

확률유한요소법에 의한 철근 콘크리트 프레임의 응답변화도

Response Variability of Reinforced Concrete Frame By the Stochastic Finite Element Method

정 영 수*
Chung, Young-Soo

Abstract

Response variability of reinforced concrete frame subjected to material property randomness has been evaluated with the aid of the finite element method. The spatial variation of Young's modulus is assumed to be a two-dimensional homogeneous stochastic process. Young's Modulus of concrete material has been investigated based on the uniaxial strength of concrete cylinder. Direct Monte Carlo simulation method is used to investigate the response of reinforced concrete frame due to the variation of Young's modulus with the Neumann expansion method and the perturbation method. The results by three analytic methods are compared with those by deterministic finite element analysis. These stochastic technique may be an efficient tool for evaluating the structural safety and reliability of reinforced concrete structures.

1. 서 론

정적 및 동적해석의 공학적인 문제에 유용하게 사용되고 있는 유한요소해석법에 구조신뢰성 이론을 접목시킨 확률론적 유한요소해석법으로 구조물의 안전성을 평가하는 연구가 최근에 많이 수행되고 있다. 특히 풍하중, 지진하중 등과 같은 불확정 성질을 내포하고 있는 하중에 대한 구조물의 안전성에 관한 연구는 지난 30여년간 많이 수행되었으나 재료강도, 탄성계수, 포아손비등의 재료성질의 불확정요인에 대한 구조물의 신뢰성해석은 아직도 미흡한 실정이다[1, 2, 3, 4]. 강구조에 비해 상대적으로 비균등질 재료인 철근 콘크리트 구조물의 거동은 재료의 성질 즉 콘크리트의 강도,

탄성계수 등에 크게 좌우되고 있으므로 콘크리트 공사시 구조물의 중요도에 따라 엄격한 공사감독이 요구된다[5]. 본 논문은 콘크리트의 탄성계수를 불확정 변수로 고려하여 철근 콘크리트 프레임의 응답 및 부재력 변화의 정도를 조사하였다.

본 논문에서 사용한 확률론적 유한요소해석의 방법을 열거하면 첫째로 몬테칼로 시뮬레이션 기법 즉 가정된 확률변수의 상관함수를 사용하여 N 개의 부재 각각의 탄성계수를 추출하여 구성된 강성행렬을 갖는 구조물의 주어진 하중조건에 대한 응답을 구하는 것이며 각 표본에 대한 해석과정을 계속반복하여 전체 결과에 대한 평균치 및 표준편차 등을 얻어서 응답의 변화도를 분석 연구하는 방법, 둘째로 몬테칼로 시뮬레이션 기법시 요구되

* 중앙대학교 건설대학 토목공학과 부교수

이 논문에 대한 토론을 1994년 9월 30일까지 본 학회에 보내 주시면 1995년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

는 계산시간을 감소시키기 위한 하나의 근사해법인 뉴우먼 확장법 즉 N개의 표본에 대한 각각의 응답 계산시 매 계산마다 수행해야 하는 강성행렬의 분해(Decomposition)는 많은 계산시간을 요구함으로 계산시간을 현격히 감소시키는 방안[6]으로 수렴행렬을 적절히 유도하여 각각의 표본에 대한 강성행렬의 분해(Decomposition)를 수행하지 않고 응답의 변화도를 구하는 방법, 그리고 셋째로 1차 및 2차 퍼터베이션(Perturbation) 방법 등을 기술하였다. 본 논문에서는 우선 콘크리트의 압축강도에 대한 실험자료를 근거로 탄성계수의 변이를 조사한 후 그림 1과 같은 3-Bay 4-Story 철근 콘크리트 프레임을 강도설계법으로 내진설계하여 탄성계수의 변이에 따른 구조물의 변위 및 부재력의 변화량을 분석하였다. 한편 합리적인 응답의 변화량을 얻기 위해 필요한 최소 N값에 대한 연구도 수행하였으며 이들의 연구결과를 기초로 차후에 철근 콘크리트 구조물의 안전성 평가를 위한 합리적인 방법을 도출하고자 한다.

2. 확률장 및 해석방법

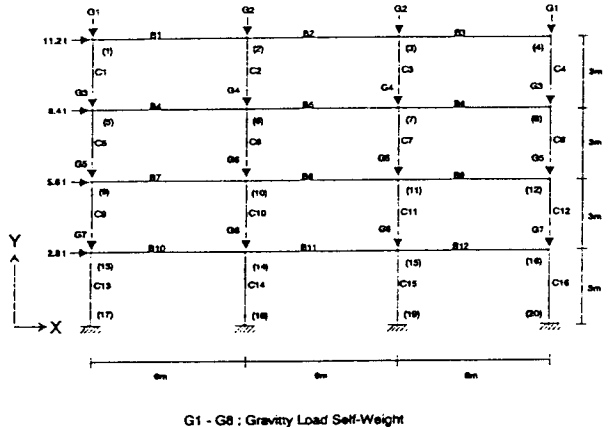
2.1 탄성계수의 변이도

콘크리트의 탄성계수의 불확실성의 정도는 각종 배합비에 따른 공시체의 압축강도실험결과 및 현장에서 채취한 공시체의 압축강도실험결과 등을 기초로 철근 콘크리트 시방서[7]의 2.3.1절의

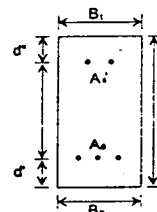
$E_c = 15,000\sqrt{\sigma_{ck}}$ 를 이용하여 파악할 수 있다. σ_{ck} 는 콘크리트 공시체의 압축강도를 말하며 탄성계수의 평균값, $E[E_c]$, 및 변이계수, v_{E_c} 는 FOSM (First Order Second Moment)에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E[E_c] = 15,000\sqrt{E[\sigma_{ck}]} \quad v_{E_c}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 v_{\sigma_{ck}}^2 \quad (1)$$

표 1은 참고문헌 [5]의 실험자료에 근거하여 현장타설 콘크리트의 압축강도의 변화량과 이를 근거로 계산된 콘크리트 탄성계수의 변이량을 나타



G1 - G8 : Gravity Load Self-Weight



Member	H (in)	B _t (in)	B _b (in)	d' (in)	d' (in)	A _s (in ²)	A _s ' (in ²)	Confinement Ratio
C1,C4,C5,C8	30	30	30	3	3	10.20	10.20	0.012
C2,C3,C6,C7	30	30	30	3	3	11.60	11.60	0.012
C9,C12,C13,C16	30	30	30	3	3	19.30	19.30	0.024
C10,C11,C14,C15	30	30	30	3	3	19.30	19.30	0.030
B1,B2,B3,B4,B5,B6	55	30	30	3	4	15.50	6.0	0.024
B7,B8,B9,B10,B11,B12	60	30	30	3	4	15.50	6.0	0.030

그림 1. 3-Bay 4-Story 철근 콘크리트 프레임의 상세도

표 1. 현장조건양생 공시체의 탄성계수의 변이계수

단위 : kg/cm²

공칭 압축 강도 σ_{ck}	180	210	240	
평균 압축 강도 σ_c	173	180	199	
$\sigma_c / \sigma_{ck} (\%)$	96.1	85.8	82.9	
압축 강도 변이계수	0.21	0.10	0.16	
표 본 수	22	29	13	
탄성 계수	평균 값	197,294	210,246	211,601
	변이계수	0.105	0.05	0.08

표 2. 실험실 공시체 시료의 배합조건

시료종류	설계기준 강도 (kg/cm ²)	굵은골재 최대치수 (mm)	슬럼프 (cm)	물시멘트비 (%)	잔골재율 (%)	단 위 량(kg/m ³)			
						물	시멘트	잔골재	굵은골재
하천모래 (여주)	210	40	8.0	53	34	158	298	642	1,298
바닷모래 (당진)	210	40	8.4	53	36	158	298	683	1,258
바닷모래 (해남)	210	40	7.0	53	36	158	298	678	1,258
산 모래 (포천)	210	40	8.0	53	35	158	298	658	1,277
산 모래 (합천)	210	40	8.0	53	35	158	298	653	1,277

표 3. 실험실 공시체의 재령별 압축강도 실험결과

시료종류	평균 압축 강도(kg/cm ²)						28일 강도 탄성 계수	
	7일 강도		28일 강도		90일 강도		(kg/cm ²)	
	평균	변이계수	평균	변이계수	평균	변이계수	평균	변이계수
하천모래 (여주)	156	0.026	219	0.015	271	0.031	221,960	0.0075
바닷 모래	당진 148	0.020	238	0.065	275	0.003	231,409	0.0325
해남 160	0.055	214	0.023	258	0.032	219,431	0.0115	
산 모래	포천 154	0.016	213	0.025	252	0.063	218,918	0.0125
합천 127	0.005	194	0.046	220	0.015	208,926	0.023	

낸 것이며 표 2와 표 3은 진행중인 연구과제로서 제작된 각 표본별 3개의 콘크리트 공시체의 배합 조건 및 압축강도의 변화량을 근거로 계산된 콘크리트 탄성계수의 변이량을 보인 것이다.

2.2 재료상수의 확률장

재료의 변이를 나타내는 확률변수로서는 탄성 계수, 포아손비 혹은 단면 2차모멘트 등을 취하여 확률론적 유한요소해석을 수행할 수 있으나 본 연구에서는 탄성계수를 확률변수로 선택하였으며 부재별 탄성계수의 형태는 다음과 같이 가정하였다.

$$E(x) = E_0(1+e(x)) \quad E[e(x)] = 0 \quad (2)$$

상기 식에서 $E[\cdot]$ 는 평균값 즉 기대치를 나타내는 기호이며, E_0 는 각 부재의 탄성 계수의 기대치 즉 종래의 확정론적 유한요소해석에서 사용된

탄성계수값이고 $e(x)$ 는 통계적 특성을 가지는 확률장으로서 정규분포를 갖는 것으로 가정하였다. 특히 $e(x)$ 는 재료의 탄성계수가 음의 값을 갖는 가능성을 배제하기 위하여 상관함수로부터 추출시 $-1+\epsilon \leq e(x) \leq 1-\epsilon$ 의 범위에 국한시켰다. 단, ϵ 은 양의 값으로서 $0 < \epsilon < 1$ 로 취하였다.

2.3 상관함수

재료상수의 변이 즉 탄성계수의 변이를 나타내는 $e(x)$ 의 상관함수는 각 부재의 공간좌표에 따른 상호관계를 나타내는 것으로서 2차원의 확률유한요소해석시 $X=\{xy\}^T$ 는 위치 벡터이고 $\xi=\{\xi_x \xi_y\}^T$ 는 두 부재사이의 상대거리 벡터이다. 특히 탄성계수의 변이가 2차원적으로 등방성이면 위의 상관관계는 단지 상대거리 벡터인 $|\xi|$ 만의 함수로 가정할 수 있으므로 본 연구에서는 아래와 같은 등방성 상관함수를 사용하였다[6].

$$R_{ee}(\xi) = E[e(x)e(x+\xi)] = \sigma_e^2 \exp\left[-\left(\frac{|\xi|}{d}\right)^2\right] \quad (3)$$

상기 식에서 d 는 상관관계의 척도(Scale of Correlation)를 나타내는 양의 매개변수[8]이며 σ_e 는 확률변수 $e(x)$ 의 표준편차로서 본 연구에서는 표 1에 근거하여 0.1의 값을 사용하였다. 특히 d 의 값에 따른 변위 및 부재력의 상관관계(COV)를 계산하였으며 표 4 및 표 5는 각각의 수치해석

표 4. 몬테칼로 및 뉴만 확장법에 의한 변위와 부재력의 누적평균 및 표준편차

Scale of Correlation d	X-Displacement at Node 1				End-Moment at Beam 10				End-Moment at Column 14			
	Monte Carlo		Neumann Exp.		Monte Carlo		Neumann Exp.		Monte Carlo		Neumann Exp.	
	Up. Mean	St. D.	Up. Mean	St. D.	Up. Mean	St. D.	Up. Mean	St. D.	Up. Mean	St. D.	Up. Mean	St. D.
10	7.641	0.1557	7.640	0.1557	1391	79.97	1391	79.94	1361	108.9	1361	108.8
50	7.641	0.1557	7.640	0.1557	1391	79.97	1391	79.94	1361	108.9	1361	108.8
100	7.641	0.1557	7.640	0.1557	1391	83.38	1391	79.94	1361	108.9	1361	108.8
200	7.641	0.180	7.640	0.180	1391	79.97	1390	83.45	1363	106.9	1362	106.9
300	7.638	0.2463	7.638	0.2463	1390	93.94	1390	94.06	1367	103.5	1367	103.6
400	7.631	0.3056	7.630	0.3055	1391	102.0	1391	101.9	1370	102.5	1370	102.7
500	7.622	0.3567	7.622	0.3565	1393	106.4	1393	106.4	1369	99.21	1369	99.22
600	7.610	0.4022	7.610	0.4022	1393	107.7	1393	107.9	1367	92.48	1366	92.49
700	7.598	0.4419	7.598	0.4418	1392	106.0	1392	106.0	1364	85.08	1364	85.01
800	7.586	0.4752	7.586	0.4750	1391	101.8	1391	101.8	1362	78.38	1362	78.37
900	7.575	0.5023	7.575	0.5022	1390	96.28	1390	96.28	1360	72.40	1360	72.41
1000	7.566	0.5239	7.565	0.5238	1389	90.31	1389	90.33	1359	66.90	1359	67.08
2000	7.531	0.5955	7.531	0.5953	1384	52.51	1384	52.51	1356	32.14	1356	32.14
3000	7.528	0.6080	7.528	0.6078	1385	37.80	1385	37.80	1357	20.05	1357	20.06
4000	7.530	0.6142	7.530	0.6140	1386	29.57	1386	29.58	1358	14.68	1358	14.69
5000	7.532	0.6183	7.532	0.6180	1386	24.25	1386	24.25	1358	11.64	1358	11.66

표 5. 1차 및 2차 퍼터베이션에 의한 변위와 부재력의 누적평균 및 표준편차

Scale of Correlation d	X-Displacement at Node 1				End-Moment at Beam 10				End-Moment at Column 14			
	1st Pertub.		2nd Pertub.		1st Pertub.		2nd Pertub.		1st Pertub.		2nd Pertub.	
	Up. Mean	St. D.	Up. Mean	St. D.	Up. Mean	St. D.	Up. Mean	St. D.	Up. Mean	St. D.	Up. Mean	St. D.
10	7.588	0.1585	7.627	0.1591	1389.6	79.40	1383.7	80.11	1359.9	103.7	1357.8	103.7
50	7.588	0.1585	7.627	0.1591	1389.6	79.40	1383.7	80.11	1359.9	103.7	1357.8	103.7
100	7.588	0.1585	7.627	0.1591	1389.6	79.40	1383.7	80.11	1359.9	103.7	1357.8	103.7
200	7.588	0.1835	7.627	0.1841	1389.6	81.92	1383.8	82.63	1359.9	102.7	1357.8	102.8
300	7.588	0.2533	7.625	0.2539	1389.6	89.64	1384.2	90.37	1359.9	100.1	1357.8	100.1
400	7.588	0.3201	7.624	0.3209	1389.6	95.30	1384.3	96.08	1359.9	95.53	1357.8	95.58
500	7.588	0.3787	7.625	0.3799	1389.6	97.81	1384.0	98.68	1359.9	89.50	1357.9	89.55
600	7.588	0.4293	7.628	0.4309	1389.6	98.02	1383.5	99.01	1359.9	82.98	1358.0	83.02
700	7.588	0.4728	7.631	0.4748	1389.6	96.67	1382.8	97.79	1359.9	76.46	1358.1	76.51
800	7.588	0.5099	7.634	0.5124	1389.6	94.30	1382.1	95.56	1359.9	70.25	1358.1	70.30
900	7.588	0.5415	7.636	0.5444	1389.6	91.28	1381.4	92.69	1359.9	64.49	1358.2	64.54
1000	7.588	0.5683	7.639	0.5716	1389.6	87.90	1380.7	89.48	1359.9	59.26	1358.2	59.32
2000	7.588	0.6939	7.655	0.6997	1389.6	57.40	1376.7	60.74	1359.9	30.16	1358.5	30.23
3000	7.588	0.7279	7.660	0.7346	1389.6	40.64	1375.4	45.67	1359.9	19.73	1358.6	19.83
4000	7.588	0.7410	7.662	0.7480	1389.6	31.16	1374.9	37.69	1359.9	14.65	1358.6	14.77
5000	7.588	0.7473	7.663	0.7545	1389.6	25.19	1374.7	33.04	1359.9	11.65	1358.6	11.80

기법에 따른 결과를 보여주고 있다.

2.4 탄성계수의 변이행렬

중래의 유한요소해석시 신뢰할 수 있는 결과를 얻기 위하여 구조물은 통상적으로 가능한 작은 요소로 분할하여 수행한다. 본 연구에서는 프레임

구조물의 보와 기둥의 연결부를 절점으로 취하여 유한요소수는 부재수와 동일하도록 하였다. 따라서 각 부재에 대한 N개의 탄성계수는 식 (3)의 등방성상관함수로부터 구할 수 있다. 즉 $e_i = e(x_i)$; $i=1, 2, \dots, N$ 들은 기대값이 μ 인 정규분포의 확률변수로서 서로 등방성상관관계를 갖는 값들이

다. 단 'x_i'는 'i'번째 부재를 나타내는 것이며 그들의 상관관계는 다음과 같이 분산행렬, C_{ee}로 나타낼 수 있다.

$$C_{ij} = \text{COV}[e_i, e_j] = E[e_i e_j] = R_{ee}(\xi_{ij}) = C_{ee} \quad (4)$$

단, $\xi_{ij} = X_j - X_i$ 를 나타내며 이는 요소 'i'와 'j' 사이의 거리이다. 탄성계수의 표본벡터 $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ 는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{e} = \mathbf{LZ} \quad (5)$$

상기 식에서 $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ 로서 기대값이 0이고 표준편차가 '1'인 N개의 독립적인 정규분포를 갖는 확률변수로서 $E[\mathbf{ZZ}^T] = \mathbf{I}$ (단위행렬)이다. 그리고 L은 하부삼각행렬로서 식 (5)를 이용하여 분산행렬, C_{ee}의 촐레스키(Cholesky) 분해법으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C_{ij} = E[e_i e_j] = E[\mathbf{e} \mathbf{e}^T] = E[\mathbf{LZ}(\mathbf{LZ})^T] = \mathbf{L} E[\mathbf{ZZ}^T] \mathbf{L}^T = \mathbf{L} \mathbf{L}^T = C_{ee} \quad (6)$$

즉 분산행렬, C_{ee}에 대한 촐레스키(Cholesky) 분해를 통하여 하부삼각행렬, L_u을 구하고 참고문헌 [9]를 이용하여 N개의 독립적이고 정규분포를 갖는 확률변수, Z_u을 구한 후 표본벡터, e_u는 식 (5)로부터 용이하게 구할 수 있다. 한편 각 부재의 탄성계수, E(x),는 식 (2)로부터 계산되며 따라서 구조물의 강성행렬은 계산된 각 부재의 탄성계수를 기초로 구할 수 있다.

3. 수치해석기법

3.1 몬테칼로 씨뮬레이션기법(Monte Carlo Simulation Method)

통상적인 직접강성도법(Direct Stiffness Method)으로 구조물의 강성행렬을 구하면 구조물의 정적해석을 위한 다음과 같은 정적평형방정식을 얻으며 강성행렬을 도치하여 주어진 하중에

대한 변위를 구할 수 있다.

$$[\mathbf{K}]\{\Delta\} = \{F\} \quad \{\Delta\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{F\} \quad (7)$$

강성행렬의 도치는 행렬의 크기에 따라 상당량의 CPU가 필요하며 이러한 계산시간을 감소하기 위하여 가우시안(Gaussian)소거법, 촐레스키(Cholesky)분해법 등 많은 기법이 개발되었다. 본 연구에서는 수정 촐레스키(Modified Cholesky)분해법을 사용하여 강성행렬을 다음과 같이 분해하여 변위를 구하였다.

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{U}]^T[\mathbf{D}][\mathbf{U}] \quad (8)$$

상기 식에서 [U]는 모든 대각선 성분이 '1'인 상부삼각행렬을 나타내며 [D]는 대각선 행렬을 나타낸다. 이를 식 (7)의 정적평형방정식에 대입하여 정리하면

$$[\mathbf{U}]^T[\mathbf{D}][\mathbf{U}]\{\Delta\} = \{F\} \quad (9)$$

이다. 여기서 $[\mathbf{U}]^T\{X\} = \{F\}$ 그리고 $[\mathbf{D}]\{Y\} = \{X\}$ 로 대치하면 {X}, {Y}를 단계적으로 구한 후 최종적으로 변위행렬값 {Δ}를 계산할 수 있다.

따라서 몬테칼로 씨뮬레이션기법은 등방성 상관함수로부터 구한 강성행렬의 각각의 표본에 대한 위와 같은 계산과정을 계속적으로 반복하여 전체 표본수에 대한 변위 및 부재력의 평균값 및 표준편차를 구하는 것이다. 따라서 많은 계산시간을 필요로 하는 단점으로 지적되고 있다.

3.2 뉴우만 확장법(Neumann Expansion Method)

3.2.1 해석법

확률유한요소법에서는 탄성계수의 변이로 인하여 변화되는 강성행렬은 다음 식과 같이 선형적으로 중첩하여 나타낼 수 있다.

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_0] + [\Delta\mathbf{K}] \quad (10)$$

상기 식에서 [K₀]는 기대강성행렬 즉 통상적으로 정적해석시에 입력되는 탄성계수로부터 유도된 강성행렬을 나타내며 [ΔK]는 각 부재별 탄성

계수의 변화량에 따른 강성행렬의 각 성분의 증감분의 행렬을 나타낸다. 본 논문에서 확정론적 변위, $\{\Delta_0\}$ 는 수정 촐레스키법으로 구하였으나 뉴우먼 확장법 유도를 위하여 편의상 $\{\Delta_0\}=[K_0]^{-1}\{F\}$ 로 쓸 수 있다. 뉴우먼 확장법에서의 강성행렬의 도치는 다음과 같이 확장하여 쓸 수 있다.

$$[K]^{-1}=[K_0+\Delta K]^{-1}=[K_0]^{-1} \quad [[I]-[P]+[P] \times [P]- \dots] \quad (11)$$

상기 식에서

$$[P] = [K_0]^{-1}[\Delta K] = \text{수렴행렬}$$

$$[I] = \text{단위행렬}$$

을 나타낸다. 따라서 변위, $\{\Delta\}$ 는 식 (11)을 식 (7)에 대입하여 다음의 급수식으로 쓸 수 있다.

$$\{\Delta\}=[K]^{-1}\{F\}=\{\Delta_0\}-[P]\{\Delta_0\}+[P]^2\{\Delta_0\}-\dots$$

$$=\{\Delta_0\}-\{\Delta_1\}+\{\Delta_2\}-\{\Delta_3\}+\dots \quad (12)$$

상기 식의 우변의 각 항은 다음과 같은 연산법으로 구할 수 있다.

$$\{\Delta_i\}=[P]\{\Delta_{i-1}\}=[K_0]^{-1}[\Delta K]\{\Delta_{i-1}\}; i=1,2,3,\dots \quad (13)$$

즉 $[K_0]$ 의 수정 촐레스키 분해법에 의해서 $\{\Delta_0\}$ 를 우선 계산하고 $\{\Delta_i\}$ 항들은 상기 식 (13)을 이용하여 차례로 구한 후 식 (12)의 $\{\Delta\}$ 를 최종적으로 구할 수 있다. 특히 본 연구에서는 식 (12)에서 $\{\Delta\}$ 의 계산종료는 아래와 같은 허용오차를 만족시키는 $\{\Delta_i\}$ 항까지 고려하였다.

$$\delta_{err} \geq \left| \frac{\max \{\Delta_i\}}{\max \{\Delta_1\}} \right| \quad (14)$$

상기 식에서 δ_{err} 은 $\{\Delta\}$ 의 정확도를 위한 허용오차를 말하며 본 연구에서는 0.001의 허용오차값을 사용하였다. 특히 뉴우먼 확장법에서는 식 (12)의 우변의 각 $\{\Delta_i\}$ 항들이 수렴키 위해서는 수렴행렬,

$[P]=[K_0]^{-1}[\Delta K]$ 의 모든 고유치들의 절대값들이 1.0보다 작은 경우에만 수렴하므로 이를 만족치 못하는 경우에는 새로운 수정수렴행렬을 구하여 변위를 구하는 방법을 다음의 3.2.2 및 3.2.3에 언급하였다.

3.2.2 수렴조건

수렴조건을 만족시키지 못하는 경우 즉 행렬 $[P]$ 의 고유치의 절대값이 1.0 보다 큰 경우 수정 강성행렬, $[K_0^*]$ 을 이용하여 강성행렬, $[K]$ 를 다음과 같이 수정확장할 수 있다.

$$[K]=[[K_0]+\Delta K]=[[K_0^*]+\Delta K^*]$$

$$[K_0^*]=m[K_0] \quad (15)$$

상기 식에서 m 은 수렴한계를 만족시키는 스칼라값이며 식 (12)는 다음과 같이 수정된다.

$$\{\Delta\}=\{\Delta_0^*\}-\{\Delta_1^*\}+\{\Delta_2^*\}-\{\Delta_3^*\}+\dots \quad (16)$$

한편 수정수렴행렬은 식 (15)를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[P^*]=[K_0^*]^{-1}[\Delta K^*]=\frac{1}{m}[K_0]^{-1}[[K]-[K_0^*]]$$

$$=[K_0]^{-1}\left[\frac{1}{m}[K]-[K_0]\right] \quad (17)$$

따라서 변위, $\{\Delta\}$ 는 식 (17)에서 수정수렴행렬을 구한 후 다음의 식 (18)의 연산법에 의해 구한 $\{\Delta_i^*\}$ 를 식 (16)에 대입하여 구할 수 있다. 한편 $\{\Delta_0^*\}=\frac{1}{m}\{\Delta_0\}$ 이다.

$$\{\Delta_i^*\}=[K_0^*]^{-1}[\Delta K_0^*]\{\Delta_{i-1}^*\}$$

$$=\frac{1}{m}[K_0]^{-1}[[K]-[K_0^*]]\{\Delta_{i-1}^*\}$$

$$=[K_0]^{-1}\left[\frac{1}{m}[K]-[K_0]\right]\{\Delta_{i-1}^*\} \quad (18)$$

그러나 식 (18)에서는 수렴계수, m 을 구하는 문제가 여전히 잔존하고 있다.

3.2.3 수렴계수의 산정

수렴계수, m 이 취할 수 있는 범위는 고유치 해석과정을 이용하여 구할 수 있다. 즉 수렴행렬 $[P]=[K_0]^{-1}[\Delta K]$ 의 k 번째 고유벡터를 Φ_k , k 번째 고유치를 λ_k 라 하면

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (19)$$

이다. 그리고 일반적인 고유치함수의 형태, $\{A\}\{\Phi\} = \lambda\{\Phi\}$ 로부터 수렴행렬을 고유치함수의 형태로 나타내면

$$[[K_0]^{-1}[\Delta K]]\Phi_k = \lambda_k \Phi_k \quad (20)$$

이다. $|\lambda_k| \geq 1.0$ 이면 수렴을 위하여 강성행렬은 $[K] = [K_0^*] + [\Delta K^*]$ 로 변환되어 다음과 같은 식의 수정수렴행렬, $[P^*]$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} [P^*] &= [K_0^*]^{-1}[\Delta K^*] \\ &= \left[\frac{1}{m}[K_0]^{-1}[(1-m)[K_0] + [\Delta K]] \right] \\ &= \left[\frac{1}{m}[K_0]^{-1}[\Delta K] + \frac{1-m}{m}[I] \right] \quad (21) \end{aligned}$$

식 (21)을 $[K_0]^{-1}[\Delta K]$ 에 대해서 정리하면

$$[K_0]^{-1}[\Delta K] = (m-1)[I] + m[K_0^*]^{-1}[\Delta K^*] \quad (22)$$

된다. 고유치 함수를 이용하여 식 (21)은

$$[[K_0^*]^{-1}[\Delta K^*]]\Phi_k^* = \lambda_k^* \Phi_k^* \quad (23)$$

로 쓸 수 있으며 식 (23)을 식 (22)에 대입하여 정리하면

$$[[K_0]^{-1}[\Delta K]]\Phi_k = (m\lambda_k^* - 1 + m)\Phi_k^* \quad (24)$$

가 되어 식 (20)과 식 (24)로부터 다음 식을 구할 수 있다.

$$\lambda_k = m\lambda_k^* - 1 + m \quad \lambda_k^* = \frac{(\lambda_k + 1 - m)}{m} \quad (25)$$

따라서 $|\lambda_k^*| < 1.0$ 이면 $|m| > |\lambda_k + 1 - m|$ 가 되어 수렴계수의 범위가 다음 식으로 결정된다.

$$m > \frac{\text{Max}\{|\lambda_k| + 1.0\}}{2.0} \quad (26)$$

3.3 퍼터베이션 기법(Perturbation Method)

확률유한요소법의 전형적인 수치해석법의 하나인 퍼터베이션 기법은 여러 학자들에 의해서 하중의 불확실성에 대한 해석문제에 대해 이미 많은 연구가 수행된 바 있다. 재료의 불확실성을 고려하는 본 연구는 탄성계수의 변이, $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}^T$ 를 확률변수로 가정하였으며 강성행렬, $[K]$,는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$K = K_0 + \sum_i^n K_i e_i + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n K_{ij} e_i e_j + \dots \quad (27)$$

상기 식에서 $e_i < 1.0$ 이며 평균값은 0이다. 그리고 K_0 는 $e=0$ 인 경우의 강성행렬이며 K_i 및 K_{ij} 는 다음 식과 같다.

$$K_i = \left. \frac{\partial K}{\partial e_i} \right|_{e=0} \quad K_{ij} = \left. \frac{\partial^2 K}{\partial e_i \partial e_j} \right|_{e=0} \quad (28)$$

작용하중, $\{F\}$,도 실제로는 불확정 성질을 내포하여 식 (27)과 같은 형태로 확장시킬 수 있지만 본 연구에서는 확정론적으로 가정하였다. 따라서 변위벡타도 아래와 같이 유사한 급수식으로 나타낼

$$\Delta = \Delta_0 + \sum_i^n \Delta_i e_i + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n \Delta_{ij} e_i e_j + \dots \quad (29)$$

상기 식에서

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= K_0^{-1}F \\ \Delta_i &= K_0^{-1}[F_i - K_i \Delta_0] \\ \Delta_{ij} &= K_0^{-1}[F_{ij} - K_j \Delta_j - K_i \Delta_i - K_{ij} \Delta_0] \quad (30) \end{aligned}$$

이다. 그러나 하중은 확정론적으로 가정하였으므로 상기 식에서 $F_i = 0$ 및 $F_{ij} = 0$ 이다.

3.3.1 1차 퍼터베이션 기법(1st Order Perturbation Method)

1차 퍼터베이션 근사기법에서는 식 (29)의 우변에서 1차항까지만 고려함으로 아래와 같다.

$$\Delta = \Delta_0 + \sum_i^n \Delta_i e_i \quad (31)$$

따라서 변위의 기대치 및 변이값은

$$E^1[\Delta] = \Delta_0$$

$$COV^1[\Delta, \Delta] = \sum_i^n \sum_j^n \Delta_i(\Delta_j)^T \cdot E[e_i e_j] \quad (32)$$

이다. $E[e_i e_j]$ 는 확률변수 e 의 등방성상관함수로 부터 식 (6)에서 계산된다.

3.3.2 2차 퍼터베이션 기법(2nd Order Perturbation Method)

2차 퍼터베이션 근사해법에서는 식 (29)의 우변에서 2차항까지만 고려함으로 마찬가지로 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta = \Delta_0 + \sum_i^n \Delta_i e_i + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n \Delta_{ij} e_i e_j \quad (33)$$

이 경우의 기대값 및 변이값은

$$E^2[\Delta] = E^1[\Delta] + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n \Delta_{ij} E[e_i e_j] \quad (33)$$

$$COV^2[\Delta, \Delta] = COV^1[\Delta, \Delta] + \frac{1}{4} \sum_i^n \sum_j^n \sum_k^n \sum_l^n \Delta_{ij} \Delta_{kl}^T (E[e_i e_j] E[e_k e_l] + E[e_i e_k] E[e_j e_l])$$

이다. 특히 탄성계수의 변이, e 는 정규분포임으로 다음의 식을 이용하여 상기 식 (34)을 구할 수 있다.

$$E[e_i e_j e_k e_l] = E[e_i e_j] E[e_k e_l] + E[e_i e_k] E[e_j e_l] + E[e_i e_l] E[e_j e_k] \quad (35)$$

한편 각 절점에서의 변위값을 구한 후 계산되는 부재력의 기대치 및 변이값들은 $F_0 = K_0 \Delta_0$, $F' = K' \Delta + K \Delta'$ 및 $F'' = K'' \Delta + 2K' \Delta' + K \Delta''$ 를 이용하여 유사한 방법으로 구할 수 있다.

4. 수치해석 예제

수치해석에 사용된 예제는 그림 1과 같이 3-Bay 4-Story 철근 콘크리트 프레임이 유·비·씨(UBC : Uniform Building Code)[10]에 따

른 정적횡방향하중(Static Lateral Load)에 저항할 수 있도록 ACI 318-89법전[11]의 강도설계법에 따라 설계되었다. 설계지반전단력(Base Shear)은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V = \frac{ZIC}{R_w} \times W \quad (36)$$

상기 식은 (1) '4'지진지역으로 가정하여 $Z=0.4$, (2) 구조체의 중요도(Occupancy Importance Factor)를 고려하여 $I=1.0$, (3) $C=1.25S/T^{2/3}=2.75$ 그리고 $R_w=0.67$ 로 가정하여 설계지반전단력(Base Shear)을 구하였으며 프레임의 자중은 $W=298.63'$ 으로 계산되었다.

$$V = 0.67 \times 0.14 \times 298.63 = 28.0' \quad (37)$$

그림 1과 같이 프레임은 20개의 절점 및 28개의 부재로 구성된 유한요소모델로 이상화하였으며 재료의 탄성계수의 변이값은 표 1 및 표 3에서 약 0.1로 추산되어 $e(x)$ 의 표준편차로서 $\sigma_e=0.1$ 을 사용하였다. 한편 상관함수에서 상관관계거리 d

표 6. 절점 1의 X-방향 변위의 기대치와 표준편차

CASE	X-Displacement at Node 1								
	σ_e	d	Expected Value				St. Deviation		
M			N	1st P	2nd P	M	N	1st P	2nd P
0.05	100	7.605	7.604	7.588	7.598	0.0763	0.0764	0.0793	0.0793
	200	7.605	7.605	7.588	7.598	0.0883	0.0883	0.0918	0.0918
	300	7.604	7.604	7.588	7.598	0.1209	0.1209	0.1266	0.1267
	400	7.601	7.601	7.588	7.597	0.1505	0.1505	0.1600	0.1601
0.10	100	7.641	7.640	7.588	7.627	0.1557	0.1557	0.1585	0.1591
	200	7.641	7.640	7.588	7.627	0.1800	0.1800	0.1835	0.1841
	300	7.638	7.638	7.588	7.625	0.2463	0.2463	0.2533	0.2539
	400	7.631	7.630	7.588	7.624	0.3056	0.3056	0.3201	0.3209
0.15	100	7.698	7.695	7.588	7.676	0.2407	0.2407	0.2378	0.2399
	200	7.698	7.695	7.588	7.675	0.2780	0.2780	0.2753	0.2772
	300	7.692	7.691	7.588	7.670	0.3801	0.3796	0.3799	0.3819
	400	7.680	7.678	7.588	7.668	0.4697	0.4693	0.4801	0.4830
0.20	100	7.779	7.774	7.588	7.743	0.3347	0.3349	0.3170	0.3219
	200	7.778	7.772	7.588	7.742	0.3861	0.3860	0.3671	0.3715
	300	7.767	7.765	7.588	7.733	0.5278	0.5269	0.5065	0.5113
	400	7.750	7.747	7.588	7.731	0.6490	0.6480	0.6401	0.6470

M : Monte Carlo Simulation

N : Neumann Expansion

P : Perturbation

표 7. 보요소(B10)의 모멘트의 기대치와 표준편차

CASE	Left End-Moment at Beam 10								
	Expected Value				St. Deviation				
	d	M	N	1st P	2nd P	M	N	1st P	2nd P
0.05	100	1391	1391	1390	1388	40.11	40.11	39.70	39.80
	200	1391	1391	1390	1388	41.76	41.80	40.96	41.05
	300	1391	1391	1390	1388	46.90	46.92	44.82	44.91
	400	1391	1391	1390	1388	50.83	50.84	47.65	47.75
0.10	100	1391	1390	1390	1384	79.97	79.94	79.40	80.11
	200	1390	1390	1390	1384	83.38	83.45	81.92	82.61
	300	1391	1391	1390	1384	93.94	94.06	89.64	90.37
	400	1391	1391	1390	1384	102.0	101.9	95.30	96.08
0.15	100	1390	1390	1390	1376	120.3	120.3	119.11	121.5
	200	1389	1389	1390	1377	125.6	125.9	122.9	125.3
	300	1389	1389	1390	1377	141.9	142.0	134.5	136.9
	400	1391	1391	1390	1378	154.1	154.2	142.9	145.6
0.20	100	1388	1388	1390	1366	161.7	161.8	158.8	164.4
	200	1387	1386	1390	1367	169.1	169.6	163.8	169.4
	300	1386	1386	1390	1368	191.9	191.9	179.3	185.0
	400	1390	1389	1390	1368	208.5	208.2	190.6	196.8

M : Monte Carlo Simulation
 N : Neumann Expansion
 P : Perturbation

표 8. 기둥요소(C14)의 모멘트의 기대치와 표준편차

CASE	Lower End-Moment at Col. 14								
	Expected Value				St. Deviation				
	d	M	N	1st P	2nd P	M	N	1st P	2nd P
0.05	100	1360	1360	1360	1360	54.21	54.24	51.85	51.85
	200	1361	1361	1360	1359	53.19	53.20	51.36	51.37
	300	1364	1364	1360	1359	51.51	51.51	50.04	50.05
	400	1365	1365	1360	1359	50.90	50.95	47.76	47.77
0.10	100	1361	1361	1360	1358	108.9	108.8	103.7	103.7
	200	1363	1362	1360	1358	106.9	106.9	102.7	102.8
	300	1367	1367	1360	1358	103.5	103.6	100.1	100.1
	400	1370	1370	1360	1358	102.5	102.7	95.53	95.57
0.15	100	1363	1362	1360	1355	164.6	164.4	155.5	155.7
	200	1365	1364	1360	1355	161.6	161.6	154.1	154.2
	300	1371	1371	1360	1355	156.6	156.6	150.1	150.3
	400	1374	1374	1360	1355	155.5	156.0	143.3	143.4
0.20	100	1365	1365	1360	1351	221.9	221.6	207.4	207.7
	200	1368	1367	1360	1351	218.0	218.3	205.5	205.8
	300	1376	1376	1360	1351	211.4	211.3	200.2	200.5
	400	1379	1379	1360	1352	210.5	211.1	191.1	191.4

M : Monte Carlo Simulation
 N : Neumann Expansion
 P : Perturbation

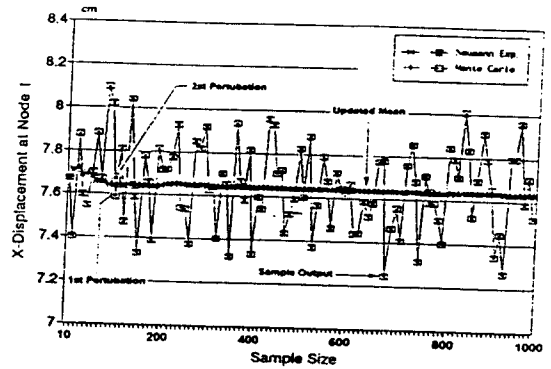


그림 2. 절점 1의 X-방향 변위의 분포도

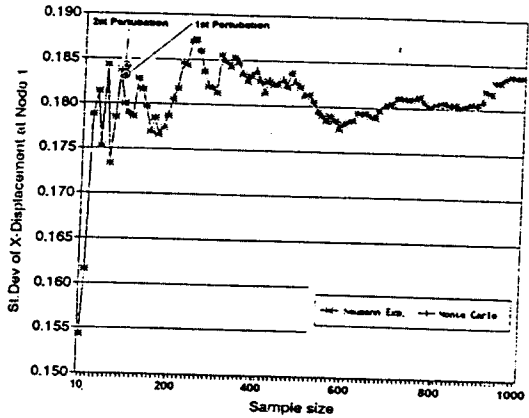


그림 3. 절점 1의 X-방향 변위의 표준편차

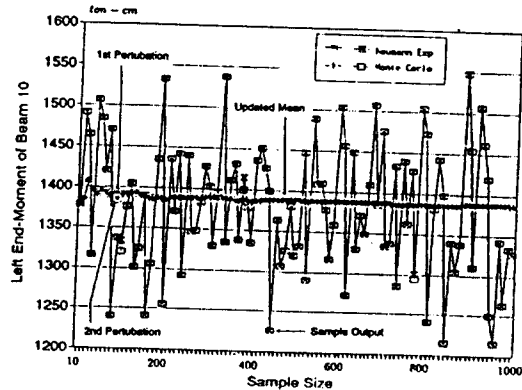


그림 4. 보요소(B10)의 모멘트의 분포도

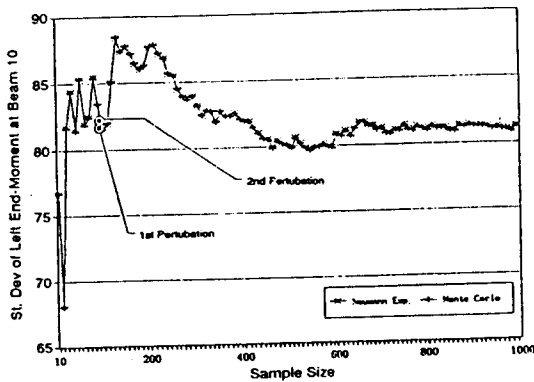


그림 5. 보요소(B10)의 모멘트의 표준편차

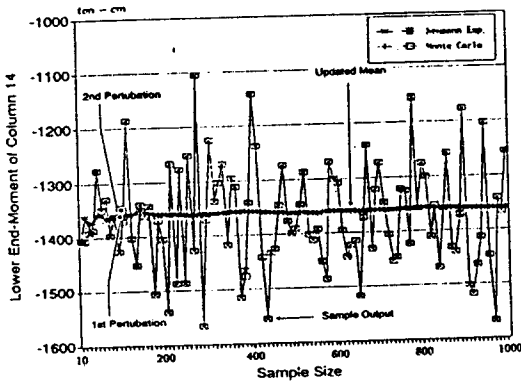


그림 6. 기둥요소(C14)의 모멘트의 분포도

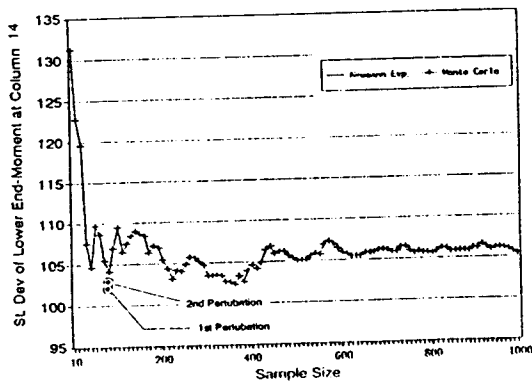


그림 7. 기둥요소(C14)의 모멘트의 표준편차

의 값에 따라 변위 및 부재력의 COV값은 표 4 및 표 5에 요약하였다. 표 6은 그림 1의 절점 1에서의 X방향 변위의 기대치와 표준편차를 도표화한 것이며 표 7과 8은 각각 보요소(B10) 및 기둥요소(C14)의 모우멘트의 기대치와 표준편차를 도표로 정리한 것이다. 한편 그림 2 및 3은 수치해석예제의 표본수에 따른 절점 1의 X-방향변위에 대한 기대치 및 표준편차값을 비교도시한 것이다. 각 계산반복 횟수에 따른 절점 1에서의 변위의 평균값은 대체로 100번째 반복횟수에서 수렴하고 있음을 알 수 있다. 마찬가지로 그림 4와 그림 5는 보요소(B10)의 모우멘트의 평균값 및 표준편차를 각각의 수치해석방법에 의한 결과들을 비교도시한 것이다. 또한 그림 6과 그림 7은 각각 기둥요소(C14)의 모우멘트의 평균값 및 표준편차들을 비교한 것이다. 특히 뉴우만 확장법의 해석결과는 정밀해법으로 인정되고 있는 몬테칼로 모의기법의 결과와 잘 일치하고 있으며 이들 해법은 구조물의 신뢰성평가에 좋은 자료를 제공할 수 있으리라 생각된다.

5. 결론 및 추후 연구과제

본 논문은 몬테칼로 모의기법 및 이 기법의 근사해법으로서 뉴우만 확장기법 그리고 1차 및 2차 퍼터베이션법에 의한 확률유한요소해석을 이용하여 비균등질 복합재료로 구성되는 철근 콘크리트 프레임 구조물의 재료의 변이에 따른 응답 및 부재력의 변화정도를 파악 조사하였다. 이들 기법을 이용한 결과는 현재 철근 콘크리트 구조물의 극한 강도설계법에서 통상적으로 적용되고 있는 각종 계수등에 대한 적절성 여부의 평가 및 추후에 구조물의 안전성에 관한 더욱 합리적인 평가를 수행할 수 있으리라 생각된다. 특히, 본 연구에서 사용된 콘크리트의 탄성계수의 변이도는 강도별, 부재의 중요도별로 더 많은 실험결과로부터 추산되어야 함으로 지속적인 실험결과가 요구되며 확률변수로서 탄성계수외에도 단면적, 단면2차모우멘트 등의 다확률변수에 대한 확률유한요소법에 의한 구조해석에 관한 연구가 필요하리라 생각한다.

감사의 글

본 연구는 1992년도 교육부 지원 한국학술진흥재단의 자유공모(지방대학육성)과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었으며 이에 사의를 표한다.

참 고 문 헌

1. Shinozuka, M., and Deodatis, G., "Response Variability of Stochastic Finite Element Systems," Journal of Engr. Mechanics, ASCE, Vol. 114, No. 3, 1988.
2. Chung, Y. S., and Kim, K. J., "Response Variability of RC Frames by the Stochastic Finite Element Method," Proceedings of the 2nd Korea-French Seminar on Computational Mechanics and Structural Engineering, 1993.
3. Deodatis, G., "Weighted Integral Method I : Stochastic Stiffness Matrix," Journal of Engr. Mechanics, ASCE, Vol. 117, No. 8, 1991.
4. Shinozuka, M., and Deodatis, G., "Weighted Integral Method II : Response Variability

- and Reliability," Journal of Engr. Mechanics, ASCE, Vol. 117, No. 8, 1991.
5. 김상효, 배규웅, "현장타설 콘크리트 압축강도의 확률론적 분석," 한국콘크리트학회지, 제1권 제2호, 1989.
6. Yamazaki, F., Shinozuka, M. and Dasgupta, G., "Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis," Journal of Engr. Mechanics, ASCE, Vol. 114, No. 8, 1988.
7. 철근 콘크리트 표준시방서, 대한토목학회, 1992.
8. Harada, T., and Shinozuka, M., "The Scale of Correlation for Stochastic Fields," Technical Report, Department of Civil Engr. and Engr. Mechanics, Columbia University, July, 1988.
9. IMSL Library, "User's Manual, Fortran Subroutines for Mathematics and Statics," Volume 1 to 4, IMSL, Inc., Houston, June, 1982.
10. Uniform Building Code, "Earthquake Regulations", Chapter 23, Section 2312, 1985.
11. ACI Committee 318-89, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete," American Concrete Institute, 1989.

(접수일자 : 1993. 1. 24)