

평면 원호아치의 좌굴해석을 위한 동적 비선형해석 프로그램의 개발

Development of Nonlinear Dynamic Program for Buckling Analysis of Plane Circular Arches

허택녕*
Huh, Taik-Nyung
오순택**
Oh, Soon-Taek

.....

요 약

본 논문은 형상의 비선형성을 고려한 큰 동하중을 받는 낮은 원호아치의 동적해석에 관한 연구이다. 따라서 낮은 원호아치를 대상으로 동적 비선형 해석을 수행하고 임계좌굴하중을 구할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 개발하는데 주안점을 둔다.

형상의 비선형성은 Lagrangian 운동좌표를 고려하여 해석하였으며 비선형 동적 운동방정식을 풀기 위하여 유한요소법을 사용하였다. 개발된 프로그램을 사용하여 만재 방사형 등분포하중을 받는 원호아치를 해석하고, 그 결과치를 다른 연구결과와 비교하여 검증하였다. 또한 여러가지의 형상의 아치에 대한 좌굴 해석을 실시하여 임계좌굴하중을 구하였으며 기존의 연구와 비교하여 정확성을 확인하였다. 모형해석을 통해서 큰 동하중을 받는 원호아치는 기하학적 비선형 거동을 고려하여 해석되어야 하며, 아치가 낮아질수록 좌굴발생 가능성이 높아짐을 알 수 있다.

Abstract

This paper summarizes a dynamic analysis of the shallow circular arches under dynamic loading, considering the geometric nonlinearity. The major emphasis is placed on the development of computer program, which is utilized for the analysis of the nonlinear dynamic behavior and for the evaluation of the critical buckling loads of the shallow circular arches.

Geometric nonlinearity is modeled using Lagrangian description of the motion and a finite element analysis procedure is used to solve the dynamic equation of motion. A circular arch subject to normal step load is analyzed and the results are compared with those from other researches to verify the developed program. The critical buckling loads of arches are estimated using the non-dimensional time, load and shape parameters and the results are also compared with those from the linear analysis. It is found that geometric nonlinearity plays an important role in the analysis of shallow arches and the probability of buckling failure is getting higher as arches become shallower.

.....

* 정회원 : 연세대학교 산업기술연구소 선임연구원
** 정회원 : 서울산업대학교 건설구조공학과 전임강사

이 논문에 대한 토론을 1994년 9월 30일까지 본 학회에 보내 주시면 1995년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

아치는 양지점을 수평으로 이동하지 못하도록 지지하여 지점의 수평반력이 시간내에 압축력으로 작용하게되므로 일반 형고에 비하여 긴 시간의 교량건설에 사용될 수 있다. 특히, 아치는 곡선형태이므로 안정되고 미관이 아름답기 때문에 오랜 옛날부터 널리 사용된 구조형식이다. 최근에는 재료공학의 발달로 강재의 고강도 및 경량화가 실현되었으며, 해석방법 및 설계기술의 발달로 인하여 아치의 단면은 작아지는 반면, 시간은 더욱 길어지는 추세에 있다. 따라서 과거의 미소변형이론에 의하여는 그 거동을 정확히 구명할 수 없다. 더욱이 아치구조의 규모가 커지고 또한 충격하중, 지진하중 등을 받을 경우, 비선형해석은 필수적이며 동하중 작용에 따른 안정성 연구가 중요한 문제로 등장하게 되었다.

기둥, 아치, 링, 판과 같은 구조요소의 안정성에 관한 연구는 오랜동안 수학자와 기술자들의 관심사가 되어왔는데, 1744년 Euler에 의한 기둥의 연구가 최초로 기록된 연구이다. 본 연구에서 대상으로 하는 아치의 동적 안정성의 연구로는 1952년 Bolotin⁽¹⁾이 압축과 휨을 받는 대칭아치의 동적안정문제를 연구한 것이 시초로 볼 수 있다. 1962년 Budiansky와 Roth⁽²⁾는 양단 고정인 낮은 사각형 곡면판을 연구하는데 있어서, 하중의 증가에 대하여 응답이 최대로 증가할 때의 하중으로 snap-through 하중을 정의하여 동적 임계기준을 제안하였다.

Humphreys⁽³⁾는 1966년 등분포 동하중이 작용하는 낮은 원호아치의 처짐을 Galerkin방법에 의한 해석과 실험적 방법에 의하여 연구했다. Lock⁽⁴⁾는 1966년에 단순 지지된 정현아치에 분포 step하중이 작용하는 경우의 비선형 운동방정식을 Galerkin 방법을 이용하여 동적 좌굴을 해석하였다. Fulton과 Barton⁽⁵⁾은 1971년에 고정단 아치의 임의의 위치에 집중 경사하중이 작용하는 경우의 동적 snap-through에 관하여 연구하였다.

1976년, Lo와 Masur⁽⁶⁾는 등분포 step하중을 받는 단순지지 원호 아치에 대하여, 운동을 지배하는 적분방정식을 유도하여 유한요소계로 전환하

고, 이를 Newmark- β 방법으로 수치적분하므로써 대칭 좌굴형에 대하여 연구하였다. Fitzgerald와 Plaut⁽⁷⁾는 1980년에 3개의 독립적인 step하중 또는 충격하중을 받는 낮은 아치에 Welton⁽⁸⁾의 아치모형을 적용시켜 Lagrange 운동방정식을 유도하고, 임계하중을 구하여 상관곡선을 작성하였고 정적인 경우와 비교하였다. Gregory와 Plaut⁽⁹⁾는 1982년 양단 힌지 정현아치의 snap-through 좌굴에 대한 여러가지 동하중의 상관적 관계를 연구했다. 1984년 이병구⁽¹⁰⁾는 아치의 진동에 대한 미분방정식을 Runge-Kutta 방법과 시행착오적 고유치문제를 이용하여 해석하고 프로그램화하였다. 그리고 프로그램을 사용하여 양단고정 포물선 아치의 자유진동특성을 연구하였다. 1987년 박광규⁽¹¹⁾는 낮은 아치의 미소요소에 발생하는 단면력과 관성력을 고려하여 동적 평형방정식을 유도하고, 이 식을 Runge-Kutta 방법으로 수치해석하여 양단힌지 포물선 아치의 임계하중을 산출하고 이를 상관곡선으로 도시하였다. 1989년 안주옥⁽¹²⁾은 초기 축방향력을 받는 아치에 고유치해석 및 모드중첩법을 적용하여 원호 및 포물선 아치의 자유진동 및 동적응답해석을 수행하였다.

이상에서 살펴본 연구는 대부분 아치의 거동을 수직처짐만을 자유도로 하여 지배미분방정식을 수치해석 또는 해석적 방법으로 해석한 것들로서 아치를 평면문제로 해석한 것은 거의 없는 실정이다. 따라서 좌굴해석시에도 수직처짐만을 고려하여 좌굴의 발생여부를 판단하였기 때문에 비대칭좌굴에서 중요한 요소인 수평처짐은 고려할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 2차원 평면해석방법과 수평처짐을 적용하여 보다 정확한 좌굴현상을 구명하도록 한다.

2. 동적 비선형해석

동하중을 받는 구조물에 있어서 그 변위가 과대할 경우, 형상의 변화에 따른 비선형성을 고려하여야 한다. 그러므로, 구조물의 운동을 지배하는 방정식은 변형된 형태에 기준한 운동방정식이 된다. 본 연구에서는 이 운동을 Lagrangian 좌표계에 의하여 묘사하도록 한다.

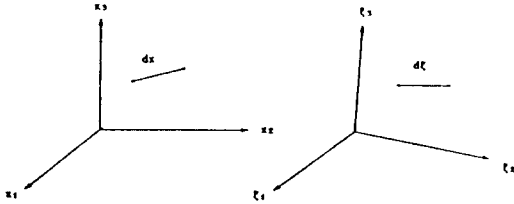


그림 1. 변형되지 않은 상태의 물체와 변형된 물체

변형되지 않은 최초의 물체의 위치를 $x_i (i=1, 2, 3)$, 시간 t 에서의 변위를 u_i 라 하면 시간 t 에서의 물체입자의 좌표, ξ_i 는

$$\xi_i = x_i + u_i \tag{1}$$

과 같다. 그림 1에 표시된 것과 같이 일정시간 경과 후 변형된 물체의 변형률을 변형되지 않은 상태의 좌표계를 기준으로 나타내면 다음과 같은 Green의 변형률로 표시된다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \tag{2}$$

이에 대응되는 응력텐서는 Piola Kirchhoff의 제2응력 S_{ij} 로서

$$S_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} J \sigma_{kl} \tag{3}$$

이다. 식(3)에서 σ_{kl} 는 Cauchy 응력이고 J 는 Jacobian 행렬이다. Newton의 제2법칙에 의하면, 선형운동량의 시간미분(material time derivative)은 작용력의 크기와 같으므로 다음과 같은 비선형 운동방정식을 구할 수 있다.⁽¹³⁾

$$\rho_0 \frac{D^2 u_i}{Dt^2} = [(\delta_{ik} + u_{i,k}) S_{nk}]_{,n} + \rho_0 f_i \tag{4}$$

여기서 ρ_0 는 시간 t_0 의 단위체적당 질량, f_i 는 시간 t 에서 단위체적당 물체력, D/Dt 는 시간미분이다. 가상변위 δu_i 를 식(4)에 곱한 후 물체 전체에 걸쳐 적분하면 다음과 같은 초기형상이 투영된 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\int_{\Omega_0} S_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega_0 = \int_{\Gamma_0} t_{0i} \delta u_i d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \rho_0 (f_i - \frac{D^2 u_i}{Dt^2}) \delta u_i d\Omega_0 \tag{5}$$

여기서 $\delta \epsilon_{ij}$ 는 δu_i 에 적합한 가상 Green 변형률, Ω_0 와 Γ_0 는 초기시간 t_0 에서의 체적 및 표면적, t_{0i} 는 변형 전 단위면적 당으로 치환된 표면력이다.

식(5)를 이산화하여 한 유한요소에 대한 임의의 시간에서의 운동방정식을 구성하면 다음 식으로 표기된다.⁽¹³⁾

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([K_L] + [K_{NL}])\{q\} = \{F\} \tag{6}$$

여기서, $[M]$ 은 consistent 질량행렬로서,

$$[M] = \int_{\Omega_0} [N]^T [N] \rho_0 d\Omega_0 \tag{7}$$

이며, $[K_L] + [K_{NL}]$ 은 비선형 강성도행렬로서

$$[K_L] = \int_{\Omega_0} ([B_L] + [B_{NL}]^T [C]) ([B_L] + [B_{NL}]) d\Omega_0 \tag{8}$$

$$[K_{NL}] = \int_{\Omega_0} [B']^T [s'] [B'] d\Omega_0 \tag{9}$$

이며, $\{F\}$ 는 임의의 시간에서의 하중항으로

$$\{F\} = \int_{\Omega_0} [N]^T \{f\} \rho_0 d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0} [N]^T \{t_0\} d\Gamma_0 \tag{10}$$

이다. 이들 식에서 $[N]$ 은 형상함수행렬로서 본 연구에서는 평면요소에 대하여 8절점 등매개요소를 사용하여 2×16 행렬이 된다. 또한, $[B_L]$ 과 $[B_{NL}]$ 은 각각 선형 및 비선형 Green 변형률-절점변위 행렬, $[C]$ 는 Piola Kirchhoff 제2응력-Green 변형률행렬, $[B']$ 은 변위경사-절점변위 행렬, $[S]$ 는 Piola Kirchhoff 제2응력들로 구성된 행렬이다. 식(7)로부터 식(10)의 적분은 Gauss-Legendre의 수치적분법에 의하여 각 요소 별로 계산될 수 있다. 적분된 행렬과 벡터는 전체 구조계에 적절하게 조립될 수 있다.

이 과정을 마치면 시간에 대한 2차 미분방정식의 수치적분이 수행되어야 한다. 동적 평형방정식

에 대한 시간적분 방법으로는 방정식을 변형하지 않고 적분을 하는 방법인 직접적분 방법과 적분하기 전에 방정식을 고유벡터를 이용하여 조합된 형태를 변환시켜 해를 구하는 모드중첩 방법⁽¹⁴⁻¹⁶⁾으로 나눌 수 있다.

직접적분방식에는 explicit 방법과 implicit 방법으로 구별된다. 대표적인 explicit 방법으로는 중앙차분방법⁽¹⁷⁻¹⁹⁾이 있으며 implicit 방법에는 Houbolt⁽²⁰⁾, Wilson⁽²¹⁾, Newmark⁽²²⁻²⁵⁾ 방법 등이 있다. 위 방법들은 각기 장단점이 있는 것으로서 해석하려고 하는 대상 구조물이 무엇인가에 따라 그 효과의 정도가 다르다. 그러나 이 중 implicit 방법은 항상 안정된 방법이기 때문에 비교적 큰 시간간격을 사용할 수 있는 장점이 있으므로 본 논문에서는 Newmark방법에 의거하여 해를 구한다.

한편, 식(6)의 평형방정식은 직접적으로 해결될 수 없다. 그 이유는 구하고자 하는 시간단계에서의 기하학적 형상을 알고 있지 못하기 때문이다. 이 때문에 각 단계에서 변량을 가정하고 이 가정치가 주어진 조건식 (6)을 만족하지 못하면 제 변량을 재가정하여 평형방정식이 만족될 때까지 반복계산하는 작업이 필요하다. 이를 위하여는 여러 방법이 개발되어 사용되고 있는데 본 연구에서는 보편적으로 많이 사용되고 있는 Modified Newton-Raphson 반복방식⁽²⁶⁾을 사용한다.

위의 선택된 방법을 사용하여 전 해석과정을 본 연구에서 사용한 Newmark predictor-corrector⁽²⁷⁾ 방법과 함께 임의의 시간 $t+\Delta t$ 에서의 변위량, 속도, 가속도를 구하는 알고리즘을 기술하면 아래와 같다.

(1) 반복수 i 를 0으로 한다.

(2) 가정치와 정해치를 같다고 놓고 변위량, 속도, 가속도를 가정한다.

$${}^{t+\Delta t}\{Q\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{Q\} = {}^t\{Q\} + \Delta t {}^t\{\dot{Q}\} + \Delta t^2(1-2\alpha) {}^t\{\ddot{Q}\} / 2 \quad (11)$$

$${}^{t+\Delta t}\{\dot{Q}\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{\dot{Q}\} = {}^t\{\dot{Q}\} + \Delta t(1-\lambda) {}^t\{\ddot{Q}\} \quad (12)$$

$${}^{t+\Delta t}\{\ddot{Q}\}^{(i)} = [{}^{t+\Delta t}\{Q\}^{(i)} - {}^{t+\Delta t}\{Q\}] / (\Delta t^2 \alpha) \quad (13)$$

여기서, ${}^{t+\Delta t}\{Q\}^{(i)}$, ${}^{t+\Delta t}\{\dot{Q}\}^{(i)}$, ${}^{t+\Delta t}\{\ddot{Q}\}^{(i)}$ 는 각각 시간 $t+\Delta t$ 에서의 변위, 속도, 가속도의 가정치, ${}^{t+\Delta t}\{Q\}^{(i)}$, ${}^{t+\Delta t}\{\dot{Q}\}^{(i)}$ 는 시간 $t+\Delta t$ 에서의 변위, 속도의 정해치이고, ${}^t\{Q\}$, ${}^t\{\dot{Q}\}$, ${}^t\{\ddot{Q}\}$ 는 시간 t 에서의 변위, 속도, 가속도벡터이며, α 와 λ 는 Newmark 적분상수이다. 위 식에서 초기조건 즉 $t=0$ 일 때의 평형조건을 이용하여 초기 가속도치를 구할 수 있다. $t=0$ 일 때 평형조건식은

$$[M] {}^0\{\ddot{Q}\} + [K_T] {}^0\{Q\} = {}^0\{F\} \quad (14)$$

이 되는데, 이 식에 초기상태의 변위량 ${}^0\{Q\}$ 를 대입하면 ${}^0\{\ddot{Q}\}$ 를 구할 수 있다.

(3) 위에서 구한 가정치를 가지고 다음 식에 의하여 잔류력을 구한다.

$$\Psi(i) = {}^{t+\Delta t}\{F\} - [M] {}^{t+\Delta t}\{\ddot{Q}\}^{(i)} - [K_T] {}^{t+\Delta t}\{Q\}^{(i)} \quad (15)$$

(4) 유효강성도 행렬 $[K^*]$ 를 다음 식에 의하여 계산한다.

$$[K^*] = [M] / (\Delta t^2 \alpha) + [K_T] \quad (16)$$

(5) 변위증분 $\{\Delta Q\}$ 를 다음 식으로 부터 계산한다.

$$[K^*]\{\Delta Q\}^{(i)} = \Psi(i) \quad (17)$$

(6) 계산된 변위량을 가지고 새로운 변위, 속도, 가속도를 다음과 같이 계산한다.

$${}^{t+\Delta t}\{Q\}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\{Q\}^{(i)} + \{\Delta Q\}^{(i)} \quad (18)$$

$${}^{t+\Delta t}\{\dot{Q}\}^{(i+1)} = [{}^{t+\Delta t}\{Q\}^{(i+1)} - {}^{t+\Delta t}\{Q\}] / (\Delta t^2 \alpha) \quad (19)$$

$${}^{t+\Delta t}\{\ddot{Q}\}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\{\dot{Q}\}^{(i+1)} - \Delta t \lambda {}^{t+\Delta t}\{\ddot{Q}\}^{(i+1)} \quad (20)$$

(7) $\{\Delta Q\}^{(i)}$ 혹은 $\Psi(i)$ 가 정해진 조건 내에 들어오지 않으면 $i=i+1$ 이 되어 최종 계산된 값을 가지고 세번째 단계로 돌아가, 같은 과정을 되풀이한다.

(8) 이 값들이 일정한 범위내로 수렴했다고 하면 다음과 같이 시간 $t+\Delta t$ 에서의 최종적인 값들이 되어 다음 시간 단계로 넘어간다.

$${}^{t+\Delta t}\{Q\} = {}^{t+\Delta t}\{Q\}^{(i+1)} \quad (21)$$

$${}^{t+\Delta t}\{\dot{Q}\} = {}^{t+\Delta t}\{\dot{Q}\}^{(i+1)} \quad (22)$$

$${}^{t+\Delta t}\{\ddot{Q}\} = {}^{t+\Delta t}\{\ddot{Q}\}^{(i+1)} \quad (23)$$

이상에서 언급한 이론을 기초로 하여, 비선형 유한요소 프로그램을 개발하여 아치의 기하학적 인 비선형 거동을 검토한다.

3. 동적 비선형해석 프로그램의 개발

전 장의 해석 이론에 의거하여 평면 응력상태의 낮은 아치를 해석할 수 있는 프로그램을 개발하고, 이를 이용하여 동하중이 작용하는 낮은 아치를 해석하고 그 결과를 범용해석 프로그램의 결과와 비교하여 낮은 아치의 거동에 기하학적 비선형성의 영향이 크게 나타남을 보도록 한다. 이때 해석결과는 재료의 물성과 하중의 크기, 기하학적 형상에 따라 결정되는 무차원 매개변수를 이용하여 나타낸다.

3.1 동적해석 프로그램

본 연구에서 사용되는 프로그램은 앞에서 서술된 이론대로 Lagrangian 좌표계에서 유도된 평형 방정식을 유한요소이론에 의거하여 행렬형태로 만든 식(6)을 수치해석하여 해를 구하는 과정으로 구성된다. 이 프로그램은 아치의 동적인 선형 및 비선형 거동을 해석할 수 있도록 한다. 또한 이 프로그램은 본 연구에서 대상으로 하는 아치 외에도 2차원 평면요소로 해석할 수 있는 구조물에 대하여 선형 및 비선형 동적해석이 가능하다. 이하는 프로그램의 주된 수행과정을 기술한다.

(1) 자료입력

프로그램 수행에 필요한 자료를 입력시키는 일로서 대상구조물의 기하학적 자료, 시간적분에 필요한 기초자료, 각 시간단계에서의 하중상태 등이 입력된다.

(2) 질량행렬의 구성

식(7)의 질량행렬을 구하는 과정으로서 적분형태로 되어 있는 행렬을 Gauss Legendre 수치적분 방식에 따라 행렬의 구성요소를 계산한다. 즉, x, y

좌표계 상의 질량행렬을 자연좌표로 이용하여 변환한 후, Gauss Legendre 수치적분함에 따라 각 요소별 질량행렬을 구한다.

(3) 강성도 행렬 구성

각 유한요소의 강성도 행렬을 구하는 과정으로서 질량 행렬의 경우와 마찬가지로 Gauss Legendre 방식에 따라 수치적분하여, 행렬을 각 요소별로 계산한다.

(4) 요소행렬 및 벡터의 조립

요소단위의 행렬이나 벡터를 전체구조계에 대한 행렬 또는 벡터로 조립한다. 이때, 요소의 자유도와 구조물의 자유도 차수가 다르기 때문에 identification array⁽²⁷⁾를 이용하여 제 위치를 찾아가게 한다. 또한 전체 행렬의 저장순 행렬의 skyline 아래에 있는 요소만 1차원 배열에 저장시키는 방식을 이용한다.

(5) 변위량 및 응력계산

지금까지 각 계수 행렬이 모아지면 구하고자 하는 변위, 속도, 가속도, 응력의 크기를 구할 수 있다. 이 과정은 전 장의 해석 알고리즘에 자세히 기술되어 있는대로 Newmark 시간적분 방식과 Modified Newton-Raphson 반복방식을 이용하여 계산한다. 단, 계산 결과의 수렴여부를 판정할 때, 본 프로그램에서는 식(17)에 따라 계산된 변위량이 아래식의 norm에 따라 일정범위에 들어오는지의 여부로 결정한다. 즉,

$$\frac{|\Delta Q^{(i)}|}{|{}^{t+\Delta t}Q^{(i)} + \Delta Q^{(i)}|} < \text{허용치} \quad (24)$$

이면 수렴이 된 것으로 본다.

(6) 처짐비 계산

앞의 과정을 마치면 최종적으로 각 시간 단계에서 구해진 변위량을 기초로 처짐비를 계산한다. 이 처짐비는 식(25)에 표기된 바와 같이 전시간에 걸친 각 시간 단계에서의 아치의 수직변위와 수평변위의 합의 제곱근, 즉 변형량과 원래의 아치형상과의 비를 의미하는 것으로서, 좌굴여부를 판단하기 위하여 본 연구에서 제시한 무차원 변수이다.

$$\Delta = \frac{\int_0^L [(u_1^2(x,t) + u_2^2(x,t))]^{1/2} dx}{\int_0^L Y_0(x) dx} \quad (25)$$

식(25)에서, $u_1(x,t)$ 와 $u_2(x,t)$ 는 시간 t 에서의 수평변위와 수직변위이며, $Y_0(X)$ 는 위치에 따라 변하는 아치의 높이, L 은 아치의 지간이다.

위에서 서술한 내용은 전산 프로그램에 포함되어 있는 주된 수행내용을 설명한 것으로 프로그램의 수행과정을 흐름도로 표시하면 그림 2와 같다.

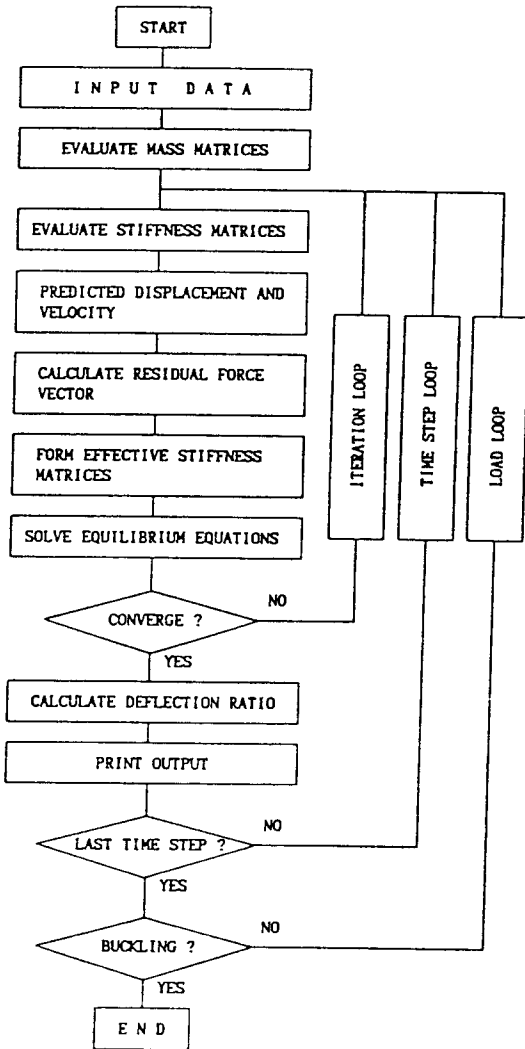


그림 2. 개발된 프로그램의 흐름도

3.2 프로그램의 검증

전 절의 해석 프로그램을 검증하기 위하여 그림 3에 도시된 바와 같은 양단이 고정된 평면 원호 아치에 방사형 만재 등분포하중이 step하중으로 재하되는 경우를 해석한다. 이러한 경우 구조의 기하학적인 형상이 대칭이고 또한 하중이 대칭이므로 아치구조의 반을 대상으로 하여 유한요소망을 형성할 수 있다. 이와 같은 원리에 따라 본 연구에서는 아치의 반에 대하여 요소당 절점수가 8개인 6개의 유한요소를 사용하였다.

수치해석 방법으로는 2장에서 설명된 Newmark predictor-corrector 방식을 사용하였다. 이 때, Newmark 적분상수 α 와 λ 는 각각 0.5와 0.25로 하였다.

검증 대상아치는 아치지간 대 높이의 비가 0.053인 원호 아치이고, 반경 $R=100\text{cm}$, $\beta=0.209\text{ rad}(12^\circ)$ 의 $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ 의 정사각형 단면을 가진 아치이다.

대상아치에 등분포 방사하중 $q=42\text{ kg/cm}$ 이 가해진 경우에 대하여 선형 및 비선형해석을 시행한 다음, 그 결과를 범용 프로그램인 NONSAP을

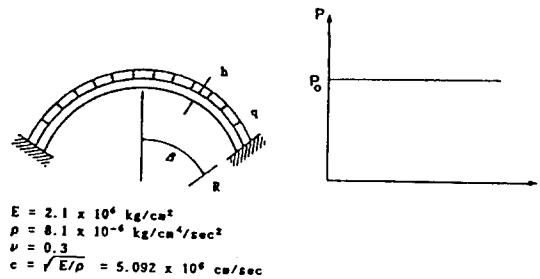


그림 3. 검증용 해석모형

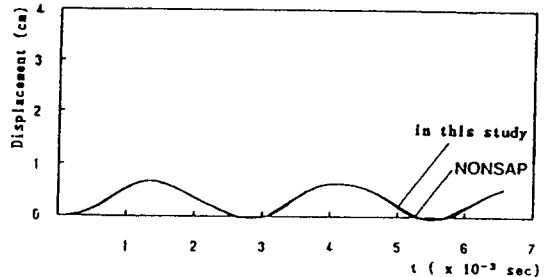


그림 4. 선형 해석결과

이용하여 얻은 결과와 비교하였다. 여기서는 아치 중앙에서의 시간에 따른 수직처짐값을 기준으로 두 해석결과를 비교하였다.

그림 4는 선형해석한 결과를 나타낸 것으로 아치는 최대처짐 0.66cm, 주기 0.0028초의 주기적인 진동을 하게된다. 해석결과를 검증하기 위하여 동일한 경우에 대하여 NONSAP으로 해석한 결과를 같이 도시하였다. 해석조건은 모두 동일하게 하였고 수치해석방법도 같은 Newmark 방식을 사용하였으며, 시간간격과 적분상수를 동일하게 하였다. 단, 본 연구에서는 하중이 등분포된 것으로 해석한 반면, NONSAP의 경우는 분포하중을 집중하중으로 치환하여 재하하였다. 그림에서 보는 바와 같이 두 해석은 거의 동일한 결과를 보여줌을 알 수 있다.

그림 5는 동일한 조건에 대한 비선형 해석결과를 보여주고 있다. 본 연구에서 개발된 프로그램을 이용하여 해석한 결과에 의하면 아치는 최대처짐 3.65cm, 주기 0.0064초의 진동을 하게된다. 이는 선형해석의 결과와 비교하면 큰 차이가 있는 것을 알 수 있다. 비선형해석의 결과도 역시 NONSAP의 결과와 비교하였다. NONSAP에 의한 비선형 해석결과에 따르면 대상아치는 최대처짐 3.77cm, 주기 0.0059초의 진동을 한다. 이는 본 연구의 결과에 비하여 진폭은 크게 (3.2%), 주기는 작게(8.5%) 해석된 것이나 비교적 두 연구결과가 잘 일치하고 있다고 사료된다. 시간적분 상의 오차가 없다고 가정할 때, NONSAP과 본 연구는 모두 8절점 등 매개요소를 사용한 변위법에 의한 해석이므로 인위적인 자유도의 구속에 의하여

구조의 강성을 과대평가하게 된다. 따라서, 두 해석의 결과는 모두 주기를 과소 해석하였다고 사료될 수 있으나, 본 해석에 의한 주기가 보다 실제 거동에 가깝다고 사료된다. 또한 정점속도(그림 5 곡선의 기울기)의 크기를 비교할 때, 본 연구의 결과가 좀 더 유연한 구조로 해석한 것으로 보아 정당한 해석이라 사료될 수 있다. 이러한 내용은 선형인 경우에도 그 차이는 미소하지만 동일한 양상을 보이고 있다.

3.3 기하학적 비선형성의 영향

상기된 바와 같이 검증된 프로그램을 이용하여 기하학적 비선형에 따른 영향을 미소변위 이론에 기초한 선형해석의 결과와 비교하여 확인하였다. 해석결과는 전술한 바와 같이 시간에 따른 아치의 거동양태를 무차원 매개변수를 사용하여 제시하였다. 본 연구에서 사용된 무차원 매개변수는 Budiansky, Roth⁽²⁾ 등이 사용한 것으로서 식(26), (27), (28)로 표기되는 시간매개변수 τ , 하중매개변수 P_0 , 형상매개변수 γ 이다.

$$\tau = (t/R)\sqrt{(E/\rho)} \tag{26}$$

$$P_0 = (R/h)^2(q/E) \tag{27}$$

$$\gamma = \beta^2(R/h) \tag{28}$$

윗 식들에서 E는 탄성계수, ρ 는 단위질량, R은 아치의 반경, h는 아치단면의 높이, q는 하중강도, β 는 radian으로 환산된 아치중심각의 반, t는 경과 시간을 각각 나타낸다. 임의의 형상의 아치에 하중이 가해져서 변형이 발생하였을 때, 시간은 식(26)에 따라 시간매개변수로, 하중은 식(27)에 따라 하중 매개변수로, 아치의 형상은 식(28)에 따라 형상 매개변수로, 처짐형상은 식(25)에 따라 처짐비로 각각 환산하여 이들 간의 상관관계로 결과를 제시하도록 한다.

여기서도 전 절에서와 같이 $R = 100\text{cm}$, $\beta = 0.209 \text{ rad}(12^\circ)$ 의 $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ 의 정사각형 단면을 가진 아치를 대상으로 하였다. 이아치는 식(28)에 따라 계산할 경우, $\gamma = 4.382$ 이 된다. 하중의 크기에 따른 영향을 확인하기 위하여, 하중 매개변수 P_0 가 0.1, 0.2인 경우에 대하여 해석을 실시하였

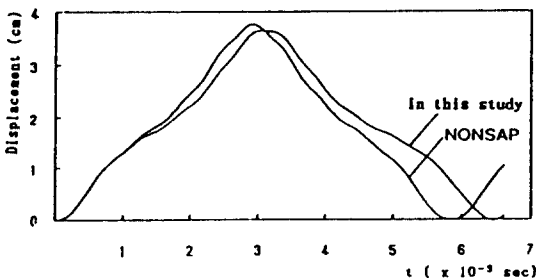


그림 5. 비선형 해석결과

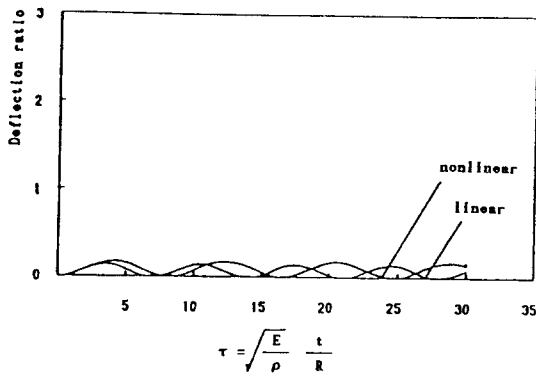


그림 6. 선형 및 비선형 해석에 의한 처짐비($P_0=0.1$)

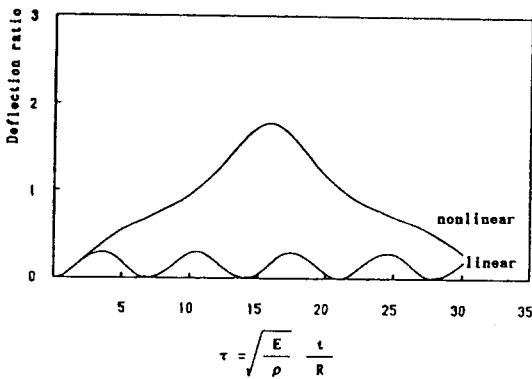


그림 7. 선형 및 비선형 해석에 의한 처짐비($P_0=0.2$)

다. 이 하중매개변수는 식(27)에 따라 실제하중으로 환산할 경우 동분포하중이 각각 21kg/cm, 42kg/cm의 크기로 재하되는 경우에 해당된다.

그림 6과 그림 7은 각 경우에 대한 식(25)의 처짐비와 시간매개변수 사이의 관계를 도시한 것이다. 그림 6에서 보는 바와 같이 작은 동하중이 재하되는 경우에는 선형해석과 비선형해석의 결과는 그 차이가 미소함을 확인할 수 있다. 즉, 처짐비의 크기는 큰 차이가 없어 주기에만 다소 차이가 발생되어, 비선형 해석 결과가 좀 더 유연한 거동으로 해석됨을 알 수 있다. 하지만, 그림 7에서와 같이 동하중의 크기가 증가함에 따라, 그 결과는 크게 상이함을 알 수 있다. 즉, 처짐비와 주기에서 모두 괄목할만한 차이가 발생하게 됨을 알 수 있다. 따라서, 하중의 크기가 과대하게 되면 선

형이론에 의해서는 정확한 결과를 해석할 수 없다는 것을 알 수 있다.

4. 낮은 아치의 동적 임계좌굴하중

낮은 아치에 하중이 가해져 일정한 크기에 이르면 snap-through 좌굴이 발생하여 불안정하여진다. 이 현상은 동일한 하중재하에서 한 평형 상태에서 다른 평형상태로 갑자기 변위가 증가하는 현상을 말한다. 따라서 좌굴이 일어나는 순간의 하중, 즉 임계하중을 구하는 것은 낮은 아치의 설계에 있어서 중요한 문제가 된다. 낮은 아치의 좌굴하중을 해석하기 위한 연구는 많으나, 아직 이 임계하중에 대한 통일된 기준은 없는 실정이다. 이러한 좌굴현상은 본 연구와 같은 비선형거동의 해석에 의하여 구명될 수 있으며, 이를 위하여 동적 좌굴의 기준을 정립하도록 한다.

4.1 동적 임계좌굴하중 기준

아치에 하중을 점증하여 재하할 때, 일정 구간까지는 평형경로를 거쳐 하중증가에 따라 변위가 비례하여 증가하지만, 어느 순간에 이르러서는 미소한 하중의 증가에도 변위가 급격히 증가하여 새로운 평형상태로 옮겨간다. 이와 같은 현상이 snap-through좌굴이다.

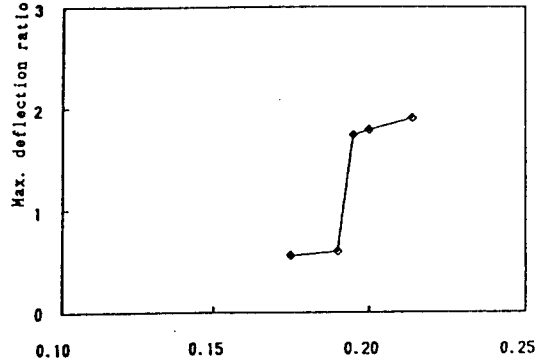
전술한 바와 같이 snap-through 좌굴이 일어나는 순간의 하중을 임계좌굴하중이라고 한다. 이 임계좌굴하중을 구하기 위하여 많은 학자들이 여러 기준에 따라 연구를 수행하였다. 하지만 통일된 기준이 확립되어 있지 않아서 학자마다 상이한 기준을 적용하고 있다. Budiansky 와 Roth⁽²⁾, Humphreys⁽³⁾ 등은 하중과 개개 하중에 대한 구조물의 응답변수 중 최대치와의 상관도에서 하중의 미소증가에 따른 응답변수의 급격한 증가가 발생하는 하중을 동적 임계좌굴하중으로 정의하였다. 본 연구에서는 Budiansky의 기준에 따라 임계좌굴하중을 구하였으며 응답변수는 식(25)와 같은 아치의 원래의 형상과 변위랑과의 비를 나타내는 처짐비로 정하였다. 따라서 Budiansky기준에 따라 하중을 점증시키며 아치의 힘-변위관계를 해석할 때 식(25)의 처짐비가 급격히 증가하는 순간

의 하중점을 임계좌굴하중으로 정의한다. 이와 같은 처짐비를 사용함에 따라 수직방향의 처짐만을 기준으로 하는 방법과는 달리, 비대칭 아치의 경우에 발생하는 수평처짐의 영향도 고려할 수 있게 된다.

4.2 만재 등분포하중에 대한 임계좌굴하중

3.3 절과 같은 대상아치에 대하여 Budiansky 기준에 따라 하중매개변수를 점증시키며 비선형 해석을 실시하여, 좌굴임계하중을 하중매개변수와 처짐비의 관계 곡선을 통하여 해석하였다. 그림 8에서 보는 바와 같이 하중매개변수 P_0 가 0.190에 이르기까지는 처짐비가 0.6이하에서 진동하는 양상을 보이거나, 하중이 그 이상으로 미소 증가되면 급격하게 처짐비가 증가하는 것을 알 수 있다. 이 현상을 좀더 검토하기 위하여, 하중크기에 따른 최대처짐의 변화를 그림 9에 도시하였다. 그림에서 보면 하중매개변수 P_0 가 0.190까지는 최대처짐비가 0.6을 넘지 않으나, 하중매개변수 $P_0=0.195$ 에서는 최대처짐비가 갑자기 증가하고 있다.

처짐비가 급증하는 현상을 확인하기 위하여 그림 10에 처짐비가 과대하게 나타나기 전후의 하중 조건에서의 최대처짐형상을 도시하였다. 즉 처짐이 과대하게 발생하기 직전의 하중 $P_0=0.190$, 및 직후의 하중 $P_0=0.195$ 가 재하되어 최대의 변형이 발생했을 때의 처짐형상을 정규축척으로 그린 것이다. 이 그림에 따르면 하중크기가 $P_0=0.190$ 에서는 처짐형상이 원래의 아치형상과 같은 형태이



$$P_0 = \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{q}{E}$$

그림 9. 하중 매개변수에 따른 최대 처짐비

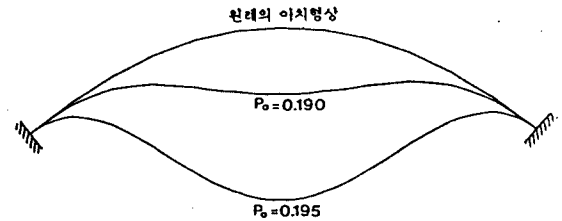


그림 10. P_0 가 0.190, 0.195인 경우의 처짐현상

나 하중이 미소증가된 $P_0=0.195$ 에서는 아치의 모습이 전도된 형상으로되어 처짐이 급증함을 알 수 있다. 이상의 검토를 종합해 볼 때, 본 연구에서 대상으로 한 아치는 하중매개변수 $P_0=0.190-0.195$ 사이에서 처음으로 좌굴이 발생함을 알 수 있다.

4.3 아치의 형상변화에 따른 임계좌굴하중

시간이 같은 5개의 아치를 선정하여 높이에 따른 임계하중변화를 확인하였다. 대상아치는 (a) $R=100\text{cm}$, $\beta=12^\circ$ (b) $R=80.3\text{cm}$, $\beta=15^\circ$ (c) $R=62.78\text{cm}$, $\beta=18^\circ$ (d) $R=58.016\text{cm}$, $\beta=21^\circ$ (e) $R=51.117\text{cm}$, $\beta=24^\circ$ 의 동일한 지간을 갖는 아치들이다. 이 아치들은 식(28)에 따르면 $\gamma=4.382, 5.500, 6.634, 7.786, 8.960$ 의 형상매개변수를 갖는 아치들이다. 각 형상의 아치에 대하여 임계하중을 구하여 그림 11에 그 결과를 도시하였다. 그림에 따르면 형상매개변수가 작을수록 작은 하

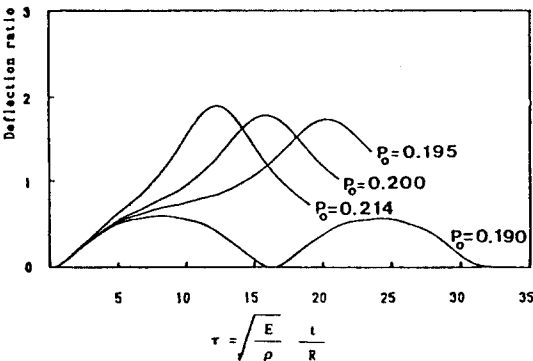


그림 8. 하중 매개변수에 따른 처짐비의 변화

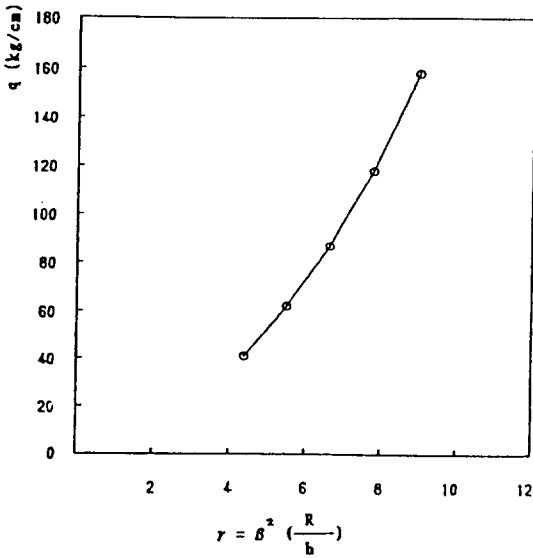


그림 11. 형상 매개변수에 따른 좌굴하중

중에서 좌굴이 일어남을 알 수 있다. 즉, 예상되는 바와 같이 높이가 낮아질수록 아치가 지지할 수 있는 하중은 감소함을 확인할 수 있다.

5. 비교고찰

전 장에서 서술된 내용은 아치의 거동을 매개변수로 표현하기 위하여 아치의 형상을 원호아치로 제한하였으며, 하중도 등분포방사하중만을 대상으로 한 것이다. 하지만 실제 토목구조물로서의 아치는 이외에도 여러가지 형상의 아치가 있으며 하중도 등분포 방사하중보다는 집중하중이나 등분포연직하중을 받는 경우가 대부분이다. 본 장에서는 매개변수를 사용하지 않고, 낮은 아치에 대하여 형상과 하중조건을 변화시켜 가면서 그 차이점을 확인하도록 한다.

5.1 집중하중 재하시의 임계좌굴하중

여기서 대상아치는 $\gamma=4.382$ 의 반경 $R=100\text{cm}$ 원의 중심각의 반 $\beta=12^\circ$, 아치의 높이 $h=1\text{cm}$ 의 정사각형단면을 가진 아치로 한다. 단일 집중하중이 지간에 걸쳐 이동할 때, 임계좌굴하중의 크기가 어떻게 변화하는지를 확인하기 위하여 4장에서

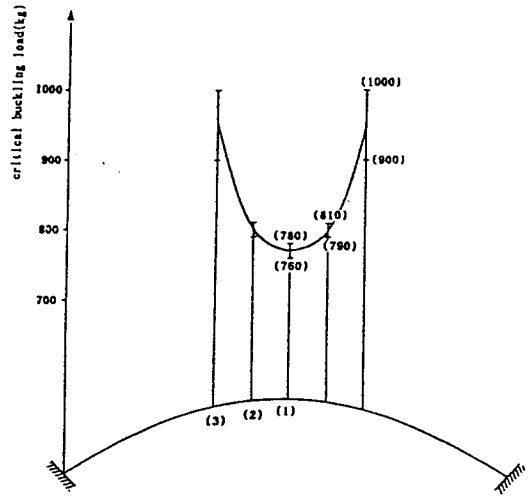


그림 12. 집중하중 재하시의 임계좌굴하중

와 같이 하중을 점증시키면서 처짐비가 급증하는 순간의 하중을 구하였다. 대상아치가 등분씩 이동함에 따른 임계좌굴하중의 변화를 검토하였다.

그림 12는 이에 따른 해석결과를 도시한 것이다. 그림에서 (1), (2), (3)은 각각 하중이 아치의 중앙점에 작용할 경우, 아치의 중앙점에서부터 1/6 등분점에 작용할 경우, 1/3 등분점에 작용할 경우의 하중재하점을 나타낸다. 재하점을 3개로 제한한 것은 하중이 그 이상으로 지점부에 가까와지게 되면 임계좌굴하중이 급격히 증가하여 좌굴의 검토가 무의미하기 때문이다. 또한 임계좌굴하중을 폭넓게 나타낸 것은 방사하중 재하시처럼 급격한 좌굴발생현상이 나타나지 않고 일정한 하중폭에 걸쳐 좌굴이 지점쪽으로 이동함에 따라 임계좌굴하중이 증가함을 알 수 있다. 즉 대상아치의 경우 아치 중앙에 하중이 재하될 경우에 좌굴저항능력이 가장 낮은 것을 확인할 수 있다.

5.2 등분포 연직하중 재하시의 임계좌굴하중

등분포 연직하중이 재하될 경우의 임계좌굴하중을 구하였다. 단, 방사하중 재하시에 대한 임계하중 값과의 비교를 위하여 같은 하중강도의 연직하중과 방사하중이 재하된 경우에 임계좌굴하중을 비교하였다. 대상아치는 4.3 절의 5개 모델중

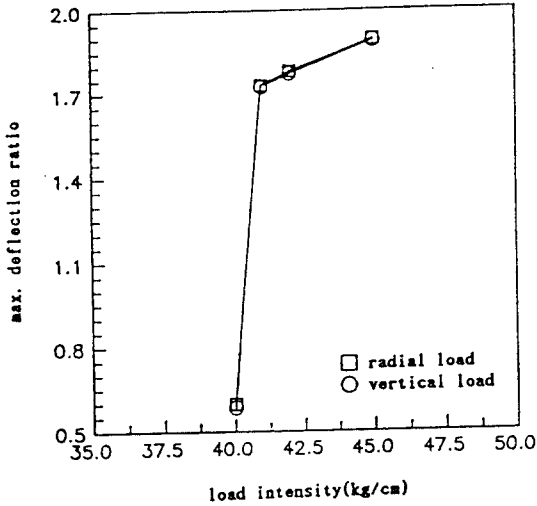


그림 13. 연직하중과 방사하중에 의한 최대 처짐비 ($\gamma=4.382$)

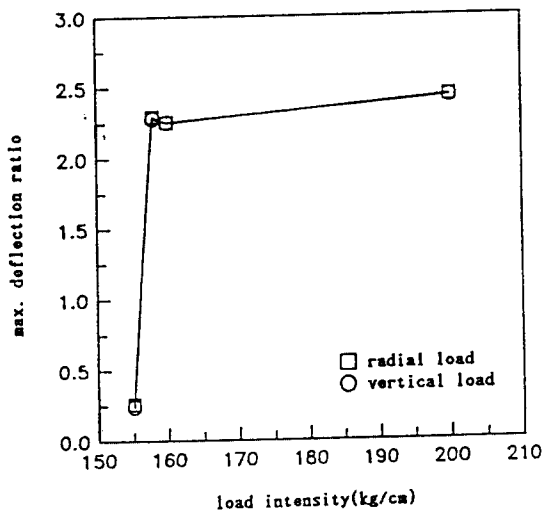


그림 14. 연직하중과 방사하중에 의한 최대 처짐비 ($\gamma=8.960$)

높이가 가장 낮은 $\gamma=4.382$ 의 아치와 높이가 가장 높은 $\gamma=8.96$ 의 두 아치로 정하였다. 그 이유는 아치가 낮아질수록 연직하중과 방사하중이 일치됨에 따라 해석결과가 같아지므로 가장 낮은 아치와 가장 높은 아치만을 선정하므로써 곡률이 결과에 미치는 영향을 확인하기 위함이다.

해석결과를 그림 13과 그림 14에 제시하였다. 두 하중조건에 따른 임계좌굴하중 크기를 비교하는 것은 그 차이가 미미할 것으로 판단되어 단지 동일 하중 재하시의 최대처짐비를 구하여 비교하였다. 해석결과 두 아치의 경우, 공통적으로 방사하중보다 연직하중 재하시에 처짐비가 적은 것으로 나타났다. 이 점으로 보아 방사하중 재하시 좌굴가능성이 높음을 유추할 수 있다. 아치의 형상에 따른 차이는 $\gamma=4.382$, $\gamma=8.960$ 인 두아치 모두 연직하중 재하의 경우가 전체적으로 처짐비가 적게 나타나나 곡률에 따른 영향은 두아치가 낮은 아치이기 때문에 큰 차이를 발견할 수 없다.

5.3 원호 아치와 포물선 아치의 임계좌굴하중 아치의 형상을 포물선 형상으로 바꾸어 동일 하중 재하시의 최대 처짐비를 구하여 원호아치의 경우와 비교하였다. 이를 위하여 원호아치와 같은 지간과 높이를 갖는 포물선 형상을 구하였다. 여기서는 4.3절의 5개의 모델중에서 아치의 높이가 가장 큰 $\gamma=8.960$ 의 $R=51.117\text{cm}$, $\beta=24^\circ$, $h=1\text{cm}$ 의 아치를 대상으로 하였다. 그 이유는 아치가 낮아질수록 원호 형상이나 포물선 형상이 거의 일치하여 그차이를 확인하기 어렵기 때문이다. 두가지 형상의 아치에 대한 결과를 그림 15에 나타내었다. 그림에 도시한 바와 같이 같은 지간과

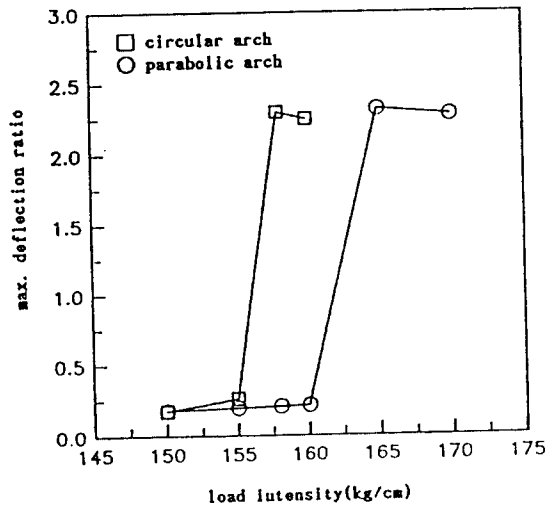


그림 15. 원호아치와 포물선 아치

같은 높이를 갖는 원호 아치와 포물선 아치의 좌굴강성을 비교할 때, 포물선 아치의 강성이 다소 큼을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구는 기하학적 비선형성을 고려한 낮은 아치의 동적 해석방법을 연구한 것으로 Lagrangian 좌표계를 사용하여 동적 비선형 방정식을 유도하고 이 식을 유한요소이론에 따라 해석하는 방법을 제시하였다. 이 방법에 기초하여 동적 비선형 프로그램을 개발하고, 프로그램의 검증을 통하여 비선형 거동을 고려한 낮은 아치의 해석에 본 프로그램이 사용될 수 있음을 입증하였다. 또한 Budiansky의 좌굴기준을 비선형 동적 해석에 반영하여 낮은 아치의 좌굴거동을 해석할 수 있는 방법을 제안하였다. 또한 모형해석을 통하여 본 연구에서 개발된 프로그램이 여러가지의 형상과 하중조건을 가지는 낮은아치의 좌굴임계하중을 구하는데 이용될 수 있음을 보였다.

7. 참고문헌

1. Bolotin, V.V., *The Dynamic Stability of Elastic System*, Holden-Day Inc., 1952, pp.1-5.
2. Budiansky, B. and Roth, R.S., *Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells*, TN D-1510, 1962, pp. 597-606.
3. Humphreys, J.S., "On Dynamic Snap Buckling of Shallow Arches," *AIAA Journal*. Vol. 4, No. 5, May, 1966, pp.878-886.
4. Lock, M.H., "Snapping of Shallow Sinusoidal Arch under a Step Pressure Load", *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 7, July, 1966, pp. 1249-1256.
5. Fulton, R.E. and Barton, F.W., "Dynamic Buckling of Shallow Arches", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.97, No.EM3, June, 1971, 1971, pp.865-877.
6. Lo, M.L.C. and Masur, E.F., "Dynamic Buckling of Shallow Arches," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 102, No. EM5, October, 1976, pp. 901-917.
7. Fitzgerald, H.M. and Plaut, R.H.,

"Snap-Through of a Shallow Arch under the Interaction of Multiple Dynamic Loads", *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 10, Stoneking, J.E. ed., Proceedings of the Tenth Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics, University of Tennessee, 1980, pp. 495-503.

8. Welton, R.H.D., "Snap-Through of Arch Model under Multiple Loads", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.104, No.EM4, August, 1978, pp.964-967.
9. Gregory, W.E. and Plaut, R.H., "Dynamic Stability Boundaries for Shallow Arches", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 108, No.EM6, December, 1982, pp.1036-1050.
10. 이병구, 양단힌지 포물선 아치의 자유진동에 관한 연구, 연세대학교 대학원, 박사학위논문, 1984.
11. 박광규, 양단힌지인 낮은 포물선 아치의 동적 안정영역설정에 관한 연구, 연세대학교 대학원, 박사학위논문, 1987.
12. 안주옥, 축방향력이 들어간 아치구조의 동적거동, 고려대학교 대학원, 박사학위논문, 1987.
13. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1980, pp. 301-406.
14. Nickell, R.E., "Nonlinear Dynamics by Mode Superposition," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 7, 1976, pp. 107-129.
15. Morris, N.F., "The Use of Modal Superposition in Nonlinear Dynamics," *Computers and Structures*, Vol. 7, 1977, pp.65-72.
16. Bathe, K.J. and Gracewski, S., "On Nonlinear Dynamic Using Substructuring and Mode Superposition," *Computers and Structures*, Vol. 13, 1981, pp.609-707.
17. Noor, A.K. and Lambiotte, J.J., Finite Element Dynamic Analysis on CDC STAR-100 Computer," *Computers and Structures*, Vol. 10, 1979, pp.7-19.
18. Underwood, P. and Park, K.C., "STINT/CD:A Stand-Alone Explicit Time Integration Package for Structural Dynamics Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1981, pp.1285-1312.
19. Ishizaki, T. and Bathe, K.J., "On Finite Element

- Large Displacement and Elastic-Plastic Dynamic Analysis of Shell Structures," *Computers and Structures*, Vol. 12, 1980, pp.309-318.
20. Bathe, K.J., Ramm, E., and Wilson, E.L., "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis," *International Journal for Numerical Method in Engineering.*, Vol. 9, 1975, pp.353-386.
21. Bhatti, M.A. and Pister, K.S., "Transient Response Analysis of Structural Systems with Nonlinear Behavior," *Computers and Structures*, Vol. 13, 1981, pp.181-188.
22. Mondkar, and Powell, G.H., "Finite Element Analysis of Nonlinear Static and Dynamic Response," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 1977, pp. 499-520.
23. Remseth, S.N., "Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Framed Structures," *Computers and Structures*, Vol. 10, 1979, pp.879-897.
24. Belytshcko, T. and Schoeberle, D.F., "On the Unconditional Stability of and Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASME, 1975, pp.865-869.
25. Klein, S. and Trujillo, D.M., "An Unconditionally Stable Finite Element Analysis for Nonlinear Structures," *Computers and Structures*, Vol.13, 1983, pp.187-197.
26. Bathe, K.J., Ozdemir, H., and Wilson, E.L., "Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis," University of California, Berkeley, Rep. No. UCSESM 74-4, 1974.
27. Owen, D.R.J. and Hinton. E., *Finite Elements in Plasticity*, Pineridge Press, 1980, pp.157-164, pp. 377-463.

(접수일자 : 1993. 5. 31)