

# 경계요소법에 의한 선형 점탄성체의 해석

## An Analysis of Viscoelastic Problems by Boundary Element Method

이 상 순\*

Lee, Sang-Soon

조 덕 상\*\*

Cho, Duk-Sang

손 용 수\*\*\*

Sohn, Yong-Soo

.....  
**요 약**

시간영역에서의 경계요소법을 이용하여 실제점탄성체에 대한 응력 및 변위 해석과정을 논의하였다. 기본해와 응력커널들은 탄성-점탄성 대응원리를 사용하여 구하였다. 이완함수는 지수함수들의 합으로 전개되고, 변형된 기본해와 응력커널들은 실제시간 공간으로 수치적인 방법에 의해 전환된다. 제안된 과정은 수치해석을 수행하는데 큰 노력을 요하지 않으며, 실제점탄성체 해석에 응용될 수 있다. 예제의 결과들은 제시된 방법의 효율성과 응용가능성을 보여준다.

**Abstract**

The procedure for the stress and displacement analysis of realistic viscoelastic materials by time domain boundary element method(BEM) has been discussed. The fundamental solutions and stress kernels have been obtained using the elastic-viscoelastic correspondence principle. The relaxation function is expanded in a sum of exponentials and the transformed fundamental solutions and stress kernels are inverted numerically into real time space. The proposed procedure requires a small computational effort and it is applicable in time domain boundary element analysis of realistic viscoelastic problems. Numerical results of example problem show the effectiveness and applicability of the proposed method.

.....  
\* 공학박사, 선임연구원 한국원자력연구소, 계통기계분야  
\*\* 선임연구원 한국원자력연구소, 계통기계분야  
\*\*\* 선임기술원 한국원자력연구소, 계통기계분야, 산업기  
계기술사

이 논문에 대한 토론을 1994년 12월 31일까지 본 학회에 보  
내주시면 1995년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

엔지니어링 플라스틱(engineering plastics)이나 복합재료(composites)가 구조체에 널리 사용됨에 따라 점탄성체(viscoelastic solids)의 역학적 거동에 대한 정확한 해석방법이 점차 요구되고 있다. 이러한 점탄성체는 일반 탄성체와는 달리 물성이 시간에 따라 변하고 항복현상이나 파괴거동이 복잡하므로 응력 및 변위해석을 위해서는 효율적인 응용수치해석법을 필요로 한다.

경계요소법은 탄성체 해석뿐만 아니라 점탄성체 해석에 효과적인 수단이 될 수 있음이 증명되어 왔다. 처음 Rizzo and Shippy[1]에 의해 경계요소법이 점탄성체 해석에 응용된 이래 여러가지 다른 접근법들이 제안되어 왔다. 특히 시간영역에서의 경계요소법의 응용은 방법의 효율성으로 인해 활발히 진행되어 왔으며[2-4], 최근 Lee and Westmann[5]은 고차수의 구적법(high order quadrature rule)을 시간적분에 적용하여 보다 더 정확하고 효과적인 수치해석 결과를 보여주었다. 이러한 경계요소법의 발달은 정확하고 효율적인 점탄성 해석을 가능하게 하였으며 점차 그 응용의 범위를 넓혀가고 있다.

경계요소법을 점탄성체 해석에 적용하기 위해서는 주어진 점탄성체에 대한 기본해(fundamental solutions)와 응력커널(stress kernels)을 구해야 하는데, 일반적으로 실험을 통해서 얻어지는 실제 점탄성체(realistic viscoelastic solids)의 물성, 즉 이완계수(relaxation modulus)나 크리프 컴플라이언스(creep compliance)들은 복잡한 함수 형태를 갖거나 또는 수치적으로 주어지기 때문에 그들에 대한 기본해와 응력커널을 구하기는 매우 어렵거나 때로는 불가능하다. 이러한 문제가 해결되지 않고서는 경계요소법이 실제 점탄성체 해석에 효율적으로 사용될 수가 없다.

이 논문에서는, 실제 점탄성체를 해석하는데 경계요소법이 효율적으로 사용되는 방법을 예제를 통하여 보이고 있다. 점탄성체에 대한 기본해와 응력커널은 탄성-점탄성 대응원리(elastic-viscoelastic correspondence principle)를 이용하여 탄성 기본해와 응력커널로부터 유도하였다. 실

제 점탄성체의 이완계수는 매우 복잡하여 직접 사용하는 것이 어려우므로, 병치법(method of collocation)을 이용하여 실험적으로 얻어진 이완계수를 유한한 크기의 프로니(Prony) 시리즈로 전개하였다. 프로니 시리즈 형태로 이완계수가 주어지면 점탄성체 기본해와 응력커널은 수치적으로 구할 수 있다. 이 논문의 전개방법으로서, 2장에서는 시간영역에서의 경계요소법을 기술하였고, 3장에서는 점탄성 중공 실린더 문제를 택하여 제안된 해석 과정을 보여주었다. 예제의 결과는 제안된 방법의 효율성과 실제 점탄성체 구조물의 해석에 대한 응용가능성을 나타내 준다.

## 2. 점탄성문제에 대한 경계요소법

점탄성체 해석을 위한 경계적분방정식은 Gurtin and Sternberg가 증명한 점탄성 상반정리(viscoelastic reciprocal theorem)로부터 유도될 수 있다[6]. 경계면에서의 표면력(traction) $t_i$ , 변위(displacement) $u_i$  그리고 단위부피당 체력벡터(body force vector) $f_i$ 가 주어지면 경계적분방정식은 다음과 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & c_{ij}(\mathbf{y})u_j(\mathbf{y}, t) \\
 & + \int_S [u_j(\mathbf{y}', t)T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; 0+) \\
 & + \int_{0+}^t u_j(\mathbf{y}', t-t') \frac{\partial T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t')}{\partial t'} dt'] dS(\mathbf{y}') \\
 & = \int_S [t_j(\mathbf{y}', t)U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; 0+) \\
 & + \int_{0+}^t t_j(\mathbf{y}', t-t') \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t')}{\partial t'} dt'] dS(\mathbf{y}') \\
 & + \int_\Omega [f_j(\mathbf{x}', t)U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}'; 0+) \\
 & + \int_{0+}^t f_j(\mathbf{x}', t-t') \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}'; t')}{\partial t'} dt'] d\Omega(\mathbf{x}')
 \end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)에서  $\Omega$ 는 선형 점탄성체가 차지하고 있는 영역을 가리키고 S는 그러한 영역을 둘러싸고 있는 경계를 나타낸다. 경계 S는 2차원 문제에서는 선(line)으로, 3차원 문제에서는 면(patch)으로 나타낸다.  $c_{ij}(\mathbf{y})$ 는 경계면의 기하학적 형상에 의해 정해지는 정수이며, 부드러운 경계에 대해서는

$0.5\delta_{ij}$ 로 된다. 여기서  $\delta_{ij}$ 는 Dirac delta 함수를 나타낸다. 모서리 점에서의  $c_{ij}$ 는 직접 계산하는 것이 복잡하므로, 강체 변위 조건을 이용하여 간접적으로 구하는 것이 편리하다[7].

점탄성 기본해  $U_{ij}$ 와  $T_{ij}$ 는 일반적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &U_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; t) \\
 &= \frac{1}{8\pi} \left\{ A_1(t) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + A_2(t) r_{,i} r_{,j} \right\} H(t) \\
 &T_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; t) \\
 &= -\frac{1}{4\pi r} A_3(t) \left[ r_{,k} n_k(\mathbf{x}) \delta_{ij} \right. \\
 &\quad \left. + n_i(\mathbf{x}) r_{,j} - n_j(\mathbf{x}) r_{,i} \right] H(t) \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi r} A_4(t) 2 r_{,k} n_k(\mathbf{x}) r_{,i} r_{,j} H(t) \quad (2)
 \end{aligned}$$

식 (2)에서  $\delta_{ij}$ 는 Dirac delta 함수를,  $H(t)$ 는 Heaviside unit step 함수를 나타내고,

$$\begin{aligned}
 r_{,i} &= \frac{r_i}{r} \\
 r_i &= x_i - y_i \\
 r^2 &= r_i r_i
 \end{aligned} \quad (3)$$

$y_i$  : 필드점 좌표  
 $x_i$  : 적분점 좌표

이다. 식 (2)의  $A_i(t)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )는 탄성-점탄성 대응원리를 탄성 기본해에 적용하여 구할 수 있다. 실제 점탄성체에 대한 기본해를 구하는 과정은 3장에서 설명되어진다.

식 (1)에서 체력벡터가 포함되어 있는 영역적분은 수학적인 방법에 의해 경계적분으로 변형될 수 있으므로[7], 시간적분과 경계적분을 효율적으로 처리하면 식 (1)를 풀 수가 있다. 여기에서는 문제를 단순화하기 위해서 체력벡터가 무시될 수 있다고 가정한다. 시간 적분은 Lee and Westmann이 적용한 수정 심프슨공식(Modified Simpson's Rule)을 사용하여 해결할 수 있고, 경계적분은 변위와 표면력의 2차 변동(quadratic variation)을 가정하여 효율적으로 풀 수 있다. 자세한 계산과

정은 참고문헌[5]에 기술되어 있다. 결과적으로 방정식은 다음과 같이 행렬방정식의 형태로 구해진다.

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{G}]\{\mathbf{t}\} + \{\mathbf{R}^*\} \quad (4)$$

식 (4)에서  $\mathbf{H}$ 와  $\mathbf{G}$ 는 영향행렬(influence matrices)을 나타내고  $\mathbf{R}^*$ 는 점탄성영향을 나타낸다. 경계조건을 식 (4)에 적용하면 시간의 변화에 따른 경계면에서의 변위와 표면력 변화를 구할 수 있다.

경계면에서 변위와 표면력을 시간변화에 따라 구한 후에는, 내부 영역에서의 변위와 응력을 구할 수 있다. 체력벡터가 무시될 수 있다고 가정하면, 내부영역에서의 변위와 응력을 표현한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 &u_i(\mathbf{x}, t) \\
 &= \int_S [t_j(\mathbf{y}', t) U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; 0+) \\
 &\quad + \int_{0+}^t t_j(\mathbf{y}', t-t') \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; t')}{\partial t'} dt'] dS(\mathbf{y}') \\
 &\quad - \int_S [u_j(\mathbf{y}', t) T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; 0+)
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 &\quad + \int_{0+}^t u_j(\mathbf{y}', t-t') \frac{\partial T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; t')}{\partial t'} dt'] dS(\mathbf{y}') \\
 &\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \\
 &= \int_S [t_k(\mathbf{y}', t) D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; 0+) \\
 &\quad + \int_{0+}^t t_k(\mathbf{y}', t-t') \frac{\partial D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; t')}{\partial t'} dt'] dS(\mathbf{y}') \\
 &\quad - \int_S [u_k(\mathbf{y}', t) S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'; 0+)
 \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)의 응력커널(stress kernels)  $S_{kij}$ 와  $D_{kij}$ 들은 일반적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 &D_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; t) \\
 &= \frac{1}{4\pi r} [A_3(t) (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) \\
 &\quad + A_4(t) r_{,k} r_{,i} r_{,j}] H(t) \\
 &S_{kij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A_5(t)}{2\pi r^2} [2\delta_{ij} r_{,k} r_{,l} n_l(\mathbf{x}) + \delta_{jk} n_i(\mathbf{x}) \\
 &+ \delta_{ki} n_j(\mathbf{x}) + 2r_{,i} r_{,j} n_k(\mathbf{x})] H(t) \\
 &+ \frac{A_6(t)}{2\pi r^2} 2[(\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) r_{,l} n_l(\mathbf{x}) \\
 &+ r_{,k} r_{,j} n_i(\mathbf{x}) + r_{,k} r_{,i} n_j(\mathbf{x})] H(t) \\
 &- \frac{A_7(t)}{2\pi r^2} 8 r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} n_l(\mathbf{x}) H(t) \\
 &- \frac{A_8(t)}{2\pi r^2} \delta_{ij} n_k(\mathbf{x}) H(t) \quad (7)
 \end{aligned}$$

식 (7)에서 사용한 기호들에 대한 정의는 식 (3)에 나타나 있고,  $A_i(t)$  ( $i=3, 4, \dots, 8$ ) 들은 탄성-점탄성 대응원리를 이용하여 탄성해로부터 구할 수 있다.

식 (5)와 (6)들은 식 (1)에서 구해진 경계변위와 표면력 값을 이용하여 계산되는데, 시간적분에 대해서는 수정 심프슨공식을, 경계적분에 대해서는 표준경계 적분법을 적용하면 된다.

### 3. 수치 해석 과정 및 예제

앞장에서 기술한 시간영역에서의 경계요소법을 실제 점탄성체 구조물의 해석에 적용하는 과정을 보이기 위해서 일정한 내압  $P_0 H(t)$ 가 작용하는 내부 반지름  $a$ , 외부 반지름  $b$ 인 두꺼운 중공실린더를 택하였으며, 실린더는 평면변형률상태에 있다고 가정한다. 여기에서  $H(t)$ 는 Heaviside unit step 함수를 나타낸다. 실린더의 재질은 인장에서는 점탄성적거동으로, 체적에서는 탄성적 거동으로 특성화 된다고 가정하였다. 이 예제에서는 참고문헌[8]에 기술된 물성값들을 사용하고 있는데, 점탄성 인장함수  $E(t)$ 와 체적탄성계수  $K(t)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$E(t) = \frac{3.2}{1. + 0.0336t^{0.19}} \text{ GPa} \quad (8)$$

$$K(t) = K_0$$

식 (8)에서  $t$ 는 시간(분)을 나타내고,  $K_0$ 는 정수를 가리킨다. 본예제에서는  $K_0=2.67\text{GPa}$ 의 값을 택하였다.

#### 3.1 기본해와 응력커널 계산과정

식 (8)에 대한 기본해와 응력커널을 구하는 과정은 다음과 같다.

1) 식 (2)와 (7)로부터 Laplace 변형된 기본해  $U_{ij}^*$ ,  $T_{ij}^*$ 와 응력커널  $D_{kij}^*$ ,  $S_{kij}^*$ 를 구한다. 즉, 변위 기본해

$$\begin{aligned}
 U_{ij}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}; s) = & \frac{1}{8\pi} \left[ A_1^*(s) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} \right. \\
 & \left. + A_2^*(s) r_{,i} r_{,j} \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

표면응력 기본해

$$\begin{aligned}
 U_{ij}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}; s) = & -\frac{1}{4\pi r} \left\{ A_3^*(s) [r_{,k} n_k(\mathbf{x}) \delta_{ij} \right. \\
 & \left. + n_i(\mathbf{x}) r_{,j} - n_j(\mathbf{x}) r_{,i}] \right. \\
 & \left. + 2A_4^*(s) r_{,k} n_k(\mathbf{x}) r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

응력커널

$$\begin{aligned}
 D_{kij}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}; s) = & \frac{1}{4\pi r} \left[ A_5^*(s) (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) \right. \\
 & \left. - \delta_{ij} r_{,k} \right] + A_4^*(s) r_{,k} r_{,i} r_{,j} \\
 S_{kij}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}; s) = & \frac{A_5^*(s)}{2\pi r^2} [2\delta_{ij} r_{,k} r_{,l} n_l(\mathbf{x}) + \delta_{jk} n_i(\mathbf{x}) \\
 & + \delta_{ki} n_j(\mathbf{x}) + 2r_{,i} r_{,j} n_k(\mathbf{x})] \\
 & + \frac{2A_6^*(s)}{2\pi r^2} [(\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) r_{,l} n_l(\mathbf{x}) \\
 & + r_{,k} r_{,j} n_i(\mathbf{x}) + r_{,k} r_{,i} n_j(\mathbf{x})] \\
 & - \frac{8A_7^*(s)}{2\pi r^2} r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} n_l(\mathbf{x}) \\
 & - \frac{A_8^*(s)}{2\pi r^2} \delta_{ij} n_k(\mathbf{x}) \quad (11)
 \end{aligned}$$

윗식들에서  $s$ 는 Laplace 변형변수를 나타내고, 윗첨자 \*는 함수의 Laplace 변형을 표시한다.  $A_i^*(s)$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ )은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 A_1^*(s) = & \frac{1}{s} \\
 & \left\{ \frac{2[3sK^*(s) + 2sE^*(s)] [9sK^*(s) - sE^*(s)]}{3sK^*(s) sE^*(s) [3sK^*(s) + sE^*(s)]} \right\} \\
 A_2^*(s) = & \frac{1}{s} \left\{ \frac{2[9sK^*(s) - sE^*(s)]}{sE^*(s) [3sK^*(s) + sE^*(s)]} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3^*(s) &= \frac{2sE^*(s)}{s[3sK^*(s)+sE^*(s)]} \\
 A_4^*(s) &= \frac{6sK^*(s)}{s[3sK^*(s)+sE^*(s)]} \quad (12) \\
 A_5^*(s) &= \frac{6sK^*(s)[sE^*(s)]^2}{s[9sK^*(s)-sE^*(s)][3sK^*(s)+sE^*(s)]} \\
 A_6^*(s) &= \frac{3sK^*(s)sE^*(s)[3sK^*(s)-sE^*(s)]}{s[9sK^*(s)-sE^*(s)][3sK^*(s)+sE^*(s)]} \\
 A_7^*(s) &= \frac{18[sK^*(s)]^2sE^*(s)}{s[9sK^*(s)-sE^*(s)][3sK^*(s)+sE^*(s)]} \\
 A_8^*(s) &= -\frac{6sK^*(s)sE^*(s)[3sK^*(s)-2sE^*(s)]}{s[9sK^*(s)-sE^*(s)][3sK^*(s)+sE^*(s)]}
 \end{aligned}$$

K\*(s)와 E\*(s)들은 각각 K(t)와 E(t)의 Laplace 변형을 나타내는데, 식 (12)는 탄성문제의 기본해와 응력커널에 탄성-점탄성 대응원리를 적용하여 구해진다.

2) 식 (8)로 주어진 인장이완함수 E(t)를 병치법을 사용하여 다음과 같은 프로니 시리즈로 변형한다.

$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^I E_i \exp(-\lambda_i t) \quad (13)$$

I값은 얻고자 하는 정확도에 따라 여러가지 값을 선택할 수 있는데 여기에서는 I=10을 택하였다. I=10에 대한 E<sub>i</sub>와 λ<sub>i</sub>의 값들은 표 1에 열거되어 있는데 이러한 값들을 사용할 경우 식 (13)은 0 ≤ t ≤ 10<sup>10</sup>(분) 범위에서 식 (8)에 주어진 E(t) 대신 사용될 수 있다.

표 1. 식 (13)로 표현된 프로니 시리즈의 상수들의 값

λ <sub>i</sub> (min. <sup>-1</sup> )	E <sub>i</sub> (MPa)
0.20000E-09	0.37631E+03
0.20000E-08	0.33790E+03
0.20000E-07	0.35434E+03
0.20000E-06	0.32592E+03
0.20000E-05	0.27479E+03
0.20000E-04	0.21487E+03
0.20000E-03	0.15701E+03
0.20000E-02	0.11662E+03
0.20000E-01	0.51856E+02
0.20000E+00	0.16910E+03
-	E <sub>0</sub> =0.82126E+03

3) K\*(s)와 E\*(s)를 계산하여 식 (12)의 첫번째 식에 대입한 후 정리하면

$$\begin{aligned}
 A_1^*(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^{20} + b_1s^{19} + b_2s^{18} + \dots + b_{20}}{s \prod_{i=1}^{20} (s+c_i)} \\
 &= \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s+c_1} + \frac{a_2}{s+c_2} + \dots + \frac{a_{20}}{s+c_{20}} \quad (14)
 \end{aligned}$$

로 표시되며, 여기에서 b<sub>i</sub>와 c<sub>i</sub>(i=1, 2, …, 20)는 계산과정에서 산출된 상수들이다. 또한,

$$\begin{aligned}
 N(s) &= s^{20} + b_1s^{19} + b_2s^{18} + \dots + b_{20} \\
 D(s) &= s \prod_{i=1}^{20} (s+c_i) \quad (14')
 \end{aligned}$$

이다. 식 (14)에서 c<sub>0</sub>, c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, …, c<sub>20</sub>(c<sub>0</sub>=0)들은 서로 다른 값들을 가지므로 a<sub>i</sub>값들은 다음식에 의해 구해진다.

$$\begin{aligned}
 a_i &= \lim_{s \rightarrow -c_i} (s+c_i) \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(c_i)}{D'(c_i)} \\
 (i &= 0, 1, 2, \dots, 20) \quad (15)
 \end{aligned}$$

식 (14)와 (15)으로부터, A<sub>1</sub><sup>\*</sup>(s)는 다음과 같이 A<sub>1</sub>(t)로 전환된다.

$$A_1(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{20} a_i \exp(-c_i t) \quad (16)$$

4) 유사한 과정을 통하여, A<sub>j</sub>(j=2, 3, …, 8)를 계산할 수 있다.

위의 계산과정에서 구해진 함수 A<sub>i</sub>(t)(i=1, 2, 3, …, 8)들은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 A_1(t) &= a_1^0 + \sum_{i=1}^{20} a_1^i \exp(-c_1^i t) \\
 A_2(t) &= a_2^0 + \sum_{i=1}^{20} a_2^i \exp(-c_2^i t) \\
 A_3(t) &= a_3^0 + \sum_{i=1}^{10} a_3^i \exp(-c_3^i t) \\
 A_4(t) &= a_4^0 + \sum_{i=1}^{10} a_4^i \exp(-c_4^i t) \quad (17) \\
 A_5(t) &= a_5^0 + \sum_{i=1}^{20} a_5^i \exp(-c_5^i t)
 \end{aligned}$$

$$A_6(t) = a_6^0 + \sum_{i=1}^{20} a_6^i \exp(-c_i^6 t)$$

$$A_7(t) = a_7^0 + \sum_{i=1}^{20} a_7^i \exp(-c_i^7 t)$$

$$A_8(t) = a_8^0 + \sum_{i=1}^{20} a_8^i \exp(-c_i^8 t)$$

식 (17)에 나타나는 각 함수의 상수들은 수치적으로 계산되는데, 표 2는 계산 결과에서  $A_1(t)$ 와  $A_2(t)$ 의 상수들을 열거하고 있다.

표 2. 식 (17)의  $A_1(t)$ 와  $A_2(t)$ 의 상수들의 값

$a_i^1(\text{MPa}^{-1})$	$a_i^2(\text{MPa}^{-1})$	$c_i^1, c_i^2(\text{min.}^{-1})$
-0.10409E-03	-0.10409E-03	0.18946E+00
-0.34529E-04	-0.34529E-04	0.19657E-01
-0.81264E-04	-0.81264E-04	0.19221E-02
-0.12016E-03	-0.12016E-03	0.18909E-03
-0.18801E-03	-0.18801E-03	0.18423E-04
-0.29189E-03	-0.29189E-03	0.17814E-05
-0.45331E-03	-0.45331E-03	0.17089E-06
-0.70736E-03	-0.70736E-03	0.16290E-07
-0.10487E-02	-0.10487E-02	0.15661E-08
-0.24015E-02	-0.24015E-02	0.13569E-09
-0.10916E-04	0.10916E-04	0.19698E+00
-0.34216E-05	0.34216E-05	0.19906E-01
-0.77905E-05	0.77905E-05	0.19788E-02
-0.10753E-04	0.10753E-04	0.19712E-03
-0.15228E-04	0.15228E-04	0.19600E-04
-0.20405E-04	0.20405E-04	0.19477E-05
-0.25683E-04	0.25683E-04	0.19363E-06
-0.29955E-04	0.29955E-04	0.19285E-07
-0.30731E-04	0.30731E-04	0.19292E-08
-0.37342E-04	0.37342E-04	0.19179E-09
$a_1^0=0.77124E-02$	$a_2^0=0.64000E-02$	-

3.2 수치해석 결과

이 예제에서는  $P_0=100\text{MPa}$ ,  $a=8\text{cm}$ ,  $b=16\text{cm}$ 를 택하였다. 실린더의 대칭성으로 인해 그림 1과 같이 4분의 1만 모델화하면 되는데, 이 예제의 수치해석 모델은 경계면을 따라 24개의 2차 변동요소로 이루어져 있다. 계산된 결과들은, 탄성-점탄성 대응원리를 이용하여 관련 탄성해로부터 얻어진 해석해와 비교되었다. 수정 심프슨공식을 적용하여 식 (1)의 해를 구할 때 시간적분을 일정한 크기의 시간간격으로 나누어야 하는데, 그림 2는

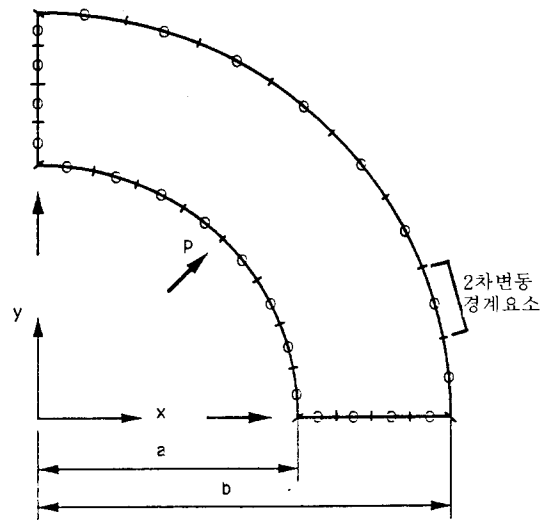


그림 1. 점탄성 중공 실린더의 경계요소해석 모델

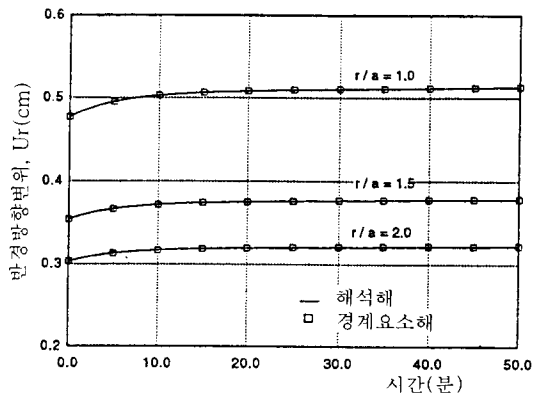


그림 2. 점탄성 중공실린더의 시간 변화에 따른 반경방향 변위

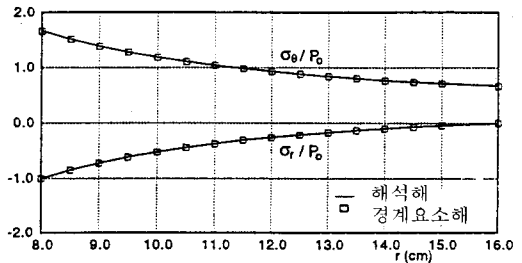


그림 3. 시간 t=50분에서 반경방향응력과 원주응력의 분포

시간간격  $\Delta t=5\text{분}$ 을 사용하여 시간  $t=50\text{분}$ 까지에 대해서 계산한 반경방향 변위를 보여주고 있

고, 그림 3은 t=50분에서 반경방향응력과 원주응력의 분포를 나타내고 있다. 표 3에는 t=50분에서 반경방향변위, 반경방향응력과 원주응력에 대한 수치해석의 오차가 열거되어 있다. 수치해석의 결과는 매우 정확한 값을 보여주고 있다.

표 3. 시간 t=50분에서, 점탄성 증공 실린더의 반경방향 변위, 반경방향 응력, 원주응력의 수치오차

		$u_r$	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$
경계점	r=1.0 a	0.039%	-	0.466 %
	r=1.5 a	0.035%	-	0.185 %
	r=2.0 a	0.032%	-	0.085 %
내부점	r=1.25a	0.035%	0.006%	0.003 %
	r=1.5 a	0.033%	0.002%	0.0001%
	r=1.75a	0.051%	0.016%	0.004 %

#### 4. 결 론

이 논문에서는 시간영역에서의 경계요소법을 이용하여 실제 점탄성체의 해석과정을 보여 주었다. 일반적으로 실제 점탄성체의 이완계수는 복잡한 함수 형태를 가지므로, 이러한 이완함수를 경계적분방정식에 직접 적용하기 위해서 병치법을 사용하여 이완함수를 유한한 크기의 프로니 시리즈로 전개하였다. 이러한 시리즈 형태는 탄성-점탄성 대응원리를 이용하여 기본해와 응력커널을 구하는데 매우 적합하고, 전체적인 계산과정도 수월하다. 예제에서 보여준 것처럼 제안된 접근 방법은 매우 효과적이고 정확한 결과를 산출하며, 이러한 결과는 본 논문의 방법이 점탄성체 실제구조물의 수치해석에 널리 응용될 수 있음을 보여준다.

#### References

1. Rizzo, F. J. and Shippy, D. J., "An Application of the Correspondence Principle of Linear Viscoelasticity Theory," *SIAM J. Appl. Math.*, 1971, **21**, 321-330.
2. Tanaka, M., "New Integral Equation Approach to Viscoelastic Problems," in *Topics in Boundary Element Research*, Vol. 3: Computational Aspects, Brebbia, C. A. (ed.), Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1987, 25-35.
3. Shinokawa, T., Kaneko, No., Yoshida, N., and Kawahara, M., "Application of Viscoelastic Combined Finite and Boundary Element Analysis to Geotechnical Engineering," in *Boundary Element VII*, Brebbia, C. A. (ed.), Computational Mechanics Publication 1985, (10) 37-46.
4. Sim, W. J. and Kwak, B. M., "Linear Viscoelastic Analysis in Time Domain by Boundary Element Method," *Computers & Structures*, 1988, **29**, 531-539.
5. Lee, S. S. and Westmann, R. A., "Application of Boundary Element Method to Viscoelastic Problems," in *Boundary Element XV*, Brebbia, C. A. and Rencis, J. J. (ed.), Elsevier Applied Science, 1993, **2**, 73-80.
6. Christensen, R. M., *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*, 2nd ed., Academic Press, 1982.
7. Brebbia, C. A. and Dominguez, J., *Boundary Elements An Introductory Course*, 1989, McGraw-Hill Book Company.
8. Weitsman, Y., "Residual Thermal Stresses Due to Cool-Down of Epoxy-Resin Composites," *J. Applied Mechanics*, 1979, **46**, 563-567.

(접수일자 : 1993. 11. 29)