

# 강체와 접합된 고무의 균열에 대한 유한 요소 해석

## Finite Element Analysis for Cracks in Rubber bonded to a Rigid Material

김 창 식\*  
Kim, Chang-Sik  
임 세 영\*\*  
Im, Se-Young

### 요 약

혼합 유한 요소 기법을 이용하여 STEEL과 같은 강체와 접합된 RUBBER에서의 계면 균열을 해석한다. 먼저 비압축성 물질의 유한 요소 해석을 위해 혼합 유한요소(Mixed Finite Element) 정식화를 한다. 이때 RUBBER를 Mooney-Rivlin Material로 가정한다. 다음으로 대변형에 있어서 J-적분이 포텐셜 에너지 방출률로서의 의미를 갖는가를 확인하고 유한 요소 해석 결과를 검증한 후 여러 균열 길이에 대해서 에너지 방출률을 계산하고 균열 성장 안정성을 검토한다.

### Abstract

Cracks in rubber bonded to a rigid material such as steel are analyzed with the aid of a mixed finite element technique. Firstly the weak form is derived for finite element analysis of an incompressible material, and the Mooney-Rivlin form is assumed for the constitutive modeling of rubber. The numerical results from finite element analysis is examined to confirm the accuracy and convergence of solution by way of comparison to other numerical results. The interpretation of the J-integral for large elastic deformation as the energy release rate is confirmed, and the J-integral is calculated for varying crack length. The crack growth stability is discussed using the result of finite element analysis.

### 1. 서 론

STEEL-RUBBER 복합재는 타이어, 벨트, 호스(Hose) 등에 널리 사용되고 있다. 그러나 이와같은 복합재의 계면에는 제조 과정 중이나 사용 중에 균열이 존재할 수 있으며 특히 타이어의 경우 이 균열이 타이어의 수명에 큰 영향을 미친다. 즉 복합재의 계면에서 발생하거나 존재하는 균열

을 고속, 고하중으로 사용할 때 점점 성장하여 적층 분리(Delamination)을 일으키고 결국에는 구조물의 파괴에 까지 이른다.

일반적으로 결함을 포함하는 계면으로 형성된 구조물에 대해서 많은 연구자들이 그들의 연구를 통해 파괴 역학의 매개 변수와 그 값들을 측정하는 방법 등을 제시하고 있다. 이렇게 제시된 파괴 변수 중에 미소 변형의 경우 Rice[1]에 의하여 제

\* 한국타이어

\*\* 한국과학기술원 기계공학과

이 논문에 대한 토론을 1994년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1995년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

안된 J-적분이 있다. 이 J-적분은 물리적으로 균열이 성장할 때 방출되는 포텐셜 에너지의 변화량, 즉 포텐셜 에너지 방출률과 같고, 균질 탄성재료 내에서 보존 법칙을 만족하며 적분 경로에 무관한 성질을 갖게 된다. 이러한 J-적분의 성질에 의해서, 기존의 연구에 의해서 밝혀진 파괴 진행 영역(Fracture Process Zone) 밖에서 해석된 해를 이용하여 파괴역학적 변수들을 계산할 수 있으므로 편리하다. 또한 이러한 J-적분의 보존성과 경로 독립성은 계면 균열인 경우에도 유지됨을 박재학과 엄윤용[2]이 보여준 바 있다. 또 다른 보존적분으로는 Knowles와 Sternberg[3]가 발견한 M-적분이 있으며 이는 복잡한 형상 등으로 인하여 J-적분이 구하기 어려운 경우에 사용하며 이렇게 구해진 M-적분 값으로 J-적분 값을 구할 수 있다. 대변형 균질 탄성 재료의 경우도 Knowles와 Sternberg[3]가 Noether의 이론을 이용하여 또한 Chen과 Shield[4]가 역 변형접근(Inverse Deformation Approach)을 이용하여 보존적분을 제안하였다. 더욱이 Shield[5]는 운동학적 구속조건(Kinematic Constraint)이 있는 경우에도 보존성과 경로 독립성이 유지되도록 보존적분을 수정하였다. 이러한 연구 결과로 최근 파괴변수로 J-적분 값을 많이 사용하는 추세이다.

따라서 본 논문은 구조물의 수명에 크게 영향을 미치는 균열 성장 특성을 규명하기 위해서 위에서 언급한 파괴 변수를 이용하여 STEEL-RUBBER 복합재 내에 계면 균열이 있을 때 포텐셜 에너지 방출률을 연구하는 데 그 목적을 둔다. 먼저 Shield[5]가 제안한 J-적분이 포텐셜 에너지 방출률로서의 의미를 갖게 됨을 확인한다. 다음으로 STEEL-RUBBER 복합재와 같이 강체와 접합된 고무에서의 계면 균열을 유한요소법으로 해석하

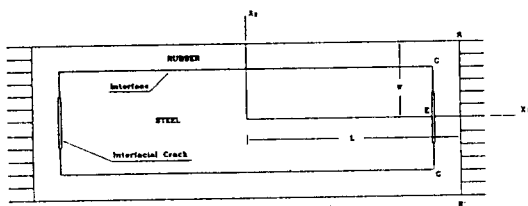
여 균열 길이에 대해 J-적분 값을 계산하고 균열 성장의 안정성을 검토한다.

유한 요소 해석은 강을 강체로, 고무를 Mooney-Rivlin Material로 가정하고 고무의 기하학적 비선형성을 고려하여 Total Lagrangian Approach를 이용하며 또한 고무의 고유 성질인 비압축성을 구속 조건으로 두어 Mixed Type 유한 요소 정식화를 하며 고무에 대한 변위장과 응력장을 수치 계산할 때 Babuska-Brezzi 안정조건[8]을 만족하는 혼합 유한 요소 기법을 이용한 유한 요소 해석을 한다.

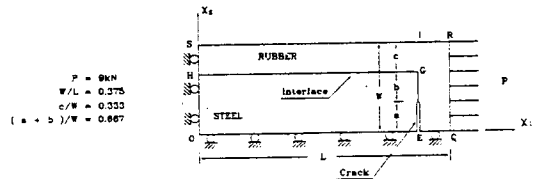
## 2. 이 론

### 2-1. 문제의 모델링

본 논문에서 다루는 문제의 모델은 일반적으로 사용되는 STEEL-RUBBER 복합재를 간략화하여 2차원 평면 변형(Plane Strain) 상태로 단순화시킨 것으로 이를 Fig. 1의 (a)에 보인다. Fig. 1의 (a)에 보인 것처럼 균열은  $X_2$ 축에 나란한 계면  $G-G'$  위에 놓여 있으며 면  $R-R'$ 상에 단순 인장 하중이 균일하게  $X_1$  방향으로 작용한다. 대칭성을 고려하면 Fig. 1의 (b)처럼 전체 모델의 1/4만을 해석하면 된다. 결국 본 논문에서 해석하고자 하는 문제의 모델은 균열이  $X_2$ 축에 나란한 계면 위에 놓여져 있으며 균열 선단은 점 E에서 시작하여 점 G로 접근하는 경우를 생각하며 더 나아가 점 G를 넘어서는 균열의 진전 방향이  $X_2$  방향과 나란히 진전된다는 보장은 없지만 일단  $X_2$  방향과 나란하게 균열이 진전된다고 가정하고 점 G에서 점 I까지 균열이 진전하는 경우에 대해서도 해석하기로 한다. 그리고 하중 경계조건은 Fig. 1의 (b)에서 처럼 기준 좌표계를 사용하는 경우 면 QR상에



(a) The Whole Model



(b) The One-Fourth of The Whole Model

Fig. 1 Interfacial Caracks in STEEL-RUBBER Composite

단순 인장 하중이 균일하게  $X_1$  방향으로 작용하는 경우로 하고 열에 의한 영향은 고려하지 않기로 한다. 변위 경계조건은 면 OS에서  $X_1$  방향을 고정시키고 또한 면 OQ에서  $X_2$  방향을 고정시켜 O점을 자연스럽게 고정시킴으로써 강제 운동을 제거한다.

강은 고무의 변형에 비해 아주 미소하므로 본 논문에서는 강을 강체로 가정하며 고무를 Mooney-Rivlin Material로 가정한다. 따라서 고무는 다음과 같은 변형률 에너지 밀도 함수를 갖는다[9].

$$W_s^0 = P_1(I_1 - 3) + P_2(I_2 - 3) \quad (1)$$

여기서  $W_s^0$ : 변형률 에너지 밀도 함수

$P_1, P_2$ : 재료 상수

$I_1$ : Cauchy Deformation Tensor의 The First Invariant

$I_2$ : Cauchy Deformation Tensor의 The Second Invariant

본 논문에서 사용된 고무의 종류는 경화된 천연 고무이고 그에 따른 물성치는  $P_1=170\text{kN/m}^2$ ,  $P_2=15\text{kN/m}^2$ 이다.

### 2-2. RUBBER의 유한 요소 수식화

지배 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다[7].

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial X_i} = 0 \quad \text{in } V^0 \quad (2)$$

$$T_{ij}N_i = \bar{t}_j \quad \text{on } S_{ij}^0 \quad (3)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_{ui}^0 \quad (4)$$

여기서

$T$ : 공칭 응력 텐서(Nominal Stress Tensor)

$N$ :  $S^0$ 에 대한 단위 법선 벡터이다.

식 (2)는 평형 방정식을 나타낸 것으로 정적 상태라고 가정하고 체적력 항을 없앤 형태이고 식 (3)은 표면력 경계 조건을, 식 (4)는 변위 경계 조건을 각각 나타낸다.

위의 방정식에서  $X_i, x_j$ 는 각각 기준 상태와 현재 상태를 나타내는 좌표계를 뜻한다. 그리고 공

칭 응력 텐서와 변형률 에너지 밀도 함수와의 관계로부터 식 (1)을 이용하면 아래와 같은 고무에 대한 구성 방정식을 얻을 수 있다.

$$T = 2F[(P_1 + P_2 I_1)I - P_2 C] + P_0 \text{ adj} F \quad (5)$$

여기서  $F$ 는 Deformation Gradient Tensor,  $I$ 는 Identity Tensor,  $C$ 는 Cauchy Deformation Tensor,  $\text{adj} F$ 는  $F$ 의 Adjoint tensor를 각각 나타낸다.  $P_0 \text{adj} F$ 항은 응력에 비압축성 구속 조건을 주는 항이고  $P_0$ 는 경계 조건으로부터 구해지는 압력 분포 변수와 관련된 스칼라량이다. 한편 식 (2)의 평형 방정식에 비압축성 조건을 부과하기 위해선 아래와 같은 구속 조건이 필요하다.

$$\det F = 1 \quad (6)$$

따라서 Mooney-Rivlin Material의 유한 요소 해석을 위한 지배 방정식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial T^T}{\partial X} = 0 \quad (7)$$

$$\det F = 1$$

$$T^T \cdot N = \bar{t}$$

$$u = \bar{u}$$

$$T = 2F[(P_1 + P_2 I_1)I - P_2 C] + P_0 \text{ adj} F$$

식 (7)에 변형전의 상태를 기준상태로 하는 Total Lagrangian 절차를 사용하여 Newton Scheme를 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial T^{T(n, i+1)}}{\partial X} = 0 \quad (8)$$

$$\det F^{(n, i+1)} = 1$$

$$T^T \cdot N^{(n, i+1)} = t^{(n+1)}$$

여기서  $(n, i+1)$ 은  $n$ 번째 시간 혹은 하중 증분에서  $(i+1)$ 번째 축차를 나타낸다. 위의 식(8)을 유한요소법에 사용하기 위해 가중 잔여법 및 Divergence Theorem를 이용하여 적분형태의 방정식으로 고쳐 표현하면 다음과 같다.

$$\int_{V^0} \frac{\partial w_j}{\partial X_i} T_{ij}^{(n, i+1)} dV = \int_{S_{ij}^0} w_j \bar{t}_j^{(n+1)} dS \quad (9)$$

$$\int_{V^0} v (\det F^{(n, i+1)} - 1) dV = 0$$

위 식에서  $w_i$ ,  $v$ 는 가중함수,  $S_i^n$ 는 응력이 주어진 표면을 나타내며 적분은 변형전 상태의 체적과 표면적에 대하여 이루어진다. 식 (9)를 증분 형태의 방정식으로 고치고 식 (5)를 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned} & \int_{V^0} \frac{\partial w_j}{\partial X_I} [\Delta S_{IJ} F_{Jj} + S_{IJ} \Delta F_{Jj} + P_0 \Delta \text{adj} F_{Jj}]^{(n, i+1)} \\ & \quad dV + \int_{V^0} \frac{\partial w_i}{\partial X_I} [\Delta P_0 \text{adj} F_{Ji}]^{(n, i+1)} dV \\ & = \int_{S_i^n} w_j \bar{t}_j^{(n+1)} dS - \int_{V^0} \frac{\partial w_i}{\partial X_I} T_{ij}^{(n, i)} dV \\ & \quad \int_{V^0} v [\text{adj} F_{Ji} \Delta F_{Ji}]^{(n, i+1)} dV \\ & = - \int_{V^0} v (\det \mathbf{F}^{(n, i)} - 1) dV \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $S_{IJ}$ 는 2nd Piola-Kirchhoff Stress Tensor이다. 다음으로 변위와 압력에 대한 형상 함수를 각각 정의하여 식 (10)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 요소에 대한 증분 평형 방정식이 행렬식으로 표시된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_P \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서  $\Delta \mathbf{u}$ 와  $\Delta \mathbf{P}$ 는 변위와 응력의 증분을 나타내고 Strain Matrix를  $\mathbf{B}$ 라 할 때  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{P}_u$ ,  $\mathbf{F}_u$ ,  $\mathbf{F}_P$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{V^0} \left[ \mathbf{B}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \left( \frac{\partial W_S^0}{\partial \mathbf{F}} \right) \mathbf{B} \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{B}_0 \mathbf{B}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} (\text{Adj} \mathbf{F}) \mathbf{B}^T \right]^{(n, i)} dV \\ \mathbf{G} &= \int_{V^0} [\mathbf{B}^T \text{Adj} \mathbf{F}]^{(n, i)} dV \\ \mathbf{P}_u &= \int_{S_i^n} \mathbf{w} \bar{\mathbf{t}}^{(n+1)} dS \\ \mathbf{F}_u &= \int_{V^0} \left[ \mathbf{B}^T \left( \frac{\partial W_S^0}{\partial \mathbf{F}} + P_0 \text{Adj} \mathbf{F} \right) \right]^{(n, i)} dV \\ \mathbf{F}_P &= \int_{V^0} [\det \mathbf{F} - 1]^{(n, i)} dV \end{aligned}$$

이 식 (11)에 대한 해를 얻음으로써 고무에 대한 혼합 유한 요소 해석을 할 수 있다.

### 2-3. RUBBER의 유한 요소 수치 해석 방법

본 논문에서는 Hughes[8]가 Babuska-Brezzi 안정 조건을 만족한다고 제안한 여러 요소들 중에 Continuous Pressure Element와 Discontinuous Pressure Element를 각각 사용하여 비교 검토한다. 즉 변위 요소는 9-절점 요소, 압력 요소는 4-절점 요소의 한가지 경우와 변위 요소는 9-절점 요소, 압력 요소는 3-절점 요소를 각각 사용하여 그 차이를 비교 검토하여 J-적분 계산에 이용한다. 또한 고무처럼 유연한 재료인 경우 문제에 따라선 종종 해가 수렴하지 않고 발산하며 혹은 수렴하더라도 수렴하는 데 많은 시간이 걸리기 때문에 본 논문에서는 프로그램의 효율을 높이기 위해 Line Search 기법을 이용하여 해를 구한다[6].

### 2-4. 대변형에 대한 J-적분의 보존과 경로 독립성

일반적으로 균질한 대변형 탄성 재료에 대해서 좌표축을 균열과 나란히 잡으면 다음과 같이 정의되는 J-적분은 보존된다[3, 4].

$$J = \int_{eV^0} \left\{ W_S^0 N_2 - \frac{\partial W_S^0}{\partial F_{j1}} F_{j2} N_1 \right\} dS \quad (12)$$

여기서

$eV^0$  : 폐 적분 경로

$W_S^0$  : 변형률 에너지 밀도 함수

$N_1$  : 적분 경로의 단위 법선 벡터 성분

$F_{ji}$  : Deformation Gradient Tensor

$dS$  : 적분 경로의 양의 방향으로 측정된 미소 변화량

이며 식 (12)은  $X_2$  좌표축과 균열을 나란히 잡은 경우의 J-적분으로 소위  $J_2$  적분이라고 칭하나 본 논문에서는 편의상 J-적분으로 칭한다. 또한 Shield[5]에 따르면 고무처럼 비압축성 구속조건이 있는 경우 다음과 같이 J-적분을 수정하였다.

$$J = \int_{eV^0} \left\{ W_S^0 N_2 - \frac{\partial W_S^0}{\partial F_{j1}} F_{j2} N_1 - P_0 N_2 \right\} dS \quad (13)$$

여기서  $P_0$ 는 Lagrangian Multiplier의 역할을 하면서 물리적으로 압력의 의미를 갖는다. 식

(13)의 구성 방정식 식 (5)를 대입하면 고무의 경우와 같은 비압축성 대변형 탄성 재료의 경우 J-적분은 다음과 같이 원래의 형태를 취한다.

$$J = \int_{\partial V^o} \left\{ W_s^o N_2 - t_j^o \frac{\partial u_j}{\partial \bar{X}_2} \right\} dS \quad (14)$$

여기서

$t_j^o$  : 적분 경로 상에 작용하는 공칭 Traction 벡터

$u_j$  : j방향으로의 변위

또한 본 논문에서 다루는 2차원 계면 형상의 문제의 경우도 박재학과 엄윤용[2]이 보여준 방법에 따르면 J-적분이 경로에 무관하게 일정한 값을 갖는다는 것을 쉽게 보일 수 있다.

2.5. 대변형에 대한 J-적분의 에너지 방출률로서의 의미

Fig. 2에서 균열이 a에서 da만큼 증가할 때 체적  $V^o$ (균열 선단 포함)에 에너지 보존 법칙을 적용하면,

$$G = -\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{DW_{ex}}{Da} - \frac{DW_{in}}{Da}$$

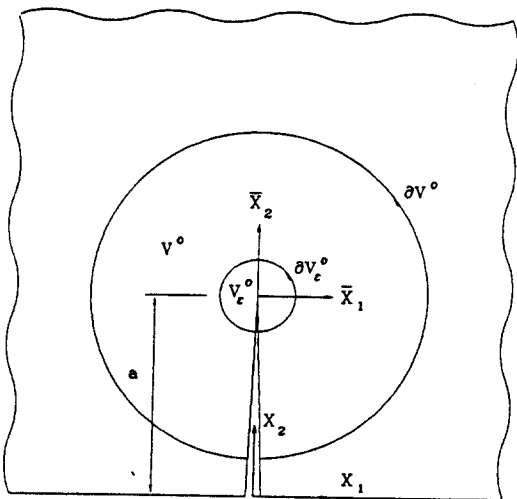


Fig. 2 Nomenclature for Cracked Body and Various Contours

$$= \int_{\partial V^o} t_i^o \frac{Du_i}{Da} dS - \frac{D}{Da} \int_{V^o} W_s^o dV \quad (15)$$

P : 균열이 존재하는 재료의 포텐셜 에너지

a : 균열 길이

$W_{ex}$  : 계가 외부에서 받은 일

$W_{in}$  : 내부 에너지

$t_i^o$  : 공칭 Traction 벡터

이며 이것은 체적력과 열에 의한 영향을 무시하고 정적 상태만을 고려한 것이다. 또한 체적  $V^o - V_c^o$ (균열 선단 제외)에 에너지 보존 법칙을 적용하면,

$$0 = \int_{\partial V^o} t_i^o \frac{Du_i}{Da} dS - \int_{\partial V_c^o} t_i^o \frac{Du_i}{Da} dS - \frac{D}{Da} \int_{V^o - V_c^o} W_s^o dV \quad (16)$$

이다. 식 (15)와 식 (16)으로부터

$$G = \int_{\partial V_c^o} t_i^o \frac{Du_i}{Da} dS + \frac{D}{Da} \left[ \int_{V^o - V_c^o} W_s^o dV - \int_{V^o} W_s^o dV \right] = \int_{\partial V_c^o} t_i^o \frac{Du_i}{Da} dS - \frac{D}{Da} \int_{V_c^o} W_s^o dV \quad (17)$$

을 얻을 수 있다. 한편 Crack Tip Field가 Self-Similar하다고 가정하면 Fig. 2에서 보는 바와 같이 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$u_i = u_i(X_j; a) = \bar{u}_i(\bar{X}_j, a) \quad (18)$$

$$X_2 = a + \bar{X}_2 \quad (19)$$

$$\frac{Du_i}{Da} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial a} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{X}_2} \frac{d\bar{X}_2}{da} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial a} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{X}_2} \quad (20)$$

식 (20)을 식 (17)에 대입하여 발산 정리를 이용하여 정리하면,

$$G = \int_{\partial V_c^o} t_i^o \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial a} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{X}_2} \right\} dS - \int_{V_c^o} \left\{ \frac{\partial \bar{W}_s^o}{\partial a} - \frac{\partial \bar{W}_s^o}{\partial \bar{X}_2} \right\} dV$$

$$= \int_{\partial V^o} \left[ \bar{W}_S^o N_2 + t_j^o \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial a} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_2} \right\} \right] dS - \int_{V^o} \frac{\partial \bar{W}_S^o}{\partial a} dV \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned} W_S^o &= W_S^o(X_j; a) \\ \bar{W}_S^o &= \bar{W}_S^o(\bar{X}_j; a) \end{aligned} \quad (22)$$

이다. 식 (21)에  $\varepsilon \rightarrow 0$ 를 취하면

$$G = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial V^o} \left[ \bar{W}_S^o N_2 - t_j^o \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{X}_2} \right] dS \quad (23)$$

이 된다. 균열면의 Traction Free라는 조건을 이용하여 식 (23)을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$G = \int_{\partial V^o} \left[ \bar{W}_S^o N_2 - t_j^o \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{X}_2} \right] dS - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{V^o - V^o_2} \left[ \frac{\partial \bar{W}_S^o}{\partial \bar{X}_2} - T_{1j} F_{j2,1} \right] dV \quad (24)$$

식 (24)에 고무의 구성 방정식 식 (5)를 대입하면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_S^o}{\partial \bar{X}_2} &= \frac{\partial W_S^o}{\partial F_{j1}} \left( \frac{\partial x_j}{\partial \bar{X}_{1,2}} \right) \\ &= (T_{1j} - P_o \frac{\partial \bar{X}_{1,1}}{\partial x_j}) \frac{\partial^2 x_j}{\partial \bar{X}_2 \partial \bar{X}_{1,2}} \\ &= T_{1j} F_{j1,2} - P_o \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial x_j}{\partial \bar{X}_2} \right) \\ &= T_{1j} F_{j1,2} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\left( \because \text{비 압축성 재료에 대해서는 } \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial x_j}{\partial \bar{X}_1} \right) = 0, \right.$$

( $I=1, 2 \text{ or } 3$ )이므로

$$G = \int_{\partial V^o} \left[ W_S^o N_2 - t_j^o \frac{\partial u_j}{\partial X_2} \right] dS \quad (26)$$

이다. 결국 식 (26)는 앞장에서 정의한 J-적분과 동일함을 알 수 있다. 따라서 일반적으로 대변형 탄성 재료에 대해서도 미소 변형에서와 마찬가지로 J-적분과 포텐셜 에너지 방출률 G가 등가임을 알 수 있다. 즉,

$$G = - \frac{\partial P}{\partial a} = J \quad (27)$$

### 2-6. 대변형에 대한 J-적분의 수치 계산

2차원 변위장에 대하여 J-적분은 다음과 같이 정의된다.

$$J = \int_{\Gamma} \left\{ W_S^o N_2 - t_j^o \frac{\partial u_j}{\partial X_2} \right\} d\Gamma \quad (28)$$

이를 유한요소법에서 사용하는 형상 함수로 근사시켜 적분 구간을 바꾸어서 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

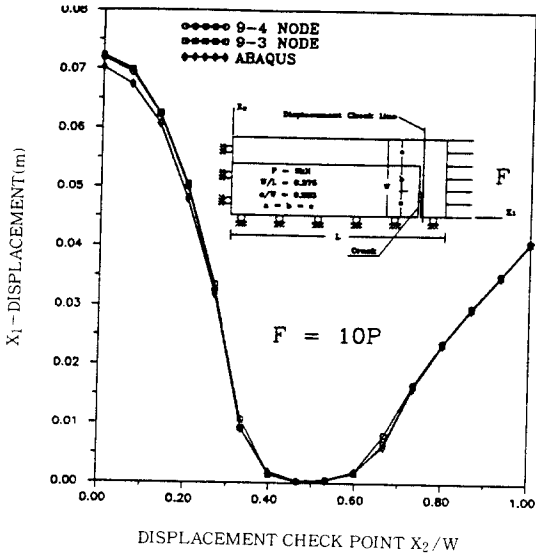
$$J^{(e)} = \sum_{q=1}^{NGAUSS} I(\xi_p, \eta_q) W_q \quad (29)$$

여기서  $W_q$ 는 적분점  $(\xi_p, \eta_q)$ 에서의 가중치 값이다. 한편 이와같은 선적분의 경우 적분 경로가 꺾어지는 부분에서 오차가 주로 발생하여 누적되는데 본 논문에서는 꺾어지는 적분 경로를 갖는 요소의 선적분 값에 Fator를 곱하는 방법을 이용하여 꺾어지는 적분 경로를 갖는 요소에서의 오차를 줄여 나간다[10].

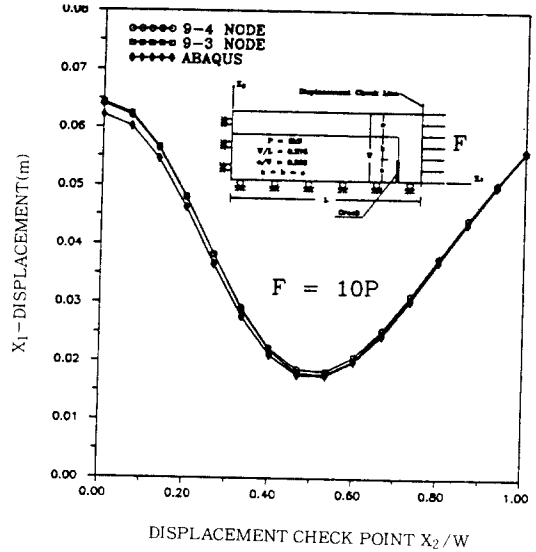
## 3. 계산 결과

### 3-1. 프로그램 검증 결과

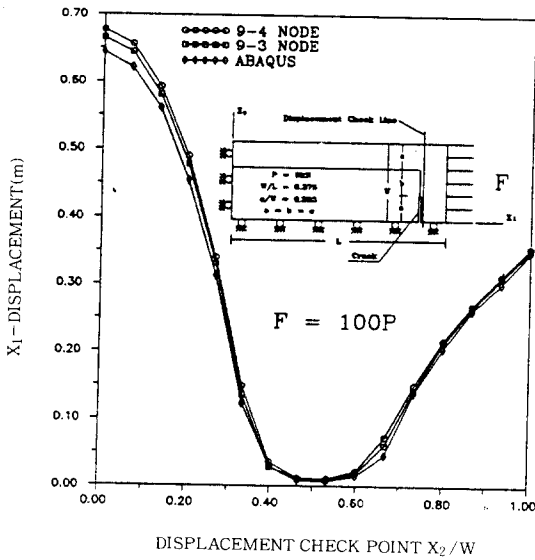
프로그램 검증을 위한 예제로 Fig. 1의 (b) 모델에서 균열 길이가  $a/W=0.333$ 인 경우를 택했다. 그 결과를 Fig. 3-7에 보인다. Fig. 3-4은 위치에 따른  $X_1$  변위를 검증한 결과이고 Fig. 5은 동일 모델을 요소 수를 증가시키면서 동일 위치에서  $X_1$  변위 수렴 추이를 검증한 것이며 Fig. 6, 7은 위치에 따른 Cauchy Stress  $\sigma_{11}$ 를 검증한 결과이다. 하중 조건은 순수 고무의 늘어난 정도가  $F=10P$ 일 경우는 2-3%,  $F=100P$ 일 경우는 20%-30% 정도가 되게끔 잡은 것이다. 그리고 9-4 NODE는 변위 요소가 9 절점 요소, 압력 요소가 4 절점 요소를 의미하는 것이고 9-3 NODE는 변위 요소가 9 절점 요소, 압력 요소가 3 절점요소를 의미하는 것으로 9-4 NODE, 9-3 NODE 각각은 본론에서



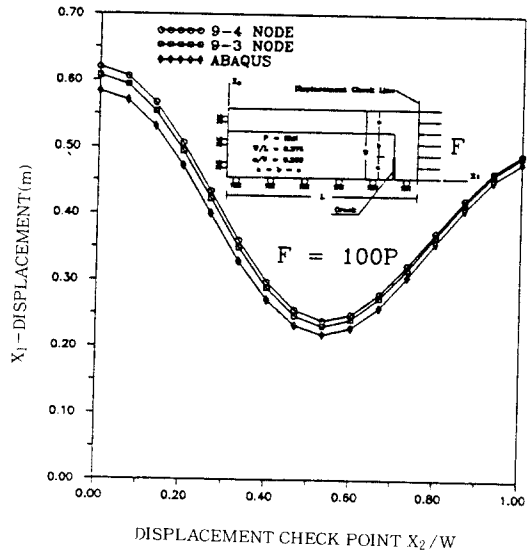
(a) F=10P



(a) F=10P



(b) F=100P



(b) F=100P

Fig. 3 Comparison of  $X_1$ -Displacement with  $X_2$ -Position at  $X_1=0.9L$

Fig. 4 Comparison of  $X_1$ -Displacement with  $X_2$ -Position at  $X_1=L$

언급한 수식화 절차에 의해서 프로그래밍한 것이다. ABAQUS는 상용 FEM 프로그램을 의미하는 것으로 ABAQUS는 변위 요소로는 8 절점요소를, 압력 요소로는 3 절점 요소를 사용하고 있다[11].

Fig. 3-4에서 보는 것처럼  $F=10P$ 인 경우 즉 작은 변형이 일어나는 경우 9-4 NODE, 9-3

NODE 2가지 프로그램은 서로 잘맞는 것을 알 수 있으나 ABAQUS 경우 균열이 있는 부근에서 다른 프로그램과는 변위가 잘못지 않음을 알 수 있다. 그리고  $F=100P$ 인 경우 즉 변형이 큰 경우 서로간의 차이가 극명하게 들어나는데 ABAQUS, 9-3 NODE, 9-4 NODE의 순으로 변위가 조금씩

크게 나타나고 9-3 NODE와 ABAQUS간의 차이는 최대 6% 정도의 오차를 보이고 있다.

Fig. 5는 요소 수 증가에 따른 일정 위치에서 변위 수렴 추이를 나타낸 것으로 하중 조건은  $F=100P$ 이다. 3개 프로그램 전부 일정 값으로 수렴하는 형태를 보이고 있다.

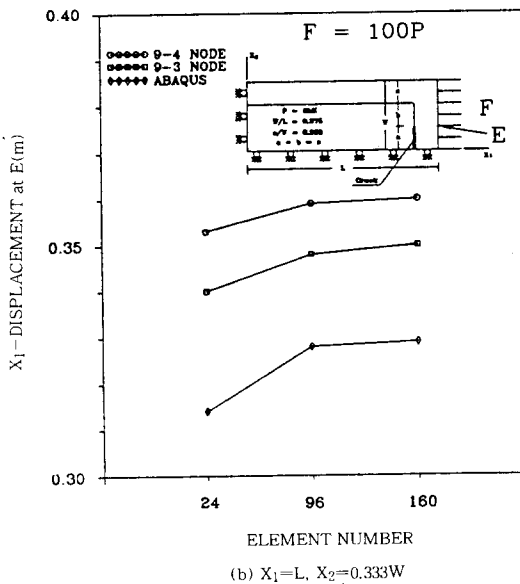
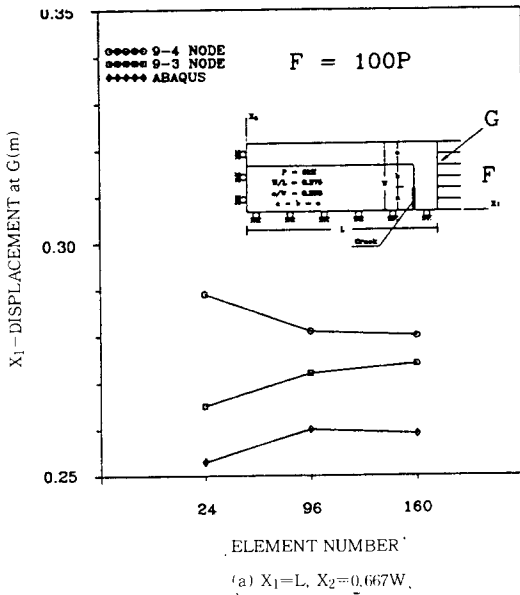


Fig. 5 Comparison of  $X_1$ -Displacement with The Number of Element

Fig. 6, 7은 위치에 따른 Cauchy Stress  $\sigma_{11}$ 를 검증한 결과로 하중 조건은  $F=100P$ 이다. Fig. 6에서 보면 3개의 프로그램 모두 비슷한 응력 분포를 보이고 있으며 가장 높은 응력점이 균열 선단 부근을 나타내고 그 다음 높은 응력점이 모델이 깎여진 부분을 나타낸다. 또한 9-4NODE, 9-3 NODE의 경우 균열 선단 직전 부근에서 응력이 진동하는 현상이 나타나고 ABAQUS의 경우 전 영역에 걸쳐 응력이 진동하는 현상이 나타난다. Fig. 7 또한 Fig. 6과 마찬가지로 3개의 프로그램 모두 비슷한 응력 분포를 나타내고 있지만 ABAQUS의 경우 응력이 심하게 진동하는 현상이 나타난다.

이상의 결과 볼 때 9-3 NODE, 9-4 NODE 프로그램 모두 이상이 없는 것으로 판단되며 단지 요소 종류에 따른 차이로 인해 변위와 응력이 조금씩 달라지는 것으로 판단된다. 따라서 이후 J-적분 계산 때는 프로그램 효율면에서 유리한 9-3 NODE 프로그램을 이용한다.

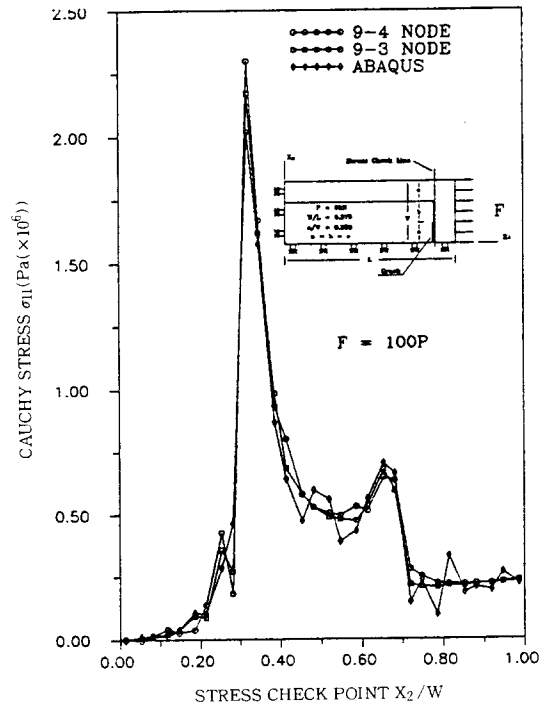


Fig. 6 Comparison of Cauchy Stress with  $X_2$ -Position at  $X_1=0.88L$



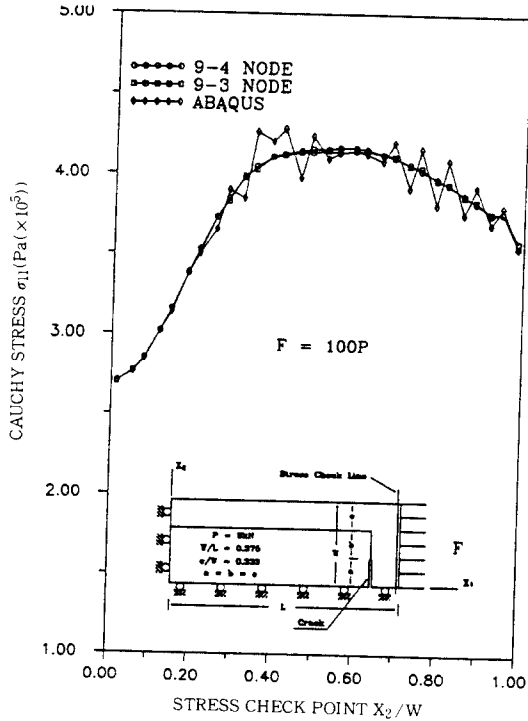


Fig. 7 Comparison of Cauchy Stress with  $X_2$ -Position at  $X_1=0.99L$

3-2. 에너지 방출률 계산 결과

J-적분 계산은 Fig. 1의 (b)에 보인 모델을 이용하여 계산하였으며 Fig. 8-10에 그 결과를 나타낸다. Fig. 8은 여러 하중에 대해 균열 길이가

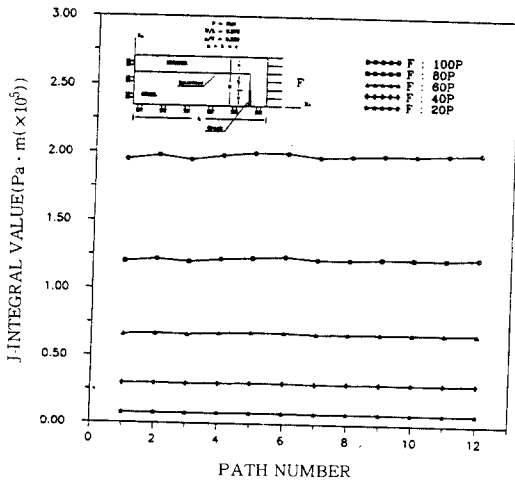


Fig. 8 Variation of The J-Integral with Several Integral Paths

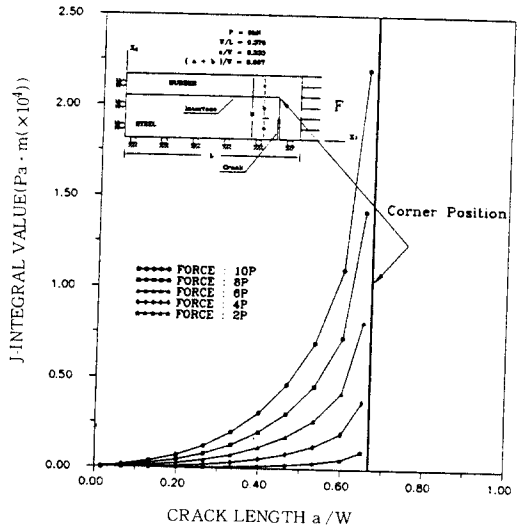


Fig. 9 Variation of The J-Integral with Crack Length(1)

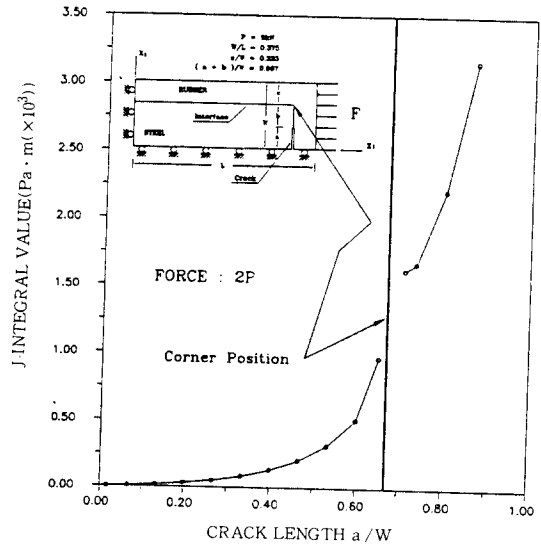


Fig. 10 Variation of The J-Integral with Crack Length(2)

$a/W=0.333$ 인 경우에 대해서 J-적분의 경로에 따른 변화를 보인 것이다. 적분 경로 번호는 균열 선단 부근에서 시작하여 차례로 번호를 붙인 것이다. 적분 경로에 대해서 대체로 1% 이내의 오차로 잘 보존되고 있음을 알 수 있다.

Fig. 9는 균열 길이에 따른 J-적분 값으로  $a/W=0.666$ 인 경우까지 즉 고무가 꺾어지는 부

참 고 문 헌

분까지 계산한 것이다. 균열 길이가 증가함에 따라  $J$ -적분 값이 증가하며 특히 꺾어지는 부분 근처에 접근할수록 급격히  $J$ -적분 값이 증가한다. 즉, 균열이 성장함에 따라 점점 더 급격한 기울기를 갖고 에너지 방출률이 증가하는 균열의 불안정한 성장 거동을 보임을 알 수 있다.

Fig. 10은 균열이 고무의 꺾어지는 부분을 지나  $X_2$ 축과 나란히 균열이 진전된다고 가정하고 즉 STEEL-RUBBER 복합재의 계면 균열에서 고무에서의 균열로 성장할 때 균열의 진전 방향에 변화가 없는 것으로 가정하고  $J$ -적분 값을 계산한 것이다. 고무에서의 균열에 대한  $J$ -적분 값 곡선의 기울기는 복합재의 계면 균열에 대한  $J$ -적분 값 곡선의 기울기와는 약간 다른 기울기를 가지고 균열이 진전됨에 따라  $J$ -적분 값이 증가됨을 알 수 있으나 고무가 꺾어지는 부분에서 계면 균열에서 고무에서의 균열로 성장할 때  $J$ -적분 값의 증가 경향에 급격한 변화가 없다.

4. 결 론

본 논문에서는 대변형을 받고 있는 STEEL-RUBBER 복합재의 계면 균열을 해석하기 위해 혼합 유한요소법을 이용하였다. 사용한 두개의 요소들 즉 9-3 NODE 요소와 9-4 NODE 요소 모두 ABAQUS의 요소와는 달리 심각한 응력 진동이 없이 안정적인 해를 준다.

주어진 STEEL-RUBBER의 계면 균열을 균열이 성장함에 따라 에너지 방출률이 급격한 기울기를 갖고 증가하는 불안정한 성장 거동을 보임을 알 수 있다. 또한 균열이 성장해서 계면이 끝나는 점을 지날 때 에너지 방출률 거동에 급격한 변화는 없다.

1. J. R. Rice, "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", ASME Trans, J. Appl. Mech., Vol. 35, 1968, pp. 379-386
2. J. H. Park & Y. Y. Earmme, "Application of Conservation Integrals to Interfacial Crack Problems", Mech. Mat'l. Vol. 5, 1986, pp. 261-276
3. J. K. Knowles & E. Sternberg, "On a Class of Conservation Lasws in Linearized and Finite Elastostatics", Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vo. 44, 1972, pp.187-211
4. F. H. K. Chen & R. T. Shield, "Conservation Laws in Elasticity of the J-Integral Type", J. Appl. Math. Phys., Vol. 28, 1977, pp.1-22
5. R. T. Shield, "Conservation Laws in Finite Elasticity", Finite Elasticity-AMD, Vol. 27, 1977
6. H. Matthies & G. Strang, "The Solution of Nonlinear Finite Element Equations", International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 14, 1979, pp.1613-1626
7. J. Tinsley Oden & Graham F. Carey, *Finite Elements: Special Problems in Solid Mechanics*, Vol. V, Prentice-Hall, Inc., 1984
8. Thomas J. R. Hughes, *The Finite Element Mechod: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall International, Inc., 1987
9. David W. Nicholson & Norman W. Nelson, "Finite Element Analysis in Design with Rubber", Rubber Chemistry and Technology, Vol. 63, pp.368-406
10. D. R. J. Owen & A. J. Fawkes, *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*, Pineridge Press Ltd., 1983
11. A Finite Element Code developed by Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc.

(접수일자 : 1994. 1. 18)