大韓土木學會論文集
第14卷 第2號 · 1994年 3月
pp. 291~298

構 造 工 學

뒴 剪斷變形을 고려한 非對稱 薄壁斷面보의 C^0 有限要素

A C^0 Finite Element of Thin-Walled Open Beams Including Warping Shear Deformation

백성용* · 조현영**
Back, Sung Yong · Cho, Hyun Yung

Abstract

This paper presents a new stiffness matrix for the analysis of arbitrary thin-walled open beams in warp-restrained torsion. The element accounts for both flexural and warping torsional effects. To eliminate the *ad hoc* introduction of St. Venant stiffness in this C^0 element, the virtual work equation based on an orthogonal Cartesian coordinate system is used. The effectiveness of the derived block stiffness is addressed. The transformation matrix between two different reference systems is also shown. Numerical examples using the proposed matrix are compared with the classical solutions or other previous results in the literature.

요 지

本 論文에서는 拘束된 뒴 비틂상태에 있는 非對稱 斷面形狀에 制限이 없는 薄壁 斷面보의 有限要素 解析을 위한 새로운 彈性强度 매트릭스를 提案한다. 誘導된 要素는 휨과 뒴 비틂에 의한 影響을 考慮한다. 순수 비틂 剛性의 임의적인 添加를 제거하기 위하여 本 研究의 C^0 有限要素에서는 직각座標系에 근거한 假想일을 사용하였다. 誘導된 블럭 매트릭스의 效率性에 대하여 比較分析한다. 또한 두개의 다른 기준시스템의 變換 매트릭스를 紹介한다. 提示한 블럭 매트릭스를 檢證하기 위하여, 數値例題들을 통하여 本 研究에 대한 結果와 嚴密解 또는 다른 연구자의 結果들과 比較檢討한다.

1. 序 論

薄壁보는 구조적으로 매우 이상적이어서 土木, 建築, 機械, 造船, 航空 등 構造工學 관련분야에서 단독구조 또는 단위구조로 많이 사용되고 있다. 1930년대에 Vlasov[1]에 의해 薄壁보의 휨과 비틂에 대한 理論이 제안된 이후, 薄壁보의 고전적인 假定[1,2]에 따라 有限要素法을 이용한 論文들이 많이 발표되었다.[3-6] 그러나, 이러한 고전적 薄壁보 이론과 實驗 결과치의 차이로 剪斷變形을 考慮한 모델로서, "hybrid/mixed model"[7] 또는 "displacement model",[8] 이 최근에 많이 발표되고 있다.

뒴 剪斷變形을 고려한 有限要素法[7,8]은 變位와 應力을 쉽게 정의하기 위하여 곡선座標系를 사용하였다. 그러나, 이러한 解析法은 효율적인 뒴 變形을 考慮할 수는 있으나 순수 비틂강성(St. Venant stiff-

* 정회원 · 仁濟大學校 工科大學 土木工學科 專講, 工博
** 정회원 · 釜山大學校 工科大學 土木工學科 敎授, 工博

ness)의 인위적인 添加를 필요로 한다.

本 硏究에서는 직각座標系에 근거한 假想일의 原理를 利用하여 斷面形狀에 制限이 없고 剪斷變形을 考慮할 수 있는 薄壁보에 대한 C^0 有限要素을 제시한다. Timoshenko 보이론과 수정된 Vlasov 薄壁보 理論을 결합하여 軸方向 變位는 斷面의 投影된 斷面의 面變形과 面外(out-of-plane) 뒴 變形의 合으로 나타내어진다. 提案된 요소는 휨과 bimoment에 의한 剪斷 및 뒴 變形을 考慮한다. 직각座票系의 使用으로 St. Venant 비틂강성을 變位場으로부터 직접 구할 수 있다. 誘導된 彈性剛度 매트릭스는 Chen 등[8]의 매트릭스와 比較 分析한다. 本 硏究에 대한 結果와 嚴密解를 比較, 檢討하여 이 硏究에서 제시한 理論의 正堂性을 立證한다.

2. 基本理論

本 硏究에서 提案된 解析모델은 다음과 같은 假定에 基礎하였다.

1) 部材는 길이方向으로 일정하며 직선이다.

2) 斷面의 形狀變化는 없으나 길이方向으로 뒴(warping) 變形을 한다.

3) 變形은 斷面치수에 비하여 아주 적다.

4) 材料는 균일체이며 彈性範圍內에 있다.

뒴 剪斷變形을 考慮하려면 "박판 斷面의 중앙면에 따라 생기는 剪斷變形 影響은 적고 그에 따른 變形은 無視할 수 있다"라는 Vlasov의 假定은 수정되어야 한다.

Fig. 1은 薄壁보의 전형적 斷面을 나타낸 것이다. 直交座票系는 y, z軸은 變形前 斷面의 圖心을 통하는 主軸과 일치하도록 하며, x軸은 요소의 길이 方向軸이다. 휨과 "warping torsion"에 의한 剪斷變形을 고려한 薄壁보의 變位場은 다음과 같이 나타낼 수 있다.[9]

$$\begin{aligned} u_y &= u_{yS} - (z - z_S)\theta_x \\ u_z &= u_{zS} + (y - y_S)\theta_x \\ u_x &= u_{xC} - y\theta_z + z\theta_y - \omega\phi_x \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 u_{xC}, u_{yS}, u_{zS}는 x, y, z軸 方向으로의 剛體移動成分을 나타내며 θ_x는 剪斷中心軸에 대한 剛體回轉成分, θ_y, θ_z는 y, z軸에 대한 剛體回轉成分, ϕ_x는 뒴(warping) 變形을 나타낸다. y_S, z_S는 각각 圖心

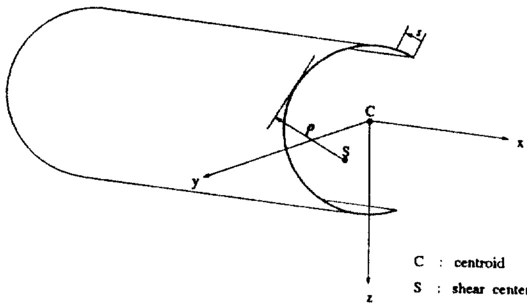

Fig. 1. Coordinate system.

으로부터 剪斷中心까지의 y, z軸 方向으로의 成分을 나타낸다. ω는 "sectorial area"이며 다음과 같이 정의되어진다.

$$\omega = \int_0^s \rho(s)ds \tag{2}$$

여기서 ρ는 S점에서 斷面 中立面 임의점의 接線에 이르는 거리이다.

휨에 의한 剪斷變形으로 式 (1)의 回轉角 θ_y와 θ_z은 剛體 移動成分을 微分한 것과 다르다. 또한 "warping torsion"에 의한 剪斷變形으로 뒴 변형 ϕ_x는 剪斷中心軸의 剛體回轉成分 θ_x의 微分과 다르다.

전술한 假定 2)에 따라 面內變形度(e_{yy}, e_{zz}, e_{yz})들은 없어지고 線形 變位-變形率 關係는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e_{xx} = u_{x,x} \quad 2e_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x} \quad 2e_{xz} = u_{x,z} + u_{z,x} \tag{3}$$

斷面力들은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} &F_x = \int_A \sigma_x \, dA \quad F_y = \int_A \tau_{yx} \, dA \quad F_z = \int_A \tau_{zx} \, dA \\ &M_x = \int_A [\tau_{zx}(y - y_S) - \tau_{yx}(z - z_S)] \, dA \\ &M_y = \int_A \sigma_x z \, dA \quad M_z = -\int_A \sigma_x y \, dA \\ &B = -\int_A \sigma_x \omega \, dA \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 F_x은 軸方向力, F_y, F_z는 剪斷力, M_x은 비틂모멘트, M_y, M_z는 휨모멘트, 그리고 B는 bimoment이다.

假想일은 직각座標系 또는 곡선座標系로 나타낼 수 있다. 뒴(warping) 변형은 式 (2)에서 곡선變位 s의 函數라는 사실에 입각하여 薄壁보의 變位 및 應力度는 곡선座標系에서 더 용이하게 정의될 수 있다고 주장하였다.[8] 그러나 곡선座標系를 사용한

"hybrid model"[7]과 "displacement approach"[8]은 St. Venant 비틂剛性을 變位-變形率 關係에서 誘導할 수 없어서 임의적인 追加를 필요로 했다. 따라서 本 硏究에서는 직각座標系에 의한 假想일을 사용함으로서 St. Venant 비틂剛性이 變位-變形率 關係에서 誘導되어진다.

薄壁보의 假想일 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
0=&\int_V (Ee_{xx}\delta e_{xx}+2Ge_{xy}\delta e_{xy}+2Ge_{xz}\delta e_{xz})dV\\
&-\int_l (\delta u_{xC}p_{xC}+\delta u_{yS}p_{yS}+\delta u_{zS}p_{zS}\\
&\quad+\delta\theta_x m_{xS}+\delta\theta_y m_{yC}+\delta\theta_z m_{zC})dx \qquad (5)\\
&-[\delta u_{xC}P_{xC}+\delta u_{yS}P_{yS}+\delta u_{zS}P_{zS}\\
&\quad+\delta\theta_x M_{xS}+\delta\theta_x M_{yC}+\delta\theta_z M_{zC}]_0^l
\end{aligned}
$$

여기서 (p_{xC}, p_{yS}, p_{zS}), (m_{xS}, m_{yC}, m_{zC})는 각각 보에 作用하는 分布荷重, 分布모멘트, 그리고 (P_{xC}, P_{yS}, P_{zS}), (M_{xS}, M_{yC}, M_{zC})는 절점에 作用하는 集中荷重, 集中모멘트이다.

式 (1)과 (3)을 式 (5)의 右邊 첫번째 積分式에 代入하고, 部材 斷面에 대하여 積分하면 薄壁보의 線形 彈性擧動에 대한 다음과 같은 式을 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
R_l=&\frac{1}{2}\int_l \{EA\delta(u_{xC}'^2)+EI_y\delta(\theta_y'^2)+EI_z\delta(\theta_z'^2)\\
&+EC_\omega\delta(\phi_x'^2)+GJ\delta(\theta_x'^2)+GJ_G\delta(\phi_x-\theta_x')^2\\
&+2(-Gz_S S_{\omega y}+Gy_S S_{\omega z})\delta(\theta_x'\phi_x-\theta_x'^2)\\
&+GA\delta[(u_{yS}'-\theta_z)^2+(u_{zS}'+\theta_y)^2]\\
&-2GS_{zS}\delta[(u_{yS}'-\theta_z)\theta_x'] \qquad (6)\\
&+2GS_{yS}\delta[(u_{zS}'+\theta_y)\theta_x']\\
&-2GS_{\omega y}\delta[(u_{yS}'-\theta_z)\phi_x]\\
&-2GS_{\omega z}\delta[(u_{zS}'+\theta_y)\phi_x]\}dx
\end{aligned}
$$

여기서 다음과 같은 斷面 성질(cross-section properties)을 使用한다.

$$
\begin{aligned}
&A=\int_A dA \quad S_y=\int_A ydA \quad S_z=\int_A zdA\\
&I_{yz}=\int_A yzdA \quad S_\omega=\int_A \omega dA \quad I_{\omega y}=\int_A y\omega dA\\
&I_{\omega z}=\int_A z\omega dA \quad I_y=\int_A z^2dA \quad I_z=\int_A y^2dA \qquad (7)\\
&C_\omega=\int_A \omega^2 dA\\
&J=\int_A\left\{\left[(z-z_S)+\frac{\partial\omega}{\partial y}\right]^2+\left[(y-y_S)-\frac{\partial\omega}{\partial z}\right]^2\right\}dA
\end{aligned}
$$

차후에 式 (6)의 변분을 취하는 과정에서 the effective shear area를 고려하기 위하여 단면적 A는 y, z軸方向으로의 成分, $A_{sy}=\int_A \cos^2\alpha dA$, $A_{sz}=\int_A \sin^2\alpha dA$, α는 S점에서 接線과 y軸과 이루는 角으로 나누어진다.[8]

그리고 本 硏究에서는 다음과 같은 새로운 斷面 성질을 使用한다.[9]

$$
\begin{aligned}
&J_G=\int_A\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right]dA\\
&S_{\omega y}=\int_A\frac{\partial\omega}{\partial y}dA \qquad S_{\omega z}=\int_A\frac{\partial\omega}{\partial z}dA \qquad (8)\\
&S_{yS}=\int_A(y-y_S)dA \qquad S_{zS}=\int_A(z-z_S)dA
\end{aligned}
$$

3. 有限要素法

本 硏究의 有限要素法에서는 절점 수가 2, 3, 4인 세 종류의 등매개 보요소(Isoparameric beam element)를 사용하였다. 部材내의 變位는 다음과 같이 나타낼 수 있다.[9]

$$
\begin{aligned}
&u_i=\sum_{\alpha=1}^{n}N_\alpha u_{i\alpha} \qquad (i=xC,\ yS,\ zS)\\
&\theta_i=\sum_{\alpha=1}^{n}N_\alpha \theta_{i\alpha} \qquad (i=x,\ y,\ z) \qquad (9)\\
&\phi_x=\sum_{\alpha=1}^{n}N_\alpha \phi_{x\alpha}
\end{aligned}
$$

여기서 n은 要素당 절점수, $u_{i\alpha}$, $\theta_{i\alpha}$, $\phi_{x\alpha}$는 절점 α에서의 節點 變位벡터, N_α는 節點 α에서 形狀函數를 나타내며 절점수에 따른 形狀函數들은 參考文獻[13]에서 알 수 있다.

部材 節點 變位벡터 d_e와 節點力 벡터 f_e는 다음과 같이 정의한다.

$$
\begin{aligned}
&d_e=[d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n]^T\\
&f_e=[f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n]^T
\end{aligned} \qquad (10)
$$

여기서

$$d_\alpha^T = [u_{xC},\ u_{yS},\ u_{zS},\ \theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z,\ \phi_x]$$
$$f_\alpha = [F_x,\ F_y,\ F_z,\ M_x,\ M_y,\ M_z,\ B_\omega]^T \qquad (11)$$

式 (9)를 式 (6)에 代入하고 변분을 취하면 局部彈性剛度 매트릭스 k_e는 다음과 같은 블럭 매트릭스 형식으로 나타내어진다.

$$k_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

여기서 블럭 매트릭스 $k_{\alpha\beta}(\alpha,\ \beta = 1,\ \cdots,\ n)$는 附錄表에 나타내었다.

附錄表에 명시된 블럭 彈性剛度 매트릭스는 Chen 등[8]이 유도한 매트릭스보다 비대각 위치(off-diagonal)에 추가적인 항들을 보여주고 있다. 2軸 對稱斷面의 경우에는 式 (8)의 $S_{yS} = S_{zS} = S_{\omega y} = S_{\omega z} = 0$이다. 또한 式 (8)의 J_G는 參考文獻[8]에 使用한 뒴 비틂모멘트와 같다는 것을 證明할 수 있다. 따라서 2軸 對稱斷面의 경우 本 硏究에서 誘導한 블럭 彈性剛度 매트릭스는 Chen 등[8]이 誘導한 매트릭스와 一致한다. 그러나, 非對稱斷面의 경우 블럭 彈性剛度 매트릭스의 밑줄친 비대각 성분들은 零이 되지 않으므로 薄壁보 解析時 밑줄친 항들을 使用하여야 한다.

절점 變位와 荷重 벡터의 각 성분은 다른 기준점(剪斷中心, 圖心)을 사용함으로 하나의 기준점(圖心)에 변환시키고, 局部座標系에서 全體座標系로 변환하면 다음과 같은 式을 얻을 수 있다.[9]

$$\tilde{k}_e\ \tilde{d} = \tilde{f} \qquad (13)$$

여기서 $\tilde{d}$, $\tilde{f}$는 각각 全體座標系에서 節點變位, 荷重벡터를 나타내며 部材 剛度 매트릭스 $\tilde{k}_e$는 다음과 같이 표시된다.

$$\tilde{k}_e = (\Gamma\, T)^T k_e (\Gamma\, T) \qquad (14)$$

여기서 變換 매트릭스 Γ, T는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Gamma = \mathrm{diag}\ (Q_{11},\ Q_{22},\ \cdots,\ Q_{nn})$$
$$T = \mathrm{diag}\ (t_{11},\ t_{22},\ \cdots,\ t_{nn}) \qquad (15)$$

여기서 각 부매트릭스(submatrix)는 다음과 같이 표시된다.

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y_S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

$$t_{ii} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

여기서 3×3 부매트릭스 R는 參考文獻[10]에 나타나 있다.

全體座標系로 표시된 각 部材의 剛度 매트릭스 $\tilde{k}_e$와 절점荷重 $\tilde{f}$는 直接剛度法(direct stiffness approach)로 全體構造物 剛度 매트릭스 K와 節點力 벡터 F를 구하면 全構造物 剛度方程式은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K\ D = F \qquad (18)$$

本 硏究에서는 등매개 보요소(isoparametric beam element)의 사용으로 전단항을 적절히 취급하지 못하면 剛性度가 과대 평가되는 소위 locking 현상이 생긴다.[11-13] 따라서, 이러한 "shear locking" 현상을 극복하기 위하여 균일 감차적분(uniform reduced integration) 技法을 使用하였다.

4. 數値解析 例

Fig. 2는 自由端에 비틂모멘트 T를 받고 있는 외팔보를 나타낸 것이며 1軸 對稱斷面인 channel section으로 단면 재원도 나타나 있다.

本 硏究에서 제시한 블럭 매트릭스를 사용한 結果와 다른 연구자[1,7,14]의 結果를 表 1에 나타내었다. 본 연구의 2절점과 3절점 6要素를 사용한 결과와 다른 연구자의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 이 表에서 알 수 있듯이 저층에서의 回轉角은 剪斷變形을 고려치 않은 Vlasov 보이론에 의한 回轉角보다 15% 이상 차이를 보이고 있는데 이는 전단벽 구조

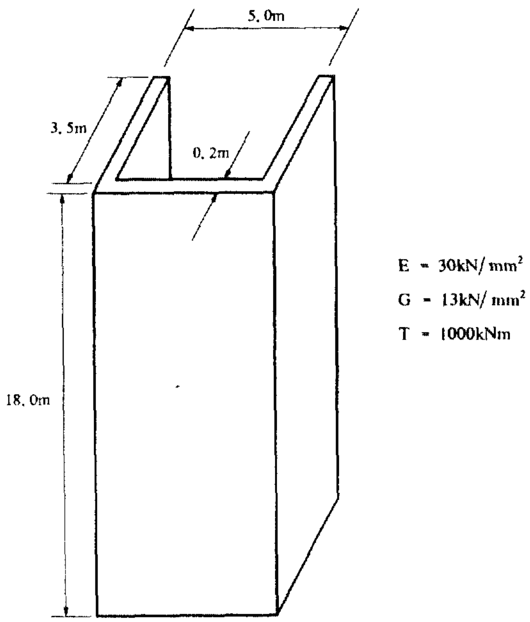

Fig. 2. Channel shape shear wall core with an end torque.

에서 剪斷變形 影響이 중요함을 의미한다. 또한 블럭 매트릭스의 精密度를 조사하기 위하여 附錄表의 블럭 매트릭스의 밑줄친 term을 무시한 경우(Chen and Blandford의 블럭 매트릭스)를 表 1의 마지막 열에 나타내었다. 本 硏究의 블럭 매트릭스를 사용한 경우 最大 誤差가 3.0%인 반면 Chen and Blandford의 블럭 매트릭스의 경우 6.0%의 誤差를 나타내고 있다.

Fig. 3는 NASTRAN[15]의 박판요소인 QUAD4 180 요소에 의한 變形圖(deformed shape)를 나타내고 있다. 面內變形度가 없다는 기본 假定을 만족시키기 위하여 강체 경계요소(rigid element)인 RBE2를 3 m 간격으로 설치하였다.

拘束된 비틂에 의한 影響을 조사하기 위하여 재원은 Fig. 2와 동일한 값을 사용하며 고정단에서 뒴 變位는 拘束하지 않는다. Fig. 4는 拘束된 뒴, 이를 무시한 경우 그리고 GTSTRUDL[16]에 의한 解析結果들을 나타내었다. 이 그림에서 拘束된 뒴의 影響으로 극단적인 뒴 境界條件 사이에는 현저한 차이를 알 수 있다.

Fig. 5는 보의 中央에 비틂모멘트가 作用하고 있는 고정보를 나타낸 것이다. 拘束된 뒴의 變形效果를 조사하기 위하여 두 개의 다른 境界條件 즉 비틂단순지지 및 비틂고정지지(torsionally simply supported or torsionally fixed at both ends)로 解析하였다. 이때 사용된 재원은 다음과 같다 : $l=2.54$ m, $E=206{,}700$ MPa, $G=82{,}700$ MPa, $J=0.005\ m^4$, $C_\omega=0.00052\ m^6$.

本 有限要素의 2, 4, 10要素를 사용한 結果와 Conci and Gattass[17]의 結果를 表 2에 나타내었다. 이 表에서 알 수 있듯이 拘束된 혹은 자유로운 뒴 境界條件 사이에는 상당한 차이가 있음을 보여주고 있다. 또한 본 연구의 有限要素의 갯수를 增加함에 따라 理論解[18]에 잘 一致함을 알 수 있다.

5. 結 論

Timoshenko 보이론과 수정된 Vlasov 薄壁보이론을 결합하여 뒴 剪斷變形을 考慮한 非對稱 斷面을 갖는 薄壁보의 C^0 有限要素를 제안하였다. 本 硏究

表 1. Torsional angle $\theta_x(\times 10^{-3}$ radians)

ht.(m)	Vlasov	Capurso	Tralli	NASTRAN	Present FEM	
					Quad/Cubic	Quad*
3	.1631	.1933	.1934	.1885	.1882	.1836
6	.6111	.6692	.6696	.6584	.6595	.6505
9	1.2842	1.3682	1.3691	1.3499	1.354	1.341
12	2.1243	2.2329	2.2343	2.2060	2.215	2.198
15	3.0749	3.2073	3.2093	3.1709	3.185	3.165
18	4.0806	4.2362	4.2389	4.1901	4.210	4.186

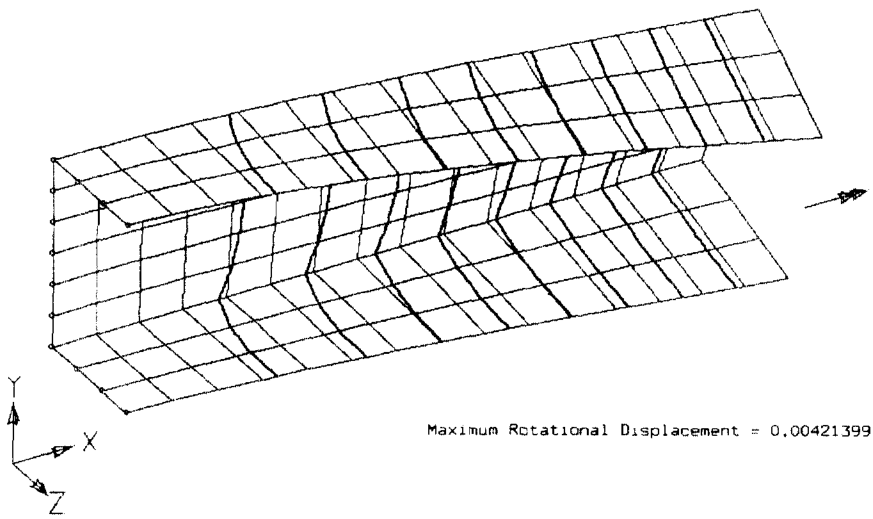

Fig. 3. Deformed shape by MSC/NASTRAN.

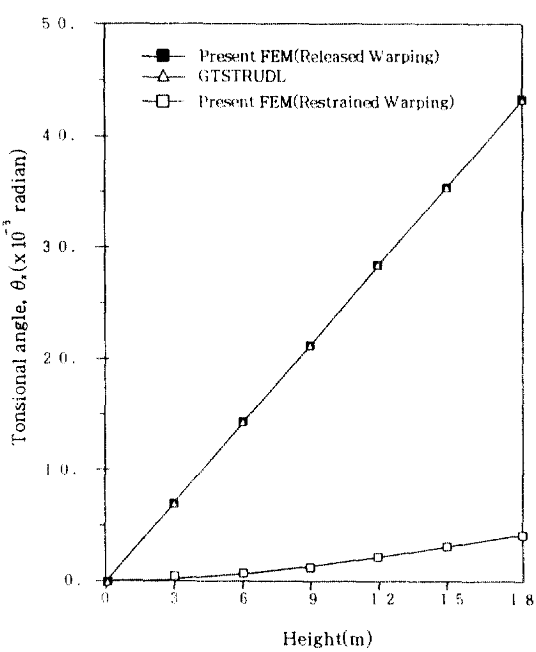

Fig. 4. Torsional angle along the length.

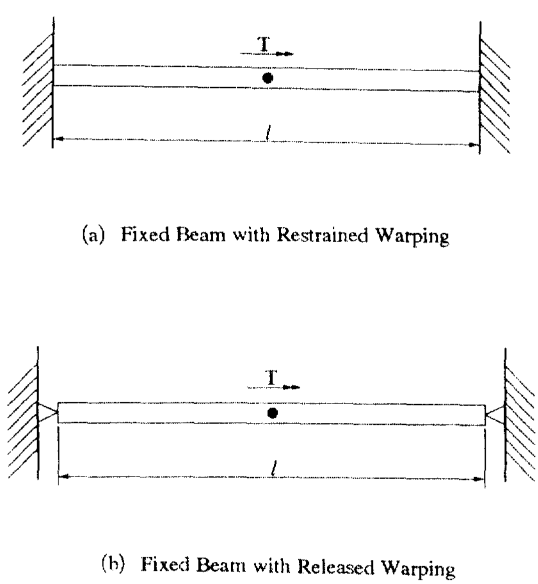

Fig. 5. Fixed beams with a concentrated torsional moment.

表 2. Maximum values for torsional angle θ_x ($\times 10^{-6}$)

Support Condition	Warping Restrained		Warping Released	
	Present FEM	Conci & Gattass	Present FEM	Conci & Gattass
2 ele.	5.94	5.56	.106	.109
4 ele.	5.59	5.57	.105	.105
10 ele.	5.58	5.58	.105	.105
Analytical	5.56		.104	

에서 誘導한 剛度 매트릭스 使用을 통한 解析結果를 요약하면 다음과 같다.

1. 本 硏究에서는 곡선 座標系에의 假想일에 의한 기존의 方法[7,8]과는 달리 직각座標系에 근거한 假想일의 原理를 이용하여 St. Venant 비틂강성을 變位-變形率 關係에서 직접 誘導할 수 있었다.

2. 本 硏究에서 提案된 블럭 매트릭스는 Chen 등[8]이 提案한 매트릭스보다 비대각 위치에 추가적인 항들을 가지고 있다. 이 새로운 블럭 매트릭스 사용으로 전단벽(shear wall) 문제에서 더 나은 결과를 얻을 수 있었다.

3. 薄壁보도 충실(solid) 部材斷面의 경우처럼 깊은 보(deep beam)인 경우 剪斷變形 效果가 중요함을 확인하였다.

4. 薄壁보의 휨 및 비틂 解析時 拘束된 비틂에 의한 影響은 필수적임을 立證하였다.

5. 有限要素의 갯수를 增加함에 따라 理論解 또는 다른 文獻의 結果들과 잘 一致함을 알 수 있었다.

附 錄

表. 블럭 彈性剛度 매트릭스 $k_{\alpha\beta}$

$$k_{\alpha\beta} = \int_l \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot & \underline{b_1} & \cdot & b_2 & \underline{b_3} \\ \cdot & \cdot & c & \underline{c_1} & c_2 & \cdot & \underline{c_3} \\ \cdot & \underline{b_1} & \underline{c_1} & d & \underline{d_1} & \underline{d_2} & d_3 \\ \cdot & \cdot & c_4 & \underline{d_4} & e & \cdot & \underline{e_1} \\ \cdot & b_4 & \cdot & \underline{d_5} & \cdot & f & \underline{f_1} \\ \cdot & \underline{b_5} & \underline{c_5} & d_6 & \underline{e_1} & \underline{f_1} & g \end{bmatrix} dx$$

$a = EAN'_\alpha N'_\beta$ $\quad$ $b = GA_{sy}N'_\alpha N'_\beta$

$b_1 = -GS_{zs}N'_\alpha N'_\beta$ $\quad$ $b_2 = GA_{sy}N'_\alpha N_\beta$

$b_3 = -GS_{\omega y}N'_\alpha N_\beta$ $\quad$ $c = GA_{sz}N'_\alpha N'_\beta$

$c_1 = GS_{ys}N'_\alpha N'_\beta$ $\quad$ $c_2 = GA_{sz}N'_\alpha N_\beta$

$c_3 = -GS_{\omega z}N'_\alpha N_\beta$ $\quad$ $d = GJN'_\alpha N'_\beta + GJ_G N'_\alpha N'_\beta$

$d_1 = GS_{ys}N'_\alpha N_\beta$ $\quad$ $d_2 = GS_{zs}N'_\alpha N_\beta$

$d_3 = -GJ_G N'_\alpha N_\beta$ $\quad$ $e = EI_y N'_\alpha N'_\beta + GA_{sz}N_\alpha N_\beta$

$e_1 = -GS_{\omega z}N_\alpha N_\beta$ $\quad$ $f = EI_z N'_\alpha N'_\beta + GA_{sy}N_\alpha N_\beta$

$f_1 = GS_{\omega y}N_\alpha N_\beta$ $\quad$ $g = EC_\omega N'_\alpha N'_\beta + GJ_G N_\alpha N_\beta$

b_4, b_5, c_4, c_5, d_4, d_5, , d_6는 b_2, b_3, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3의 식들에 $N'_\alpha N_\beta$ 대신 $N_\alpha N'_\beta$를 대입하여 얻는다.

參考文獻

1. Vlasov, V.Z., "Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations", Jerusalem, Israel, 1961.
2. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability,* McGraw-Hill, New York, 1961.
3. Krahula, J.L., "Analysis of Bent and Twisted Bars Using the Finite Element Method", *J. AIAA*, Vol. 5, 1967, pp. 1194-1197.
4. Krajcinovic, D., "A Consistent Discrete Elements Technique for Thin-Walled Assemblages", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 5, 1969, pp. 639-662.
5. Barsoum, R.S. and Gallagher, R.H., "Finite Element Analysis of Torsional-Flexural Stability Problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 2, 1970, pp. 335-352.
6. Yoo, C.H., "Bimoment Contribution to Stability of Thin-Walled Assemblages", *Comput. Struct.*, Vol. 11, 1980, pp. 465-471.
7. Tralli, A., "A Simple Hybrid Model for Torsion and Flexure of Thin-Walled Beams", *Comput. Struct.*, Vol. 22, 1986, pp. 649-658.
8. Chen, H. and Blandford, G.E., "A C^0 Finite Element Formulation for Thin-Walled Beams", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 28, 1989, pp. 2239-2255.
9. Back, S.Y., "A Shear-Flexible Finite Element Model for Lateral-Torsional Buckling Analysis of Thin-Walled Open Beams", Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 1992.
10. Weaver, W.J. Jr. and Gere, J.M., *Matrix Analysis of Framed Structures,* 2nd Edn. Van Nostrand-

Reinhold, New York, 1980.
11. Hughes, T.J.R., Taylor, R.L. and Kanoknukulchai, W., "A Simple and Effective Element for Plate Bending", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 11, 1977, pp. 1529-1543.
12. Hughes, T.J.R., "Finite Elements Based upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element", *J. Appl. Mech.*, Vol. 48, 1981, pp. 587-596.
13. Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method-Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987.
14. Capurso, M., "Influenza Delle Componenti di Scorrimento Nella Deformazione Delle Travi di Parete Sottile Con Sezione Aperta", Giornale del Genio Civile, Vol. 122, 1984, pp. 127-144.
15. MSC/NASTRAN User's Manual, V67., The MacNeal-Schwendler Co. Ltd., 1993.
16. GTICES Systems Laboratory, School of Civil Engineering, Georgia Institute of Technology, *GTSTRUDL User's Manual*, Vol. 3, Atlanta, Georgia, 1992.
17. Conci, A. and Gattass, M., "Natural Approach for Thin-Walled Beam-Columns with Elastic-Plasticity", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 29, 1990, pp. 1653-1679.
18. AISC, Torsional Analysis of Steel Member, American Institute of Steel Construction, Inc., Chicago, Illinois, 1983.

(接受 : 1993. 12. 1)