

개선된 남한지역의 GRS80 중력지오이드 모델 (KGM93) Improved GRS80 Gravimetric Geoid in the South Korea Region (KGM93)

조규전* · 이영진** · 조봉환***

Cho, Kyu-Jon · Lee, Young-Jin · Cho, Bong-Whan

要 旨

Stokes 적분에 의하여 지오이드고를 산정하는 문제에서 경계영역의 외곽에 대한 영향을 무시하게 되면 절단오차가 발생한다. 이 논문에서는 남한지역에 대하여 개선된 GRS80 중력지오이드모델 KGM93(Korean Gravimetric geoid Model 1993)을 제시하였다. 이 모델은 GEM-T2 등의 위성중력과 지상중력을 조합시켜 산정하였으며 경계영역을 $\psi_0=30^\circ$ 로 하고 프리에어 지오이드에 절단오차를 보정하였다. 연구결과에서는 제시된 KGM93-C의 정확도가 약 1 미터 수준에 있음을 보여준다.

ABSTRACT

Neglecting distant zones in the computation of geoidal heights using Stokes' formula give rise to some truncation errors. The GRS80 Korean Gravimetric geoid Model 1993(KGM93) of the South Korea region was implemented, in this paper, using a combination of satellite-derived GEM-T2 gravity and terrestrial gravity data. A spherical cap size of 30 degree is used on the integration and the truncation error is compensated to the free-air geoid. The results of this study show that the accuracy of the KGM93-C has one meter level.

1. 서 론

최근 국내의 지오이드 모델에 대한 연구에서는 천문수직선편차(astro-geodetic deflection of vertical)로부터 상대적인 천문지오이드(relative astro-geodetic geoid)를 결정한 바 있으며,¹⁾ 조규전 · 이영진 등(1993)에서는 남한지역에 대하여 GEM9 지구중력장모델과 지상중력을 조합시켜 경계영역 30° 이내의 범위를 Stokes 적분에 의해 GRS80프리에어 중력지오이드(free-air gravimetric geoid)를 산정한 바 있다.³⁾

그러나 이 중력지오이드는 수 m 정확도인 1×10^{-6} 지오이드로서는 만족되고 있으나 절단오차(truncation error)를 고려치 않은 관계로 2~3m의 정오차를 포함하고 있다. 따라서 본 논문에서는 이와 같은 절단 오차를 고려하여 GRS80 중력지오이드를 개량하는데 주요 목적이 있다.

연구의 결과로는, 전년도의 방법으로부터 GEM9 모델과 지상중력의 조합에 의해 개선된 KGM93-A (Korean Geoid Model- 1993A)를 제시하고 있으며, 최신의 GEM-T2 지구중력장모델과 지상중력을 조합하여 KGM93-C(Korean Geoid Model-1993C)의 GRS 80 지오이드를 새로 산정하였다.

2. Stokes적분과 절단오차

지오이드의 외부에 있는 물질의 질량을 중력보정에 의해 제거시킬 수 있다면 이상중력포텐셜 T는 구면 조화함수의 급수로 나타낼 수 있다. 이때 지오이드 내부의 질량과 정규타원체 내부의 질량이 서로 같고, 타원체의 중심과 지구질량의 중심이 같은 것으로 가정한다. 이러한 경우에 있어서 T는 다음과 같이 표현된다.^{6,16,17)}

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda) \quad (1)$$

*정회원, 경기대학교 공대 토목공학과 교수
**정회원, 경북산업대 공대 측지공학과 교수
***정회원, 국방과학연구소 선임연구원

이를 r에 대하여 미분하고 물리측지학의 기본방정식에 대입하면 중력이상에 대한 다음의 구면조화함수식이 된다.

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta, \lambda) \quad (2)$$

다시 구면근사에 대하여 지오이드상에서 r=R이므로 식 (1)과 식 (2)는 다음이 된다.

$$T(\theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(\mu, \lambda) \quad (3)$$

$$\Delta g(\theta, \lambda) = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) T_n(\theta, \lambda) \quad (4)$$

한편, 식 (4)의 중력이상은 Laplace 구면함수에 의하여 다음의 적분식으로 나타낼 수 있다.

$$\Delta g_n = \frac{2n+1}{4\pi} \iint \Delta g P_n(\cos\psi) d\sigma \quad (5)$$

여기서, $P_n(\cos\psi)$ 는 Legendre polynomials(zonal harmonics)이며 $d\sigma$ 는 적분영역의 면적이며 ψ 는 다음으로부터 구한다.

$$\cos\psi = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (6)$$

결과적으로 다시 정리하면,

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) \right] \Delta g d\sigma \quad (7)$$

이 식에 Bruns의 방정식을 적용하면 다음의 Stokes 적분식(Stokes' integral formula)가 된다.

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (8)$$

여기서, ψ 는 계산점을 중심으로하는 호장거리, R은 지구의 평균반경, γ 는 지표면상의 평균중력, Δg 는 중력이상을 나타내며 $d\sigma$ 는 적분영역을 의미한다. 지오이드고 N은 계산점(ϕ, λ)에서 구해지며 Stokes 함수 $S(\psi)$ 는 다음과 같다.

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi) \quad (9)$$

또는,

$$S(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 6\sin \frac{\psi}{2} - \cos\psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (10)$$

이 Stokes 적분은 전지구 구면에 분포되고 있는 중력이상에 대하여 적분을 실시하고 지오이드고를 계산하는데 이용된다. 이때 중력이상에 대응되는 중량(Weight)은 계산점 부근에서는 크고 먼 거리일 수록 작아지는 Stokes 함수로서 부여하게 된다.

그러나 중력이상의 분포는 대륙과 해상측정이 수반되므로 현재까지도 한계를 안고 있기 때문에 경계영역 ψ_0 (cap이라 함)의 범위에 대해서만 적분을 실시하고 경계영역 외부의 영역에 따른 영향을 무시하기 때문에 정오차적인 요소를 포함하게 되는데 이를 절단오차(truncation error)라고 부른다.^{7,8)}

Stokes 적분은 호장거리 ψ_0 인 경계영역내에 한정되는 적분이므로 그 외부영역에 대응되는 적분은 다음과 같은 지오이드고의 절단오차로 주어진다.

$$\delta N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_{\psi_0}^{\pi} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (11)$$

식 (10)에 대응되는 Stokes 함수에 대해서는 다음의 절단된 Stokes 함수(truncated stokes function)로 정의된다.

$$\bar{S}(\psi) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq \psi < \psi_0 \\ S(\psi) & : \psi_0 \leq \psi \leq \pi \end{cases} \quad (12)$$

식 (12)를 구함수로 전개하여

$$S(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n P_n(\cos\psi) \quad (13)$$

로 하고 구함수의 직교성을 갖는 성질을 이용하면,

$$Q_n = \int_0^{\psi_0} \bar{S}(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi \quad (14)$$

가 된다. 그러므로 식 (13)을 식 (11)에 대입하고 수치적분의 개념으로 바꾸면 다음과 같은 지오이드고의 절단오차 계산식이 된다.^{16,19)}

$$\delta N = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{n'} Q_n \Delta g_n \quad (15)$$

이때의 Q_n 을 de Witte는 “Molodenskii 계수(Molodenskii coefficient)”라고 호칭하였으며 Mather에 의해 “Molodenskii 절단함수(Molodenskii truncation function)”로 명명되었다.⁷⁾

Δg_n 은 Δg 의 n 차 구면조화함수로서 중력포텐셜의 전개함수로부터 구해진다. 따라서 인공위성에 의한 지구중력장모델로부터 계산할 수 있으므로,

$$\Delta g_n = g_0 \sum_{m=0}^n (n-1)(C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \quad (16)$$

이고, Q_n 을 안다고 한다면 식 (15)로부터 절단오차 ΔN 이 계산될 수 있다.

3. Molodenskii계수 Q_n

Q_n 의 계산은 몇몇 학자에 의해 유도되었다. Molodenskii등(1962)에서는 $\sin(\psi_0/2)=t$, $\sin(\psi/2)=z$ 로 하여 식 (14)에 따라 다음 성질을 이용하여 8차까지 계산하였다.⁸⁾

$$Q_n = -4 \int_1^t S(1-2z^2) P_n(1-2z^2) z dz \quad (17)$$

여기서 $(1-2z^2)$ 이 $\cos\psi$ 를 의미하므로 Stokes 함수에 의해 ψ_0 에 대응되는 Q_n 값들을 구할 수 있다.

de Witte(1967)은 식 (14)에 대하여 식 (17)로부터 유도된 다음의 미분방정식,

$$\frac{dQ_n}{dt} = -4S(1-2t^2) P_n(1-2t^2)t \quad (18)$$

을 이용하였는데 초기조건으로서 $\psi_0=0(t=1)$ 에서 $Q_n=0$ 이하는 조건을 사용하여 $n=25$ 차까지 수치계산하였다.⁷⁾

또한 Hagiwara(1972, 1976), Ganeko(1977)에서는 다음의 점화식을 이용하였다.⁷⁾

$$Q_n = -\frac{1}{(n-1)(n+2)} \left[nS(\psi) \{P_{n-1}(\cos\psi) P_n(\cos\psi) \cos\psi\} + \frac{dS(\psi)}{d\psi} P_n(\cos\psi) \sin\psi + 2K_n(\psi) + 2I_n(\psi) + 9J_n(\psi) \right] \quad (19)$$

표 1. Paul의 $Q_n(\psi_0=30^\circ)$ ¹⁴⁾

n	Q_n	n	Q_n
0	-1.0483	11	0.0304
1	-1.0102	12	0.0234
2	1.0620	13	0.0116
3	0.1606	14	-0.0008
4	-0.0575	15	-0.0104
5	-0.1032	16	-0.0153
6	-0.0868	17	-0.0152
7	-0.0501	18	-0.0111
8	-0.0133	19	-0.0046
9	0.0140	20	0.0021
10	0.0284	21	(이하생략)

이 외에도 Paul(1973)은 Legendre 함수를 이용하여 $n=50$ 차까지의 안정된 해를 구하였는데 $\cos\psi=z$, $t=\cos\psi_0$ 로 치환하여 식 (14)로부터 다음의 식을 제시하였는데 그에 의해 계산된 경계영역 $\psi_0=30^\circ$ 의 경우는 표 1과 같다.¹⁴⁾

$$Q_n = \frac{n(n+1)}{(2n+1)(n-1)(n+2)} \left[P_n(t) \left\{ \frac{2(2n+1)}{n(n+1)} (U_1^*(t) - U_3^*(t)) - (n+2)(U_n^*(t) - U_{n+2}^*(t)) - (n-1)(V_{n+1}^*(t) - V_{n-1}(t)) \right\} + \{P_{n+1}(t) - P_{n-1}(t)\} \{3U_2^*(t) - (n+2)U_{n+1}^*(t) + (n-1)V_n^*(t)\} \right] - \frac{2n^2 + 2n + 1}{(n+1)(2n+1)^2} P_n(t) \{P_{n+1}(t) - P_{n-1}(t)\} + \frac{2n+1}{n+1} R_{n,n}(t) \quad (20)$$

4. 지오이드고의 산정

앞서의 Stokes적분은 수치적분으로 대체시켜 계산할 수 있으며 격자방식에 따라 구역별로 구분하여 설정된 범의에 따라 처리할 수 있으므로, 적분영역별로 그 영향을 분리하고 조합한다면 계산점 P에서 대응되는 지오이드고는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_p = N_{im} + N_i + N_o + \delta N \quad (21)$$

$$N_{im} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \Delta g(x, y) S(\psi) dx dy \quad (22)$$

$$N_i = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i=0}^L \Delta g_i S(\psi_i) \cdot d\sigma_i \quad (23)$$

$$N_o = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i=0}^M \Delta g_i S(\psi_i) \cdot d\sigma_i \quad (24)$$

여기서 N_{im} 은 20'×20'의 인접범위(innermost zone)의 영향을 나타내며 10' 격자 4개의 영역에 포함된 PGA(point gravity anomaly) 화일을 이용하고 계산된 부근의 위치를 평면에 투영변환시켜 해석적으로 계산한다. 또한, N_i 는 2°×2°의 중간범위(inner zone)의 영향을 나타내며 10' 격자의 MGA10(mean gravity anomaly 10'×10') 화일을 이용하고, N_o 는 외곽범위(outer zone)의 영향을 나타내며 1° 격자인 MGA60(mean gravity anomaly 60'×60') 화일을 이용한다. a 는 격자크기, 면적은 $d\sigma_i = \cos\phi_i \cdot a^2$, ψ_i 는 계산점과 격자중심점간의 지심각거리를 나타낸다.

δN 은 경계영역 외부에 있는 중력이상에 대한 영향을 나타내는 것으로서 절단오차에 해당되는 지오이드고이며 식 (4)를 고려하면 다음과 같다.^{18,19)}

$$\delta N = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^n Q_n \Delta g_n \quad (25)$$

본 연구에서는 지오이드고를 산정함에 있어 지표면의 중력과 순수한 위성모델인 GEM9(Goddard Earth Model-9) 및 GEM-T2모델로부터 계산된 중력 이상을 이용하였다(표 2 참조).

전산프로그램은 조규전·이영진 등(1993)에서 개발된 "GEOINT"를 개선보완하여 활용하였으며 그림 1에서 GRS80 지오이드의 산정은 "EXTERIOR gn" 부분이 추가된 것이며 이와는 별도로 기준계의 변환이 추가되어 있다.

Stokes 방정식의 경계조건을 만족시키기 위해서는 전지구의 표면에 대한 중력자료가 있어야 한다. 그러나 이는 현실적으로 대단히 어려운 문제이므로 지

상중력이 없는 지역은 위성자료로 대체될 수 밖에 없다.

따라서 본 연구에서는 순수한 위성모델인 GEM9 및 GEM-T2 모델로부터 MGA60 자료화일을 구성하였으며 지상중력으로부터 PGA 자료화일과 MGA10 자료화일을 구축하였다. 1°×1° 격자점의 수치는 경도 100°, 위도 70° 영역에 대하여 구했으며, 1°N~71°N,

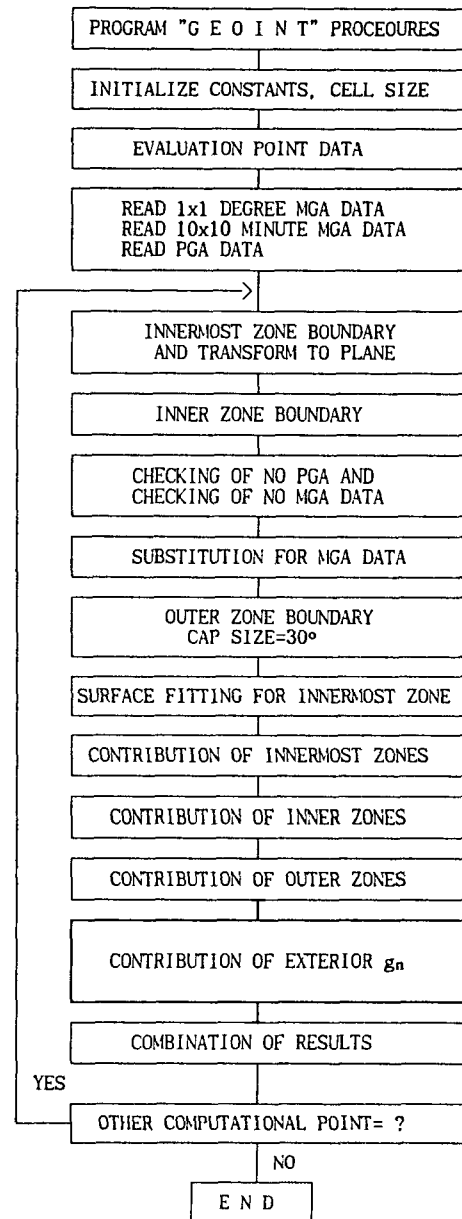


그림 1. GEOINT의 흐름도

표 2. 최근의 지구중력장모델(순수위성모델)⁹⁻¹¹⁾

Model	Degree	Origin	Date
GEM 9	20	Lerch et al.	1979
GEM-L2	20	Lerch et al.	1984
GEM-T1	36	Marsh et al.	1988
GEM-T2	36(50)	Marsh et al.	1990

78°E~178°E의 범위에 상당한다.

5. 결과 및 고찰

5.1 절단오차

본 연구에서 사용된 위성모델은 순수한 위성모델인 GEM9과 GEM-T2이며 이들 두 모델은 GRS80 타원체¹²⁾로의 변환을 실시하였으며 이 방법은 전년도의 연구에서와 동일하다. 그러나 GEM-T2는 최신모델로서 GEM9보다 2배 이상의 정확도를 갖는 것으로 알려지고 있으며 GRS80과 같은 것으로 취급할 수 있다.

GEM-T2는 TOPEX/Poseidon 위성에 대하여 radial position의 정확도를 10 cm까지 결정하기 위하여 제안되었으며 장파장 주기에서 1.3 m 이내($n'=20$ 에서 0.8 m 이내)의 매우 우수한 지구모델이다.¹¹⁾

GEM9과 지표면중력의 조합으로부터 구한 절단오차의 크기는 그림 2에 보여주고 있으며 GEM-T2와 지표면 중력의 조합으로부터 구한 절단오차의 크기는 그림 3에 보여주고 있다.

두 그림은 모두 전년도의 연구에서 제외되었던 절단오차가 약 2~4 m의 분포를 보이는 등 정오차적인 크기의 변화를 보여준다. 또한 GEM9과 GEM-T2에 의한 절단오차는 $\psi_0=30^\circ$ 의 영역외부의 영향으로서 그 크기가 거의 같게 나타나고 있음을 보여주고 있다.

따라서 Stokes 해법에서 절단오차가 무시되어서는 아니되며 m 단위의 정확도를 요구하는 지오이드모델의 산정시 세심하게 고려되어야 함을 알 수 있다.

5.2 GRS80 지오이드(KGM93-A,C)

그림 4에서는 GEM9과 지표면중력을 조합시키고 절단오차를 고려한 GRS80지오이드모델을 보여주며 그림 5는 GEM-T2에 대하여 동일하게 처리된 결과를 보여준다.

GEM9에 의한 경우에는 22 m~30 m의 지오이드고를 보여주고 있는데 이는 전년도의 연구에서 검토된 정오차 2~3 m가 보정되어진 것임을 알 수 있다. 그러나 GEM-T2에 의한 경우에는 지오이드고 22 m~29 m로서 전반적으로 약간씩 낮은 수치를 보여주고 있다.

또한 동경대 해양연구소의 모델(1990)⁹⁾과 그 크기와 형상에서 대체로 일치됨을 알 수 있으나 이 모델이 OSU86F¹⁵⁾를 근간으로(reference field)하여 개발된

것이므로 본 연구에서의 GEM-T2에 의한 GRS80 모델보다 전반적으로 약 1 m 정도씩 높게 나타나고 있다.

이들을 고려해 볼 때 본 연구에서 얻어진 KGM93-C 모델의 정확도는 약 1 m 수준에 있음을 알 수 있으며, 세부적으로는 중부 서해안지역에서 동경대의 모델과 지오이드고 등고선에서 약간의 차이가 있는 것은 국부적으로 중력이상의 자료에 한계에서 비롯된 것이므로 이 지역에 대한 중력측정이 더 보완되어야 할 것으로 생각된다.

6. 결론

본 연구에서는 남한지역에 대하여 개선된 GRS80 중력지오이드를 산정하였으며, GEM9 지구중력장모델과 지상중력을 조합시켜 구한 KGM93-A, 그리고 GEM-T2와 지상중력을 조합시켜 구한 KGM93-C가 제시되었다. 이들은 모두 경계영역 $\psi_0=30^\circ$ 에서 산정되었으며 절단오차가 보정되었다.

여기서 우리나라 남한지역에서는 절단오차의 크기가 약 2~4 m에 상당하므로 m 수준의 정확도가 필요한 경우에는 무시할 수 없는 양이며 전년도의 10^{-6} 의 프리에어 지오이드에 보정되어야 함을 보여 주고 있다.

또한 본 연구에서 제시된 KGM93-C의 GRS80 중력지오이드는 다른 연구와의 비교에서 그 정확도가 1 m 수준에 있으므로 국내의 지오이드모델로서 적극 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

이 연구는 국방과학연구소 장기기초연구사업(과제 번호 ADD-90-004)의 연구비 지원과 경기대학교(학술진흥원)의 연구비 지원에 의해 수행되었기에 깊은 감사를 드립니다.

参考文献

1. 조규전, 이영진. 우리나라 천문측지지오이드에 관한 연구. 한국측지학회지, 제9권 제2호, pp. 1-8, 1991.
2. 조규전, 이영진. 남한지역의 프리에어 지오이드 산정. 대한토목학회 학술발표회집, pp. 360-363, 1992.
3. 조규전, 이영진, 조봉환. GEM9 위성자료의 조합에

- 의한 남한지역의 GRS80 중력지오이드. 대한토목학회 논문집, 제13권 제1호, pp. 141-149, 1993.
4. 최광선. OSU89B에 의한 한반도 일원의 지오이드에 관한 연구. 한국측지학회지, 제9권 제2호, pp. 67-72, 1991.
 5. Ganeko, Y. A 10'×10' Detailed Gravimetric Geoid Around Japan. *Marine Geodesy*, 7(1-4), pp. 291-314, 1983.
 6. Gilliland, J.R. Comparisons of Gravimetric Geoid Result Using Mean Gravity Anomalies and Potential Coefficients in the South Australian Region. *Survey Review*, 28(215), pp. 41-46, 1985.
 7. Hagiwara, Y. Truncation Formulas for the Stokes and Vening-Meinesz Integrations. *測地學會誌(日本)*, 18(2), pp. 62-71, 1972.
 8. Heiskanen, W.A. and H. Moritz. *Physical Geodesy*. Freeman, 1967.
 9. Lerch, F.J., S.M. Klosko, R.E. Laubscher, C.A. Wagner. Gravity Model Improvement Using Geos3 (GEM9 and 10). *J. of Geophysical Research*, 84(88), pp. 3897-3916, 1979.
 10. Marsh, J.G. et al. A Gravitational Model for the Earth from satellite Tracking Data: GEM-T1. *J. of Geophysical Research*, 93(86), pp. 6169-6215, 1988.
 11. Marsh, J.G. et al. The GEM-T2 Gravitational Model. *J. of Geophysical Research*, 95(B13), pp. 22,043-22,071, 1990.
 12. Moritz, H. Geodetic Reference System 1980. *Bulletin Geodesique*, 62(3), pp. 348-358, 1988.
 13. Obenson, G. Geoidal Heights for Africa from GEM 9 Potential Coefficients and Degree Gravity Anomalies. *Survey Review*, 28(218), pp. 207-213, 1985.
 14. Paul, M.K. A Method of Evaluating the Truncation Error Coefficients of Geoidal Height. *Bulletin Geodesique*, 106(110), pp. 413-425, 1973.
 15. Rapp, R.H. and N.K. Pavlis. OSU89A/B Potential Coefficient Models, in "Determination of the Geoid; present and future (ed. Rapp and Sanso)", international symposium held at Milano, Italy, Springer-Verlag, 1990.
 16. Torge, W. *Geodesy*. Walter de Gruyter, 1991.
 17. Vanicek, P., A. Kleusberg, R.G. Chang, H. Fashir, N. Christou, M. Hofman, T. Kling, T. Arsenault. The Canadian Geoid. Technical Report No. 129, U. of New Brunswick, 1987.
 18. Vanicek, P., C. Zhang, P. Ong. Computation of a File of Geoidal Heights Using Molodensky's Truncation Method. Technical Report No. 147, U. of New Brunswick, 1990.
 19. 萩原辛男. 地球重力論. 共立出版, 1978.

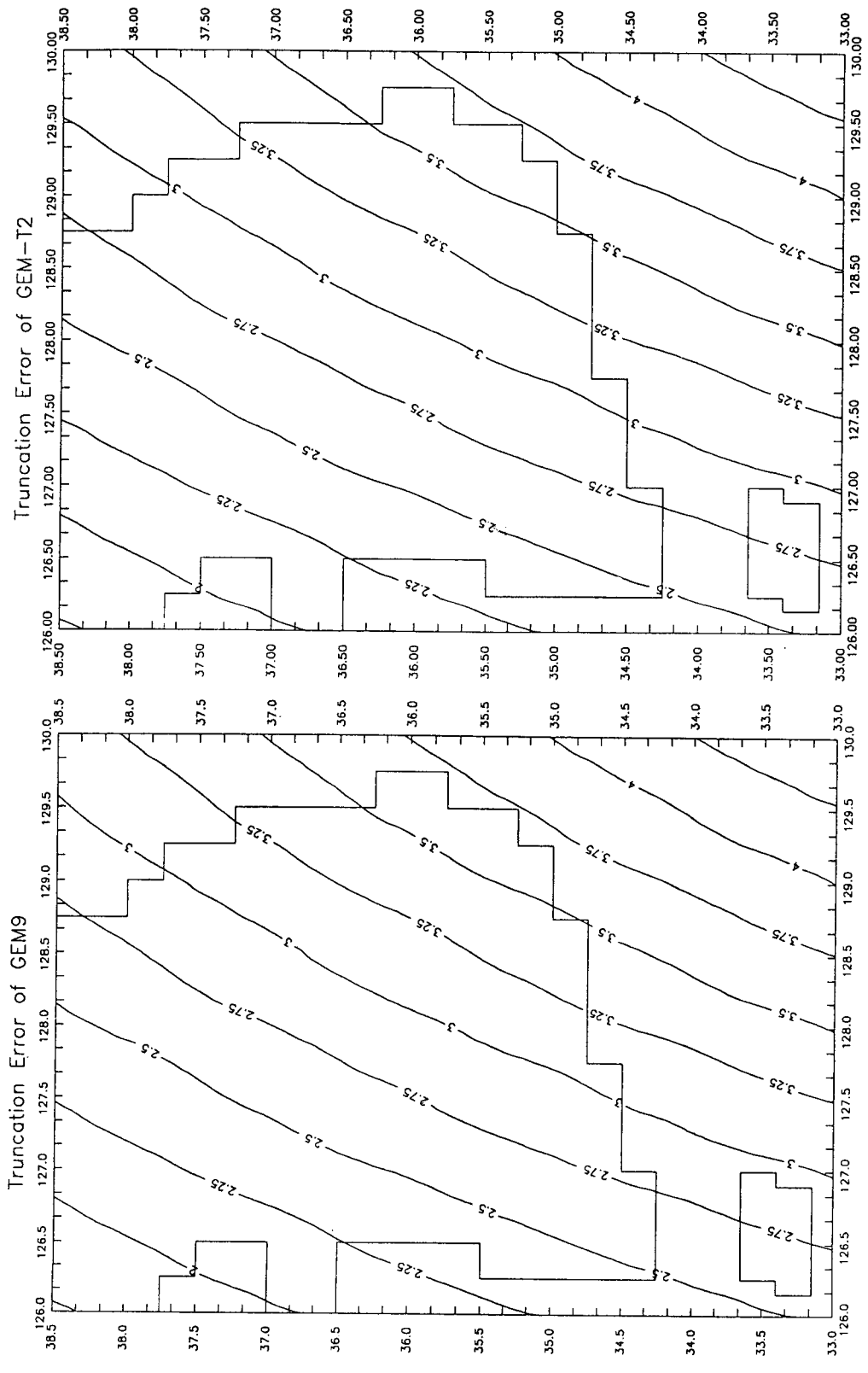


그림 2. 지오이드고의 절단오차(GEM9)의 경우

그림 3. 지오이드고의 절단오차(GEM-T2)의 경우

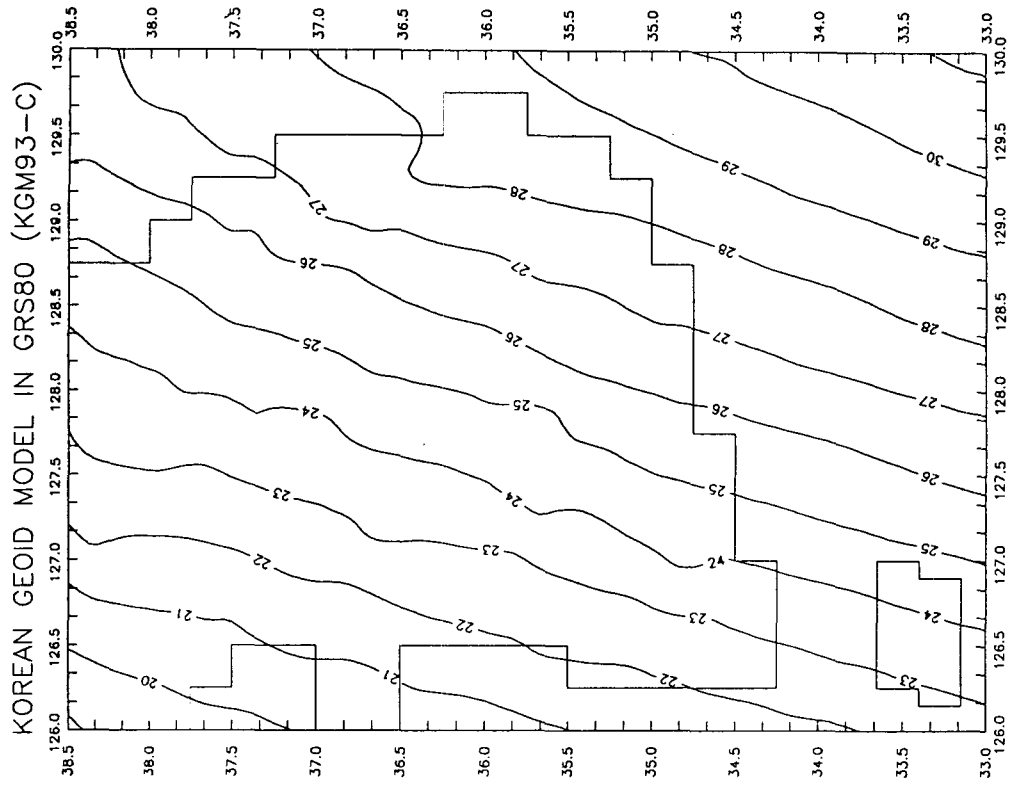


그림 5. GRS80지오이드 KGM93-C(GEM-T2+지상중력)

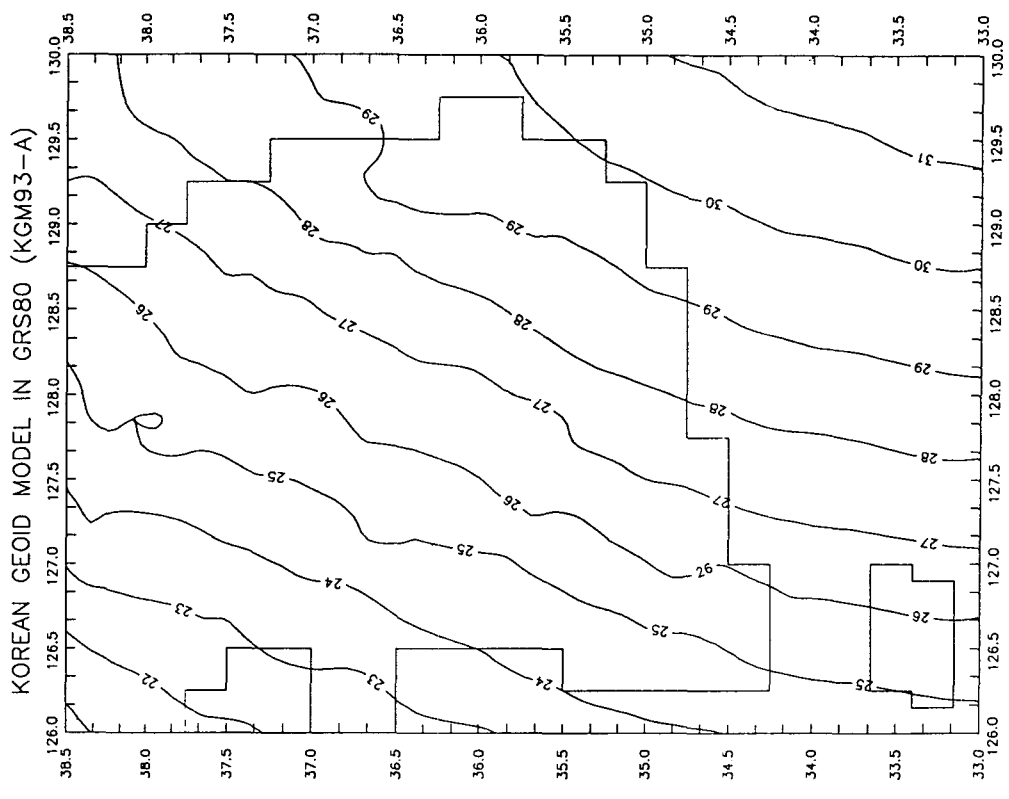


그림 4. GRS80지오이드 KGM93-A(GEM9+지상중력)