문제라 간주할 수가 있다.

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (36)$$

상기 식의 형태로 주어지는 유한요소해석에 관해서는 이미 기술한 방법을 적용하는 것이 불가능하지 않을 지도 모른다. 그러나 강성 Matrix $[K]$ 가 만들어지는 과정을 고려하면 각 성분 K_{ij} 는 일반적으로 구조계를 구성하는 확률변수로서가 아니고 오히려 복수이상의 확률변수의 함수가 되는 것이다. 또한, 행렬식을 계산해야만 하는 것을 고려하면 계산량은 방대해질 것이다. 한편, 구조해석의 또 하나의 중요한 과정인 선형고유치 문제에

$$(K - \lambda M)\phi = 0 \quad (37)$$

를 요구하는 동적문제를 고려했을 때도 간결하고 실용적인 방법이 요망되어 진다. 따라서 Perturbation기법에 의해 정식화된 확률유한요소법을 정적구조해석 및 고유치 문제 등에 적용하여 결과치의 분산특성을 구하는 연구가 주로 많이 수행된 바 있으며 최근에는 Perturbation기법 대신에 Yamazaki[3] 등이 Neumann Expansion기법을 이용하여 Monte Carlo모의분석시 요구되는 방대한 양의 CPU시간을 줄이는 연구도 수행되었으며 Kam[4] 등은 축력의 영향을 고려하는 비선형 구조해석에도 확률이론을 도입하여 연구하였다. 이상과 같이 기존의 유한요소해석법에 확률이론을 접목시킨 확률론적 유한요소해석에 관한 연구는 1975년 Handa[5] 등이 구조해석에 처음으로 도입한 이래 작금에는 대형구조물 및 원자력발전소와 같은 많은 위험성을 내포한 구조물의 건설로 이 분야에 대한 연구는 한층 심도 깊게 수행되어야 하리라 생각되며 최근 국내에서도 이 분야와 관련하여 정영수[6], 김지호[7] 등이 연구논문을 발표한 바 있다. 특히 Computer의 급속한 발달은 이러한 분야의 연구가능성을 더 한층 크게 하였으며 본 少考는 구조해석분야의 이러한 작금의 추세에 조금이나마 도움이 되고자 준비한 것이다.

4. 參考文獻

- 1) Nagakiri, S. and Hisada D., "確率有限要素法の入門(不確定構造の解析)," 培風館, 1985.
- 2) Elishakoff, S., "Probabilistic Methods in the Theory of Structures," John Wiley & Sons Inc., 1983.
- 3) Yamazaki, F., Shinozuka, M. and Dasgupta, G., "Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis," Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114, No.8, ASCE, 1988.
- 4) Kam, T. Y. and Lin, S. C., "A Procedure for Probabilistic Analysis of Nonlinear Structures," Vol. 36, No.4, Computer and Structures, 1990.
- 5) Handa, K. and Anderson, K., "Application of Finite Element Method in the Static Analysis of Structures," International Conference on Structural Safety and Reliability(ICOSSAR), Elsevier, 1981.
- 6) Chung, Y. S. and Kim, K. J., "Response Variability for RC Frames by the Stochastic Finite Element Method," Proceedings of the 2nd Korea-French Seminar on Computational Mechanics and Structural Engineering, 1993.
- 7) 김지호, "확률유한요소법에 의한 구조신뢰성해석", 서울대학 조선공학과, 박사학위논문, 1991.