

內壓을 받는 複合 적층 파이프(GFRP) 構造의 有限要素 解析

Finite Element Analysis of Glass Fiber Reinforced Plastic Pipes Under Internal Pressure

조 병 완*
Cho, Byung-Wan

.....
Abstract

A degenerated cylindrical shell element for modeling glass fiber reinforced plastic pipes is developed and its performance for static structural analysis under internal uniform pressure is evaluated. The element is a nine node degenerated solid shell element with reduced integration technique, addition of nonconforming displacement modes, and assumed strain method to improve convergence of analysis. Several numerical examples are solved and compared with analytical solutions and other F.E.M programs. The results show that the increment of fiber orientation in the GFRP pipes with reference to the longitudinal axis cause less radial displacements and much stiffness in the pipes. This is reasonable since the internal pressure will primarily cause hoop stresses in the ring and 90-angle ply GFRP ring carry these efficiently in pure tension.

요 약

내압을 받는 섬유강화 복합적층 파이프 구조를 해석하기 위해 감절점 원통형 쉘 유한요소를 이용하였다. 이 요소는 locking현상을 제거하고, 수렴성을 개선하기 위해 감차적분기법, 비적합 변위형의 추가, 가정된 전단 변형 도장을 사용한 9절점의 3차원 쉘 유한요소이다. 이 유한요소를 이용하여 여러개의 예제를 해석하고, 결과를 이론식 및 다른 구조해석 프로그램과 비교하였다. 비교결과 유한요소의 수렴도 양호하였고, 섬유강화 복합적층 파이프 구조의 섬유 배향 각도를 증가시키면 따라 파이프의 처짐은 감소하면서 파이프의 강성이 증가함을 알 수 있고 이는 또한 90°적층 각도가 내압을 받는 파이프 구조의 hoop tension을 유효하게 받을 수 있음을 보여주고 있다.

.....
1. 서 론

섬유강화 복합재료는 재료의 높은 비강도(high strength to weight), 비강성(high stiffness to weight)... 등으로 중량에 민감한 첨단산업 구조

물에 섬유방향 및 적층방법을 조절함으로써 예상 되는 복잡한 하중조건에 적합한 이상적인 구조요소를 제작 또는 건설할 수 있다는 장점때문에 항공기, 우주선, 로켓트, 잠수함, 압력용기, 각종 수

* 정희원, 한양대학교 공과대학 토목공학과, 조교수, 공학박사

이 논문에 대한 토론을 1994년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1995년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

송파이프... 등 여러 산업분야에서 이에 대한 연구 개발 및 응용이 증대되고 있다. 여기서 복합재료 (composite material)란 단일소재로서 재료의 강도 및 역학적 특성을 만족시킬 수 없는 경우, 두 종류 이상의 소재를 조합 결합시켜 보다 개선된 우수한 역학적 성질을 갖는 재료를 지칭한다.

복합재료는 기지의 재료(matrix)와 보강재(reinforcement)의 조합에 따라, 여러 종류의 복합재료가 있으나, 일방향 보강섬유를 가진 단층의 적층(lay-up)에 의한 적층복합재(laminated composite)를 의미하며, 기지의 재료(matrix)는 무기계의 시멘트, 석고, 석회질, 생석회, 인산 알루미늄, 유리, 유리계의 염화비닐, 불포화 폴리에스테르, 아크릴 그리고 가장 많이 이용되는 에폭시 계열이고, 보강섬유로는 강섬유(steel fiber), 탄소섬유(carbon fiber), 유리섬유(glass fiber), 흑연섬유(graphite), boron섬유, keblar섬유로 불리우는 aramid섬유 등이 있다.

일반적으로 많이 이용되는 AF-994 유리섬유는 밀도(density) 2.49g/cm^3 , 0.38mm 직경의 섬유 한가닥의 인장강도가 $665,000\text{psi}$ ($46,800\text{kg/cm}^2$), 탄성계수는 $1.24 \times 10^7\text{psi}$ ($868,000\text{kg/cm}^2$) 정도이고, boron섬유는 유리섬유 탄성계수의 약 5배 정도($55 \times 10^6\text{psi}$)에, 강도는 유리섬유보다 조금 적거나 거의 같고, 보론섬유의 직경은 텅스텐 입자의 직경 0.5mm 으로 인해 유리섬유 직경의 약 10배 정도인 $3\text{--}5\text{mm}$ 정도이다. 여기서 glass fiber reinforced plastic은 내열, 내수, 내약품성이 풍부한 열경화성수지와 glass fiber와 같은 우수한 기계적 성질을 갖는 보강재와의 복합재료로서 높은 내식성과 내후성을 가지고 있으며, 높은 강도를 가지고 있어 안전성이 우수하다. 또한 강성이 크고 가벼워 선반 가공 및 취급이 용이하며, 열 전도율이 철의 $1/200$ 이하로 단열성이 우수하여 보온, 보냉에 큰 효과가 있다. 현재 폐수 처리용, 화학 플랜트, 석유공업용, 식품공업용 등으로 사용되고 있는 GFRP소재는 장래 구조용 재료 및 대형 상하수도관 같은 건설재료로 크게 사용될 전망이다.

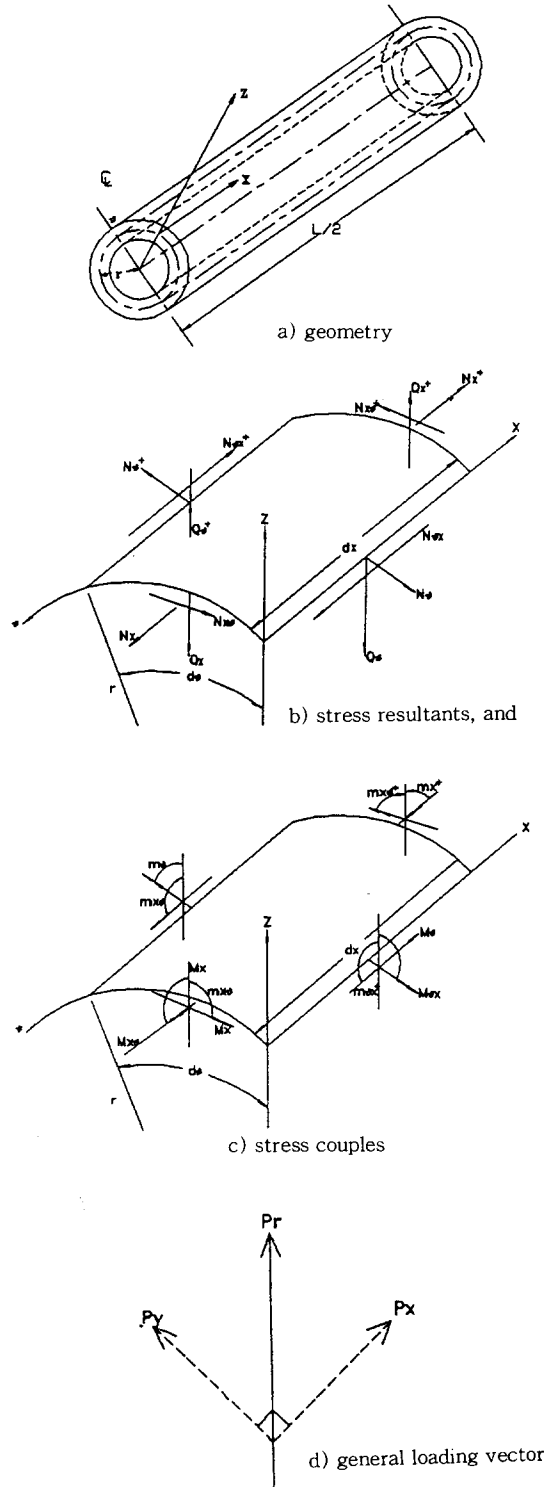


Fig. 1 cylindrical shell

2. 원통형 셸구조의 지배방정식

Fig. 1에 보인 바와 같이 반경r인 원통셸의 표면에서 축방향으로 dx, 원주방향으로 r · dθ인 미소 요소의 면에 작용하는 모든 힘과 모멘트는 축방향력과 모멘트 N_x, M_x 원주방향의 힘과 모멘트 N_θ, M_θ 반경방향의 전단력 Q_x, Q_θ 양두께 방향의 평면 전단력 N_{xθ}, N_{θx} 그로 인한 비틀림 모멘트 M_{xθ}, M_{θx} 등이 있다. Fig. 1에서 N_x⁺는 축방향력의 변화성분으로 N_x + { ∂N_x / ∂x } dx를 나타내며, x, y, z 방향의 힘의 평형방정식과 x, y방향의 모멘트 평형방정식을 d_x · d_θ로 나누어 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + P_x \\ & = N_{x, x} + \frac{1}{r} \cdot N_{\theta x, \theta} + P_x = 0 \\ & \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{r} + P_y \\ & = N_{x\theta, x} + \frac{1}{r} \cdot N_{\theta, \theta} + \frac{Q_\theta}{r} + P_y = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r} N_\theta + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + P_r \\ & = -\frac{1}{r} N_\theta + Q_{x, x} + \frac{1}{r} \cdot Q_{\theta, \theta} + P_r = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + r \cdot \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - r Q_\theta \\ & = M_{\theta, \theta} + r \cdot M_{x\theta, x} - r \cdot Q_\theta = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & r \cdot \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - r Q_x \\ & = r \cdot M_{x, x} + M_{\theta x, \theta} - r \cdot Q_x = 0 \end{aligned}$$

식 (2)의 Q_x, Q_θ를 이용하여 식 (1)의 Q_x, Q_θ를 제거하여 정리하면,

$$\begin{aligned} & r \cdot N_{x, x} + N_{x\theta, \theta} + P_x \cdot r = 0 \\ & N_{\theta, \theta} + r \cdot N_{x\theta, \theta} - \frac{1}{r} M_{\theta, \theta} - M_{x\theta, x} + P_y \cdot r = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \cdot M_{\theta, \theta\theta} + 2M_{x\theta, x\theta} + r \cdot M_{x, xx} - N_\theta + P_r \cdot r = 0$$

식(3)은 3개의 평형방정식으로 6개의 미지수를 풀기위해 x, y, z축 기준면에서의 변형과 변위 관계식(4)를

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= U_{0, x} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r}(V_{0, \theta} + W) \\ \gamma_{x\theta} &= V_{0, x} + \frac{1}{r}U_{0, \theta} \\ \chi_x &= -W_{, xx} \\ \chi_\theta &= \frac{1}{r^2}(-W_{, \theta\theta} + V_{0, \theta}) \\ \chi_{x\theta} &= \frac{2}{r}(-W_{, x\theta} + V_{0, x}) \end{aligned} \quad (4)$$

셸 구조물의 후크의 법칙에 대입하여, 두께 t에 대해 적분하여 정리하면 다음과 같다. 여기서 ν는 포아슨 비, D는 휨강성계수이다.

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E \cdot t}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \right\} \right\} \\ N_\theta &= \frac{E \cdot t}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \\ N_{x\theta} &= \frac{E \cdot t}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \\ M_x &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{r^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\} \right\} \\ M_\theta &= -D \left\{ \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right\} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \\ M_{x\theta} &= -D(1-\nu) \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial \theta} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)를 다시 평형방정식(3)에 대입하여 정리하면, 일반하중을 받는 원통형 셸구조의 지배방정식(governing equation) (6)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2r} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \\ & - \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{P_x(1-\nu^2)}{E \cdot t} \\ & -\frac{1+\nu}{2r} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{t^2}{12r^2} \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right\} \\ & + \frac{t^2}{12r^2} \left\{ (1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

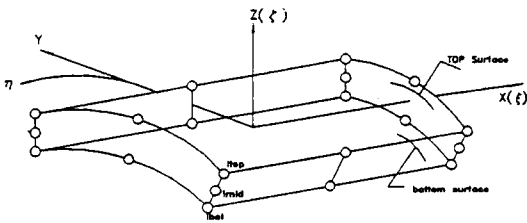
$$= \frac{P_y(1-\nu^2)}{E_t}$$

$$\frac{\nu \partial u}{r \partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{r^2} - \frac{t^2}{12} \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right\}$$

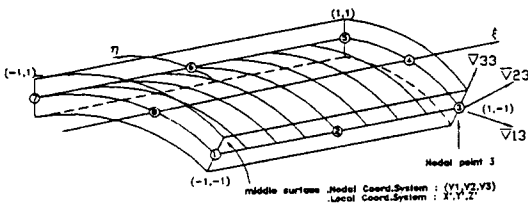
$$- \frac{t^2}{12r^2} \left\{ \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right\} = - \frac{P_r(1-\nu^2)}{E \cdot t}$$

3. 원통형 쉘 유한요소의 형상화

원통형 쉘 요소의 기하학적 형상은 Fig. 2에 보인 바와 같이 3차원 육면체 유한요소에서 중립면을 분리 형상화함으로써 중립면의 절점좌표와 중립면에 수직인 벡터(두께)를 사용하여 표시할 수 있고, 또는 중립면상의 각 절점의 위, 아래점의 두 좌표를 이용하여 표시할 수 있다. 이때 요소내부 임의의 한점의 좌표(x, y, z)는 형상함수 N과 절점좌표로부터 다음과 같이 구한다.



(a) 3-D Quadratic Element.
 • Global cartesian Coord : X Y Z
 • Curvilinear Coord $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq +1$



(b) Degenerated Cylindrical Shell Element

Fig. 2 degenerated shell element and Coordinates

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \frac{(1+\zeta)}{2} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}_{top}$$

$$+ \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \frac{(1-\zeta)}{2} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}_{bot}$$

또는,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{bmatrix}_{mid}$$

$$+ \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \zeta \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} \bar{v}_{3k}^x \\ \bar{v}_{3k}^y \\ \bar{v}_{3k}^z \end{bmatrix}$$

여기서 n은 절점수이며 $N_k(\xi, \eta)$ 는 중립면의 형상함수, h_k 는 k절점의 쉘두께이며, ξ, η 와 ζ 는 고려하는 점의 곡면좌표이다.

또한 degenerated 쉘 요소의 정형화에서 전제 한 가정, 즉 변형전에 중립면에 수직인 면은 변형 후에도 직선을 유지하고, 곡면에 수직인 응력성분은 없다고 한 가정에 의해 요소의 변위장은 중립면에 위치한 각각의 절점에서 전체좌표계 방향의 변위자유도(u, v, w)와 쉘의 중립면의 각각의 절점에서 정의되는 절점좌표계에 관한 회전자유도(α, β) 등 모두 5개의 절점자유도로서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix}_{mid}$$

$$+ \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \zeta b_k$$

여기서 b_k 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$b_k = \frac{h_k}{2} (\bar{v}'_3 - \bar{v}_3)$$

따라서 절점 k의 요소변위장에 대한 기여는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_k 0 0 N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{1k}^x & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{2k}^x \\ 0 N_k 0 N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{1k}^y & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{2k}^y \\ 0 0 N_k N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{1k}^z & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} v_{2k}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

또는

$$u_k = \underline{N}_k \cdot \underline{\delta}_k$$

따라서 전체요소의 변위장은 다음과 같다.

$$u = \underline{N} \cdot \underline{\delta}$$

여기서 $\underline{N} = [N_1, \dots, N_8]$: 형상함수

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1+\xi+\eta)(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}(1-\xi+\eta)(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$N_5 = -\frac{1}{4}(1-\xi-\eta)(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7 = -\frac{1}{4}(1+\xi-\eta)(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$$

$$\underline{\delta}^T = [\delta_1^T, \dots, \delta_8^T]$$

4. 적층 모델링과 후크의 법칙

복합적층 원통형 쉘의 경우 두께방향(ζ)으로 섬유 적층각도와 방법에 따라 재료의 특성이 불연속적으로 존재하게 된다. 따라서 응력이나 모멘트 등을 구하는 경우 두께방향으로의 적분하는 방식

을 변경하여야 한다. 비선형 재료문제의 경우 두께방향으로의 응력분포를 고려하여 적층수를 정하고 합리적으로 적분차수를 결정해야 한다. 본 연구에서는 쉘 두께 방향으로 층을 나누고 각각의 단층에 2점 적분식을 사용한 적층모델을 사용하였다. 적층들은 밑으로부터 순차적으로 쌓여 있고 각 단층의 응력은 각각의 단층의 적분점에서 구해진다. 그러므로 쉘의 두께 방향에서 응력의 분포는 부분선형함수로 보간된다. 각 단층들은 요소들마다 각각 상이하게 취할 수 있고 각 단층들의 두께도 동일할 필요는 없다.

복합적층인 경우 여러 단층으로 구성되어 있으므로 Fig. 3에 도시한 원통형 쉘의 두께와 각 단층의 두께는 각각의 절점에서의 단층 두께로부터 보간하여 계산된다. t_{ij} 를 절점 i에서 j번째 단층의 두께라고 하고 h_i 를 절점 i에서의 쉘 두께, t_j 는 요소 내부에서 j번째 단층의 두께로 표현하면 이들은 아래의 식으로 계산할 수 있다.

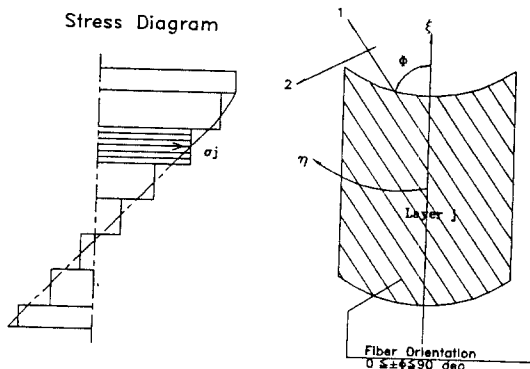
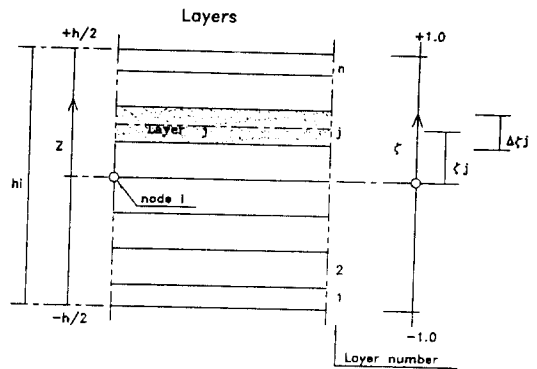


Fig. 3 Layered model and the corresponding stress representation

$$t_j = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) t_{ij}$$

$$h_i = \sum_{j=1}^m t_{ij}$$

$$h = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) h_i$$

여기서 n은 절점수, m은 단층수이다.

이때 임의 한 적층판의 섬유가 좌표축과 θ 의 각도로 배치되어, 섬유방향축을 1축, 직각방향을 2축이라할때 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & d'_{13} & 0 & 0 \\ d'_{21} & d'_{22} & d'_{23} & 0 & 0 \\ d'_{31} & d'_{32} & d'_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d'_{44} & d'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & d'_{54} & d'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

또는

$$[\sigma] = [d'][\epsilon]$$

여기서

$$\begin{aligned} d'_{11} &= d_{11} \cos^4 \theta + d_{22} \sin^4 \theta + (2d_{12} + 4d_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ d'_{12} &= d_{12} + (d_{11} + d_{22} - 2d_{12} - 4d_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta = d'_{21} \\ d'_{22} &= d_{11} \sin^4 \theta + d_{22} \cos^4 \theta + (2d_{12} + 4d_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ d'_{13} &= (d_{11} - d_{12} - 2d_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ &\quad + (d_{12} - d_{22} + 2d_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta = d'_{31} \\ d'_{23} &= (d_{11} - d_{12} - 2d_{33}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ &\quad + (d_{12} - d_{22} + 2d_{33}) \sin \theta \cos^3 \theta = d'_{32} \\ d'_{33} &= (d_{11} + d_{22} - 2d_{12} - 2d_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad + d_{33} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ d'_{44} &= d_{44} \cos^2 \theta + d_{55} \sin^2 \theta \\ d'_{45} &= \sin \theta \cos \theta (d_{55} - d_{44}) = d'_{54} \\ d'_{55} &= d_{55} \cos^2 \theta + d_{44} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & d_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ d_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & d_{33} &= G_{12} \end{aligned}$$

$$d_{44} = G_{13}, \quad d_{55} = G_{23}$$

여기서 ν_{ij} 는 i방향으로 힘을 받을때 j방향의 횡방향 변형율의 포아슨비이고 G_{ij} 는 ij평면상에서 전단탄성계수이다.

이때 섬유적층각도가 좌표축과 일치한다면(orthogonal laminated, $\theta=0$) 위 식은 다음과 같이 간단해진다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}$$

이 응력들을 이용해서 고전적인 셸이론(classical shell theory)에서 축방향력과 모멘트들을 구해 보면 다음과 같다.

$$[R] = [E][\bar{\epsilon}]$$

여기서

$$[R] = [N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}]^T$$

$$[\bar{\epsilon}] = [e^0, k, \gamma]$$

N_x, N_y, N_{xy} : normal force

$$N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dZ = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^{n_l} \sigma_{ij}^{kl} \Delta \xi^{kl} \right)$$

M_x, M_y, M_{xy} : bending moment

$$M_{ij} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} Z dZ = \frac{h^2}{4} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^{n_l} \sigma_{ij}^{kl} \xi^{kl} \Delta \xi^{kl} \right)$$

Q_x, Q_y : transverse shear stress resultant

$$Q_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{ij} dZ = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^{n_l} \sigma_{ij}^{kl} \Delta \xi^{kl} \right)$$

여기서 i, j는 x, y이고, m은 단층수, n_l 은 각 단층의 적분점수이다. 이때 [E] matrix는 다음과 같이 주어진다.

$$[E] = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

여기서

$$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d'_{ij}(1, z, z^2) dZ \quad (i,j=1,2,3)$$

$$G_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d'_{ij}, \quad (i,j=4,5)$$

만약 원통형 쉘 요소가 등방성(orthotropic)이고 전단변형을 수정해야 한다면

$$[G] = \begin{bmatrix} k_1^2 G_{44} & 0 \\ 0 & k_2^2 G_{55} \end{bmatrix}$$

k_1 과 k_2 는 전단변형 수정계수이다.

5. 내압을 받는 복합적층 파이프의 구조해석

본 연구에서 개발된 프로그램의 타당성과 정확도를 비교하기 위하여 일정한 크기의 내압을 받고 있는 양끝이 고정 지지된 원통형 파이프에 대하여 고전적 이론해와 기존의 발표된 자료... 등과 비교 검토하였다.

5.1 직교 이방성 원통의 경우

해석조건: 원통의 기하학적 형상 및 재료상수는 Fig.4와 같이 참고문헌과 비교하기 위하여 참고자료와 동일한 값을 사용하였다.

단면형상: 길이 $L=20$ inch, 반경 $r=20$ inch, 두께 $t=1$ inch

재료상수: $E_1=1$ 축 방향 탄성계수 $=7.5 \times 10^6$ psi

$E_2=2$ 축 방향 탄성계수 $=2.0 \times 10^6$ psi

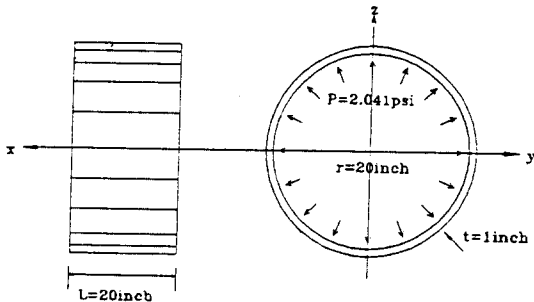


Fig. 4 cylindrical pipe under internal pressure

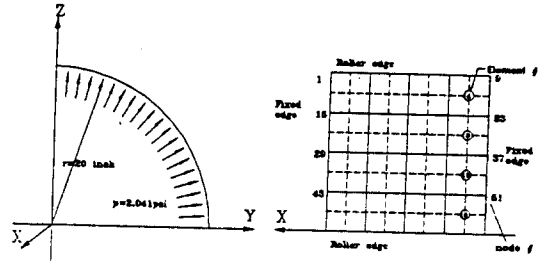


Fig. 5 1/ 4 meshes due to symmetry

$G_{12}=1-2$ 평면 전단계수 $=1.25 \times 10^6$ psi

$G_{23}=2-3$ 평면 전단계수 $=0.625 \times 10^6$ psi

$G_{13}=1-3$ 평면 전단계수 $=0.625 \times 10^6$ psi

$\nu_{12}=0.25$

하 중: 내압 $P=2.041$ psi

내압을 받는 원통형 파이프의 대칭성을 고려하여, 파이프의 1/4부분만 $4 \times 4=16$ element로 모델링 하였다. 해석 결과 감절점 등차매개 9절점 요소를 이용한 반경방향 최대절점이 Table 1에 보인 바와 같이 절점 5에서 Z방향 0.0003576, 절점 61에서 y방향 0.0003576으로 대칭성을 보여주고, 이는 Timoshenko의 이론적 해석치 0.000367과 거의 근접함을 보여주고 있다.

Table 1. Max. radial displacement of an orthotropic cylindrical shell under internal pressure

method	Max. radial displacement (inch)
Timoshenko's	0.000367
Sawamphakdi's	0.0003655
Reddy's	0.0003739
Jo's	0.0003576

5.2 복합 적층 원통 파이프의 해석.

앞의 예제와 같이 내압을 받는 복합적층 원통 파이프의 대칭성을 고려하여 파이프의 1/4부분만 $4 \times 4=16$ elements, 4 layers로 모델링 하였다. 이때 원통의 반경과 길이, 재료상수는 앞의 예제와 같고, 단지 적층각이 $(0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ)$, $(22.5^\circ/-22.5^\circ/22.5^\circ/-22.5^\circ)$, $(30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ)$, $(45^\circ$

$/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$), $(90^\circ/-90^\circ/90^\circ/-90^\circ)$ 변할 때 적층각의 변화에 따른 복합적층 파이프의 구조적 거동을 고찰하였다.

Table 2, 3은 4층 복합적층 파이프의 섬유배향 각도 변화에 따른 반경방향 처짐과 반력(hoop tension), 모멘트 반력등을 보여주고 있으며, 섬유배향이 축방향(X축 또는 1축)과 0° 일때 반경방향(radial) 처짐(γ_z)이 0.0003576인치로서 참고문헌의 같은 조건하에서의 처짐(γ_z) 0.0003732에 만족할 만큼 수렴하고 있고, 섬유 배향각도가 0° 에서 점차 커지면서 반경방향 처짐은 점차 감소하고 대칭성에 따른 1/4 절단면에서의 roller단에서 절단면에 수직인 반력이 점차 증가하여 파이프의 강성이 증가함을 알 수 있다. 또한 이는 내압에 따른 파이프 구조의 hoop tension을 섬유 배향각도가 90° 적층일때 효과적으로 받을 수 있음을 보여주고 있다.

또한 Fig. 6,7은 앞의 예제와 같은 내압 P를 받는 양단 고정인 길이 20인치 복합 적층 파이프의 축방향을 따라 반경방향 처짐의 변화를 보여주고

있으며, 양단 고정인 처짐 0에서 점차 증가하여 중앙방향에서 최대 처짐을 갖는 대칭형의 종모양을 하고 있으며 이 또한 섬유배향 각도가 커짐에 따라 강성이 증가하여 중앙처짐이 점차 감소함을 알 수 있다.

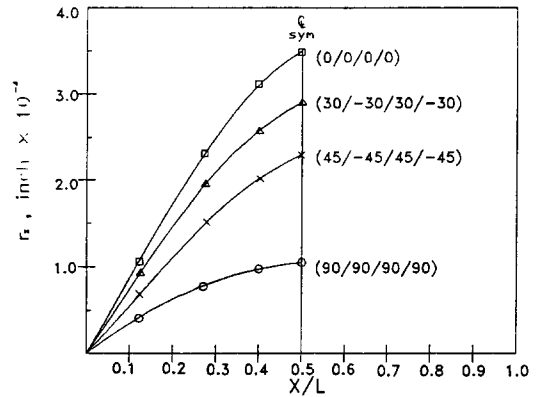


Fig. 6 comparisons of radial displacements along the X-axis(longitudinal axis)

Table 2. Max. radial displacements reactions depending on the fiber orientation

fiber orientation (radian)	0/0/0/0	$\pi/8$ $-\pi/8$ $\pi/8$ $-\pi/8$	$\pi/6$ $-\pi/6$ $\pi/6$ $-\pi/6$	$\pi/4$ $-\pi/4$ $\pi/4$ $-\pi/4$	$\pi/2$ $-\pi/2$ $\pi/2$ $-\pi/2$
Max. radial displacements (in 10^{-3} inch)	0.3576 (5,61)	0.3345 (5,61)	0.3091 (5,61)	0.2348 (5,61)	0.1081 (5,61)
reaction force(1b)	106.49 (4,60)	114.76 (4,60)	118.41 (4,60)	125.68 (4,60)	134.15 (4,60)
moment $M\alpha$ (1b, in) $M\beta$	108.26 1.74	92.54 2.62	80.82 2.97	57.69 3.08	34.63 1.25

Table 3. Max. radial displacements depending on the fiber orientation

orientation	0	$\pi/4$ $-\pi/4$ $\pi/4$ $-\pi/4$	$\pi/4$ $-\pi/4$ $\pi/4$ $-\pi/4$	0 $\pi/2$ $\pi/2$ 0	$\pi/2$ $-\pi/2$ $\pi/2$ $-\pi/2$
Max. radial displacements (in 10^{-3} inch)	0.3576	0.2398	0.2348	0.1782	0.1081

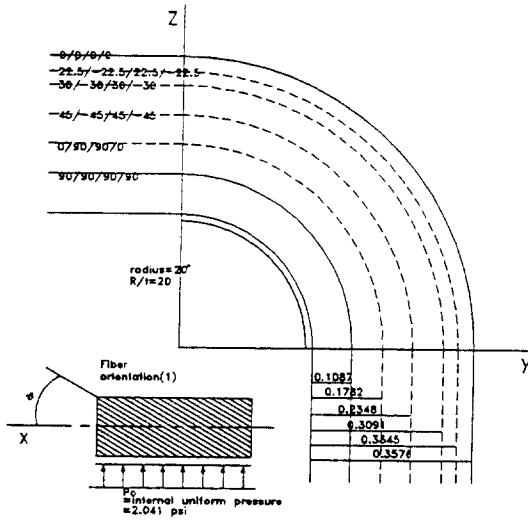


Fig. 7 max, radial displacements under uniform internal pressure depending on the fiber orientations

6. 맺음말

미래 건설구조물의 대형화, 경량화를 만족시켜 줄 수 있는 첨단 복합소재인 섬유강화 복합적층 파이프 구조를 해석하기 위하여, Owen and Hinton이 시도한 감질점(degenerated) 등매개개념(isoparametric concept)을 이용하여 프로그램을 개발하였다. 본 프로그램은 감차적분기법 및 가정된 전단변형도장을 사용하여 membrane and shear locking현상을 제거하고 파이프 전체의 거동을 유연하게 하기위해 비적합 변위형을 선택적으로 추가하는 기법을 채용하여 수렴성을 최대한 개선 하였으며, 해석결과 이는 Timoshenko의 이론치에 거의 수렴함을 보여주고 있다.

또한 내압을 받는 섬유강화 복합적층 파이프 구조의 해석결과 섬유 배향각도를 축방향에서 점차 증가시켜감으로써 반경 방향 처짐은 점점 감소하고, 대칭성에 따른 1/4 절단면에서의 수직반력은 점차 증가하여 강성이 커짐을 알 수 있고, 또한 이는 내압에 따른 파이프 구조의 hoop tension을 섬유 배향 각도가 90° 적층일때 효과적으로 받을 수 있음을 보여주고 있다.

7. Reference

1. R. T. Schwartz, "Characteristics of Boron Fibers and Boron Fiber Reinforced Plastic Composites", AIAA Jo, Vol. 5, No. 2, 1967.
2. D. P. Billington, "Thin Shell Concrete Structures", McGRAW-HILL, 2nd ED, 1982.
3. L. R. Calcote, "The Analysis of Laminated Composite Structures", Van Nostrand Reinhold Co.
4. A. C. Ugural, "Stresses in Plates and Shells", McGRAW-HILL, 1981.
5. B. Budiansky and J. L. Sanders, "on the best first order linear shell theory", Progress in Applied Mechanics, The Prager Anniversary Vol., 129-140 (1963).
6. S. Ahmad, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz, "Analysis of thick and thin shell structures by curved elements", Int. J. Num. Mthd. Eng., 2, 159-178 (1978).
7. S. A. Ambartsumyan, "Theory of Anisotropic Shells", Moscow, (1961), English translation, NASA TT F-118, May (1964).
8. S. B. Dong and R. L. Taylor, "On the theory of laminated anistropic shells and plastest", J. of Aerospace Sci.29, 969-975 (1962).
9. E. Hinton and D. R. J. Owen, "F. E. Software for plates and shells", Pineridge press.
10. A. B. Sabir and A. C. Lock, "The application of Finite Elements to the large deflection geometrically non-linear behavior of Cylindrical Shells", In Variational methods in Engineering, Edited by C. A. Brebbia and H. Tottenham (Eds), pp. 7/66-7/75, Southampton University Press, 1973.
11. G. Cantin and R. W. Clough, "A Curved, Cylindrical shell", finite element, AIAA Jo, 6, 1057-1062(1968)
12. H. C. Huang and E. Hinton, "A new node degenerated shell element with enhance dmombrane and shear interpolation", Int. J. Numer. Methods Eng., 22, 73-92(1986).

(접수일자 : 1993. 12. 24)