

이방성 손상모델을 이용한 콘크리트 구성방정식의 도출

Constitutive Equation for Concrete using Anisotropic Continuum Damage Model

이기성* · 변근주**

Lee, Ki Seong · Byun, Keun Joo

Abstract

Concrete contains numerous microcracks initially. The growth and propagation of microcracks cause failure of concrete. These processings are termed as "damage". The concepts of the continuum damage mechanics are presented and the damage evolution law and constitutive equation are derived by using the Helmholtz free energy and the dissipation potential by means of the thermodynamic principles. The constitutive equation includes the effects of elasticity, damage and plasticity of concrete. The proposed model successfully predicts the nonlinear behavior of concrete subject to monotonic uniaxial and biaxial loadings.

요 지

콘크리트는 초기부터 미세균열을 포함하고 있으며 이들의 성장과 전파에 의해 파손이 발생한다. 이와같은 과정을 손상이라 한다. 연속체 손상역학의 개념을 소개하고 열역학 법칙으로부터 자유에너지함수와 소산포텐셜을 가정하여 이차텐서로 나타낸 손상모델의 전개법칙과 구성방정식을 제안하였다. 구성방정식은 탄성과 손상 및 소성을 고려하도록 하였다. 도출된 모델을 이용하여 단조하중에 의한 일축과 이축응력을 받는 콘크리트에 적용하여 그 타당성을 검증하였다.

1. 서 론

콘크리트나 암반과 같은 재료들에서 나타나는 하중-변형의 비선형성은 재료의 내부구조 변화 때문에 발생한다고 알려져 있다. 비선형 변형을 일으키는 내부구조의 변화는 두가지 기구로 나눌 수 있는데 하나는 소성이며 다른 하나는 미세공극이나 미세균

열의 생성과 성장 및 전파에 의한 것이다. 소성은 변형을 연화현상이나 재료의 탄성특성에는 영향을 주지 않지만 미세균열은 탄성특성에 영향을 주고 영구변형까지도 일으키게 한다.⁽¹⁾ 콘크리트 파괴의 주된 원인은 이들 내부에 존재하는 미세균열 때문에 발생한다. 따라서 소성론을 근거로한 콘크리트의 재료모델은 미세균열의 전파를 묘사하기에는 한계를 가지고 있다. 그러므로 미세균열의 영향을 고려할 수 있는 새로운 재료모델이 필요하다. 미세균열의 생성, 전파와 결합에 의한 영향을 손상(damage)이라

* 정희원 · 한국전력기술주식회사 토목구조기술처, 선임기술원

** 정희원 · 연세대학교 토목공학과 교수

하며 손상과정을 나타내기 위해 손상변수를 이용하는 방법이 손상모델이다.⁽²⁾

손상모델을 사용하는 손상역학이론(damage mechanics)은 1958년 Kachanov가 일축인장하중을 받는 금속의 크리프 해석에 적용함으로써 시작되었다. 이 이론은 그 후 금속 뿐 아니라 암반, 콘크리트 등 여러가지 재료의 거동특성을 규명하는데 이용되어 왔다.^(1,3,4) 특히 콘크리트에는 다음과 같은 콘크리트의 특성 때문에 손상이론이 더욱 잘 적용될 수 있다: (i) 콘크리트에서의 균열과정은 연속적이며 응력이나 변형률이 낮은 수준에서부터 시작된다. (ii) 콘크리트는 취성체로서 뚜렷한 항복현상이 일어나지 않는다. (iii) 균열발달의 방향이 최대주응력 방향과 일치한다.^(5,6)

콘크리트의 비선형 해석시 손상역학은 하중에 의한 콘크리트 내부의 미소균열과 구조적 결함을 연속결합장(continuous defect field)으로 모형화한다. 이 결합장은 미소균열이나 미소결합의 방향을 서술할 수 있는 손상텐서(damage tensor)로 이루어진다. 이러한 손상텐서를 이용하여 공칭응력텐서와 유효응력텐서 사이의 관계를 유도하며, 손상변형률은 응력에 저항하는 유효면적의 감소에 의해 변형률이 증가하는 것으로 정의된다. 이 손상이론은 콘크리트의 비선형 거동을 낮은 변형률 수준으로부터 변형률 연화영역을 통과한 파손상태까지 묘사할 수 있다.

본 논문은 이차의 손상텐서를 사용하여 이방성 손상모델을 표현하고 에너지 등가원리를 이용하여 유효탄성계수를 정의하고 손상을 제어하는 손상면을 손상에너지해방률의 함수로 정의하므로 이것으로부터 탄성 및 손상과 소성을 함께 고려하여 콘크리트의 비선형성을 묘사할 수 있는 구성방정식을 도출하고 이를 콘크리트에 적용하여 손상모델의 타당성을 검증하고자 한다.

2. 손상변수

손상(damage)이란 열역학적 하중이 작용하여 일련의 비가역적인 물리적 균열과정을 거쳐 발생하는 재료특성들의 영구적인 변화의 집합,⁽⁷⁾ 또는 내적이거나 외적 변형률에 의해 재료의 점착력이 회복될 수 없는 상태에 이르는 것⁽⁵⁾으로 정의할 수 있다. 이

와같은 정의를 가지는 손상의 과정은 유효응력개념이나 확률론적인 방법^(8,9) 등으로 설명될 수 있다.

그림 1과 같이 많은 결함을 갖고 있는 손상된 체적요소에서 한 단면의 공칭단면적을 A 라 하고 결함에 의해 감소된 유효저항면적을 \bar{A} 라 하여 이 단면에 대한 손상변수 ω 를 식 (1)과 같이 정의한다.

$$\omega = \frac{A - \bar{A}}{A} \quad (1)$$

Lemaitre⁽¹⁾에 의한 변형률 등가의 가정으로부터 전체면적 A 에 작용하는 힘과 손상되지 않은 유효저항면적 \bar{A} 에 작용하는 힘이 같다고 하면 유효응력 $\bar{\sigma}$ 를 식 (2)와 같이 얻을 수 있다(그림 2).

$$\sigma A = \bar{\sigma} \bar{A} \quad (2)$$

식 (1)과 식 (2)로부터 공칭응력 σ 와 유효응력 $\bar{\sigma}$ 사이의 관계를 손상변수 ω 를 이용하여 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - \omega)} \quad (3)$$

유효응력 $\bar{\sigma}$ 는 손상되지 않은 가상의 면적 \bar{A} 에 작

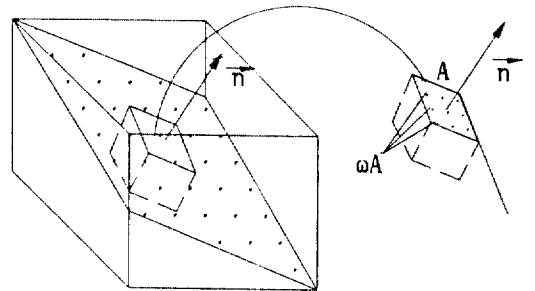


그림 1. 손상된 체적요소

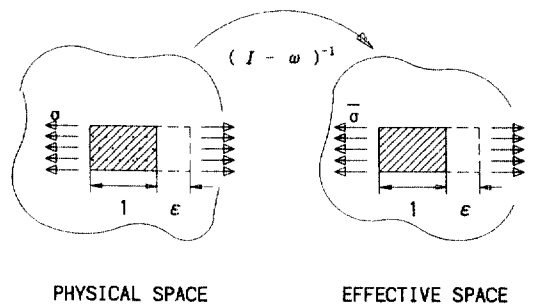


그림 2. 변형률 등가의 개념도

용하는 가상응력으로 생각할 수 있다. 식 (1)로부터 손상변수 ω 는 재료가 전혀 손상되지 않은 경우 0에서부터 완전 파손된 경우의 1까지의 범위를 갖는다.

3. 손상모델

3.1 스칼라 손상모델

스칼라 손상모델은 미소균열이나 미소공극이 재료의 모든 공간에 균등하게 분산되어 있다고 가정하여 재료를 탄성이며 등방성인 것으로 가정한다.

가장 간단한 스칼라 손상모델로서 그림 3과 같이 일축의 반복하중을 받는 재료에 대한 응력-변형률 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽⁵⁾

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon} [E(1-\omega)\varepsilon] \\ &= \frac{dE}{d\varepsilon} (1-\omega)\varepsilon + E(1-\omega) - E\varepsilon \frac{d\omega}{d\varepsilon} \quad (4) \end{aligned}$$

손상과정은 비가역 과정이므로 하중제거시 $d\omega/d\varepsilon = 0$ 이 된다. 또한 E 를 변형률과 무관한 순수탄성계수라 하면(즉, $dE/d\varepsilon = 0$) 식 (4)는 식 (5)와 같이 된다.

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E(1-\omega) \quad (5)$$

따라서 손상변수 ω 는 식 (6)과 같다.

$$\omega = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (6)$$

식 (6)에서 $d\sigma/d\varepsilon$ 을 하중제거시의 평균탄성계수 E^* 로 대체하면 손상변수 ω 는 식 (7)과 같이 표현된다.

$$\omega = 1 - \frac{E^*}{E} \quad (7)$$

즉, 초기탄성계수에 대한 하중제거시의 평균탄성계수의 비로 재료의 손상정도를 결정하는 식으로 사용될 수 있다.

그러나 스칼라 손상모델은 재료가 등방성이며 또한 손상이 등방성인 특수한 경우에만 적용이 가능한 결점이 있다.⁽¹⁰⁾ 따라서 일반적인 경우를 고려하기 위해서는 이방성 손상모델을 사용하여야 한다.

3.2 이방성 손상 모델

재료의 손상은 일반적으로 이방성을 가지게 되며

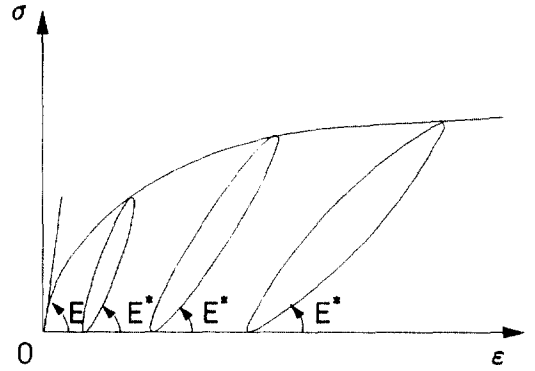
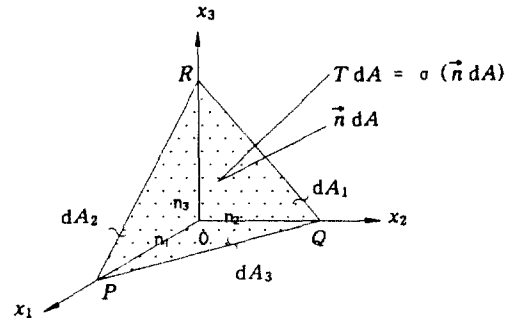
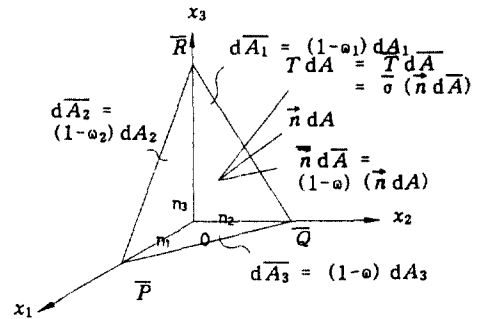


그림 3. 반복하중을 받는 재료의 이력도



(a) 현재 손상된 요소



(b) 가상의 손상되지 않은 요소

그림 4. 손상된 요소와 가상의 손상되지 않은 요소의 특성대비

3차원의 경우 그림 4와 같이 손상된 요소와 가상의 손상되지 않은 요소 사이의 응력 관계는 식 (8)과 같이 나타낼 수 있다.^(10,11)

$$[\bar{\sigma}] = [1-\omega]^{-1} : [\sigma] = [M] : [\sigma] \quad (8)$$

여기서 []는 텐서를 나타내고, :는 텐서의 곱을 나타낸다. 또한 [M]는 손상의 이방성을 고려한 유

효손상텐서가 된다.

한 재료에서 손상되지 않은 상태($\omega=0$)의 탄성변형 에너지는 식 (9)와 같다.

$$W^e(\epsilon, 0) = \frac{1}{2} [\epsilon^e]^T : [E] : [\epsilon^e] \quad (9)$$

마찬가지로 손상된 상태의 탄성변형에너지는 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$W^e(\epsilon^e, \omega) = W^e(\bar{\epsilon}^e, 0)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [\bar{\epsilon}^e]^T : [E] : [\bar{\epsilon}^e] \\ &= \frac{1}{2} [\epsilon^e]^T : [M]^{-1} : [E] : [M]^{T-1} : [\epsilon^e] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{여기서 } [\bar{\epsilon}^e] = [M]^{T-1} : [\epsilon^e] \quad (11)$$

식 (10)의 탄성에너지식으로부터 구성방정식을 구하면 식 (12)의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} [\sigma] &= \frac{\partial W^e(\epsilon^e, \omega)}{\partial \epsilon^e} \\ &= [M]^{-1} : [E] : [M]^{T-1} : [\epsilon^e] \end{aligned} \quad (12)$$

따라서 손상된 재료에 대한 유효탄성텐서는 식 (13)과 같게 된다.

$$[\bar{E}] = [M]^{-1} : [E] : [M]^{T-1} \quad (13)$$

그러므로 앞의 에너지식을 다시 쓰면 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$W^e(\epsilon^e, \omega) = \frac{1}{2} [\epsilon^e]^T : [\bar{E}] : [\epsilon^e] \quad (14)$$

식 (8), 식 (11)과 식 (12)로부터 손상된 재료의 구성방정식을 식 (15)와 같이 얻는다.

$$[\bar{\sigma}] = [E] : [\bar{\epsilon}^e] \quad (15)$$

4. 구성방정식의 도출

4.1 손상의 전개

등온과정에 대한 재료의 Helmholtz 자유에너지 (Helmholtz free energy) $\rho\psi$ 를 식 (16)과 같이 표현할 수 있다.⁽¹¹⁾

$$\rho\psi(\epsilon^e, \omega, q, \beta) = W^e(\epsilon^e, \omega) + \psi_p(q) + \psi_d(\beta) \quad (16)$$

여기서 ρ 는 재료의 밀도를, $\psi_p(q)$ 와 $\psi_d(\beta)$ 는 각각 변형률경화와 손상경화의 에너지를 나타내며, q 는 누적된 유효소성변형률을, β 는 전체적인 손상을 나타내는 계수를 의미한다.

소성변형률과 손상은 비가역적 과정이므로 역학적 에너지를 열이나 표면생성에너지로 변환하게 된다. 따라서 열역학 제 2법칙에 의한 Clausius-Duhem 부등식에 따르면 에너지 소산률은 식 (17)과 같이 주어지며 항상 양의 값을 가져야 한다.

$$[\sigma] : [\dot{\epsilon}] - \rho\dot{\psi} \geq 0 \quad (17)$$

여기서 $\dot{\cdot}$ 는 시간에 대한 변화를 의미한다.

에너지 소산률은 손상 변수에 의하여 이루어지므로 식 (16)의 비에너지로부터 손상에너지해방률 $[Y]$ 를 식 (18)과 같이 정의할 수 있다.⁽¹¹⁾

$$\begin{aligned} [Y] &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \\ &= -\frac{1}{2} [\epsilon^e]^T : \left[\frac{\partial \bar{E}}{\partial \omega} \right] : [\epsilon^e] \\ &= -[\epsilon^e]^T : [M]^{-1} : [E] : \left[\frac{\partial M^{T-1}}{\partial \omega} \right] : [\epsilon^e] \end{aligned} \quad (18)$$

손상에너지해방률 $-[Y]$ 는 변형률의 제공의 함수이므로 항상 양의 값을 갖게 되며 Clausius-Duhem 부등식을 만족시키는 충분조건은 $\dot{\omega} \geq 0$ 이다. 이 조건을 만족시키는 손상면($f_d=0$)을 가정하여 하중 조건에 따라 손상의 전개를 식 (19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{\omega} = 0, & \text{if } f_d < 0, \text{ or } f_d = 0 \text{ and } \dot{f}_d \leq 0 \\ \dot{\omega} = f, & \text{if } f_d = 0 \text{ and } \dot{f}_d > 0 \end{cases} \quad (19)$$

여기서 f 는 흐름법칙에 의해 결정되는 함수이다.

응력이나 변형률 공간내에서 손상이 발생하는 영역과 손상이 발생하지 않는 영역을 구분하는 면 $f_d=0$ 가 존재한다고 하면 손상면 f_d 는 식 (20)과 같이 손상 에너지 해방률 $[Y]$ 와 관계를 갖도록 가정할 수 있다.⁽¹¹⁾

$$f_d(Y, B) = Y_d^{1/2} - [B_0 + B(\beta)] \quad (20)$$

$$\text{여기서 } Y_d = \frac{1}{2} [Y]^T : [J] : [Y] \quad (21)$$

B_0 와 B 는 각각 손상의 발생시점과 손상의 증가를

나타내며, β 는 전체적인 손상을 나타내는 스칼라 변수이고, $[J]$ 는 손상성장치의 이방성 특성을 나타내는 텐서이다.

소성이론에 사용되는 von Mises 이론에 의한 소성포텐셜과 같이 항복면 $f_p(\sigma, R)=0$ 과 $f_d(Y, B)=0$ 를 만족시키는 소산력(power of dissipation)을 식 (22)와 같이 나타낼 수 있다.⁽¹⁾

$$\Phi = [\sigma] : [d\varepsilon^p] - R dq - [Y] : [d\omega] - B d\beta \quad (22)$$

여기서 R 는 소성유효응력이다.

흐름법칙으로부터 식 (23)의 Lagrangian 함수를 이용하여 각 변수의 증분을 얻을 수 있다.

$$H = \Phi - \lambda_p f_p - \lambda_d f_d \quad (23)$$

식 (23)으로부터 각 변수의 증분을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d\varepsilon^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \quad (24a)$$

$$dq = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial (-R)} \quad (24b)$$

$$d\omega = \lambda_d \frac{\partial f_d}{\partial (-Y)} \quad (24c)$$

$$d\beta = \lambda_d \frac{\partial f_d}{\partial (-B)} \quad (24d)$$

적합조건식 식 (25)와 식 (26)으로부터 λ_p 와 λ_d 를 각각 식 (27)과 식 (28)과 같이 얻는다.

$$df_p(\sigma, \omega, q) = \left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right] : [d\sigma] + \left[\frac{\partial f_p}{\partial \omega} \right] : [d\omega] + \left[\frac{\partial f_p}{\partial R} \right] : \left[\frac{\partial R}{\partial q} \right] : [dq] = 0 \quad (25)$$

$$df_d = \left[\frac{\partial f_d}{\partial Y} \right] : [dY] + \left[\frac{\partial f_d}{\partial B} \right] : \left[\frac{\partial B}{\partial \beta} \right] : [d\beta] = 0 \quad (26)$$

$$\lambda_p = \begin{cases} \frac{\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} : d\omega}{\frac{\partial f_p}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial q} \frac{\partial f_p}{\partial R}} > 0, \\ \text{if } f_p = 0 \text{ and } \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} : d\omega > 0 \\ 0, \text{ if } f_p < 0, \text{ or } f_p = 0 \text{ and } \frac{\partial f_p}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f_p}{\partial \omega} : d\omega \leq 0 \end{cases} \quad (27)$$

$$\lambda_d = \begin{cases} \frac{\frac{\partial f_d}{\partial Y} : dY}{\frac{\partial f_d}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \beta} \frac{\partial f_d}{\partial B}} > 0, \\ \text{if } f_d = 0 \text{ and } \frac{\partial f_d}{\partial Y} : dY \leq 0 \\ 0, \text{ if } f_d < 0, \text{ or } f_d = 0 \text{ and } \frac{\partial f_d}{\partial Y} : dY \leq 0 \end{cases} \quad (28)$$

4.2 탄성-손상 접선계수

식 (12)로부터 증분형태의 응력-변형률 관계를 유도하면 식 (29)와 같이 된다.

$$[d\sigma] = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon^e} \right] : [d\varepsilon^e] + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \omega} \right] : [d\omega] = [\bar{E}] : [d\varepsilon^e] + [\bar{D}] : [d\omega] \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } [\bar{D}] &= \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \omega} \right] \\ &= 2[M]^{-1} : [E] : \left[\frac{\partial M^{T,-1}}{\partial \omega} \right] : [\varepsilon^e] \end{aligned} \quad (30)$$

식 (18)의 에너지손상해방률 $[Y]$ 의 증분을 구하면 식 (31)과 같다.

$$[dY] = \left[\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon^e} \right] : [d\varepsilon^e] + \left[\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right] : [d\omega] = [\bar{D}] : [d\varepsilon^e] + [P] : [d\omega] \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } [P] &= \left[\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right] \\ &= [\varepsilon^e]^T : \left[\frac{\partial M^{-1}}{\partial \omega} \right] : [E] : \left[\frac{\partial M^{T,-1}}{\partial \omega} \right] : [\varepsilon^e] \end{aligned} \quad (32)$$

한편 손상변수의 증분식(24c)에 식 (31)을 대입하여 정리하면 식 (33)과 같다.

$$[d\omega] = [N] : [\bar{D}] : [d\varepsilon^e] + [N] : [P] : [d\omega] \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } [N] &= \frac{\frac{\partial f_d}{\partial Y}}{\frac{\partial f_d}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \beta} \frac{\partial f_d}{\partial B}} \\ &= \frac{\frac{\partial f_d}{\partial Y}}{\frac{\partial f_d}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial \beta} \frac{\partial f_d}{\partial B}} \end{aligned} \quad (34)$$

식 (33)을 $[d\omega]$ 에 대하여 정리하면 식 (35)를 얻는다.

$$[d\omega] = \frac{[N] : [\bar{D}]}{([I] - [N] : [P])} : [d\epsilon^e] \\ = [Q] : [d\epsilon^e] \quad (35)$$

여기서 [I]는 단위텐서이며,

$$[Q] = \frac{[N] : [\bar{D}]}{[I] - [N] : [P]} \quad (36)$$

식 (35)를 식 (29)에 대입하면 탄성-손상 접선계수 (tangent modulus)를 얻는다.

$$[d\sigma] = [\bar{E}] : [d\epsilon^e] + [\bar{D}] : [Q] : [d\epsilon^e] \\ = [\bar{K}] : [d\epsilon^e] \quad (37)$$

$$\text{여기서 } [\bar{K}] = [\bar{E}] + [\bar{D}] : [Q] \quad (38)$$

4.3 탄성-손상-소성 접선계수

소성성분을 고려하기 위해 총변형률증분을 식 (39)와 같이 탄성과 소성 성분으로 구분할 수 있다.

$$[d\epsilon^e] = [d\epsilon] - [d\epsilon^p] \quad (39)$$

식 (39)를 식 (37)에 대입하면 식 (40)과 같다.

$$[d\sigma] = [\bar{K}] : ([d\epsilon] - [d\epsilon^p]) \quad (40)$$

항복면 f_p 의 적합조건식 식 (25)에 식 (35)와 식 (37)을 대입하면 식 (41)을 얻는다.

$$[df_p] = \left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right] : [\bar{K}] : [d\epsilon - d\epsilon^p] \\ + \left[\frac{\partial f_p}{\partial \omega} \right] : [Q] : [d\epsilon - d\epsilon^p] \\ + \frac{\partial f_p}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial q} dq \quad (41)$$

식 (41)에 식 (24a)를 대입하여 정리하면 식 (42)와 같이 λ_p 를 구할 수 있다.

$$\lambda_p = \frac{\left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right] : [\bar{K}] + \left[\frac{\partial f_p}{\partial \omega} \right] : [Q] : [d\epsilon]}{\left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right] : [\bar{K}] : \left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right] + \left[\frac{\partial f_p}{\partial \omega} \right] : [Q] : \left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right] - H^p \frac{\partial f_p}{\partial R} \gamma} \quad (42)$$

$$\text{여기서 } H^p = \frac{\partial R}{\partial q} \quad (43)$$

$$\gamma = \frac{dq}{\lambda_p} \quad (44)$$

따라서 증분상태의 응력-변형률 관계식은 식 (24a)와 식 (40), 식 (42)로부터 식 (45)와 같이 얻게 된다.

$$[d\sigma] = [\bar{H}] : [d\epsilon] \quad (45)$$

여기서

$$[\bar{H}] = [\bar{K}] - \frac{\left(\left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right] : [\bar{K}] + \left[\frac{\partial f_p}{\partial \omega} \right] : [Q] \right) : \left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right]}{\left(\left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right] : [\bar{K}] : \left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right] + \left[\frac{\partial f_p}{\partial \omega} \right] : [Q] : \left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right] - H^p \frac{\partial f_p}{\partial R} \gamma \right)} \quad (46)$$

$[\bar{H}]$ 는 콘크리트의 비선형 거동을 묘사할 수 있는 탄성-손상-소성을 고려한 접선계수(tangent modulus)가 된다.

식 (46)에서 만일 손상항을 고려하지 않으면 우변 첫번째항 $[\bar{K}]$ 는 탄성텐서 [E]가 되며 두번째항은 $\left[\frac{\partial f_p}{\partial \omega} \right]$ 이 제거되어 소성강성텐서로 축약되어진다. 즉 탄-소성해석에 사용되는 구성방정식과 같게 된다.

5. 도출된 구성방정식을 이용한 콘크리트의 손상해석

본 논문의 손상을 고려한 구성관계식을 검증하기 위하여 단조증가하중에 의한 일축과 이축응력을 받는 콘크리트 요소에 대하여 실험결과와 본 모델의 계산결과를 비교하였다. 여기서 사용한 콘크리트의 소성은 그림 5와 같은 Han-Chen⁽¹²⁾의 부등경화법(nonuniform hardening rule)을 이용하였다. Han-Chen의 부등경화법칙은 식 (47)과 같이 항복면을 정의한다.

$$f_p = \rho - k(k_0, \sigma_m) \rho(\sigma_m, \theta) = 0 \quad (47)$$

여기서 k는 형상계수로서 정수압응력 σ_m 과 경화변수 k_0 의 함수로 나타낸다. 파괴기준 $\rho(\sigma_m, \theta)$ 은 Willam-Warnke의 모델을 이용하였다.

일축압축에 대하여 동일한 조건하에서 Voyiadjis 등⁽¹³⁾과 Suaris 등⁽¹⁴⁾에 의한 실험결과와 본 모델에 의한 계산결과를 비교하여 그림 6에 나타내었다.

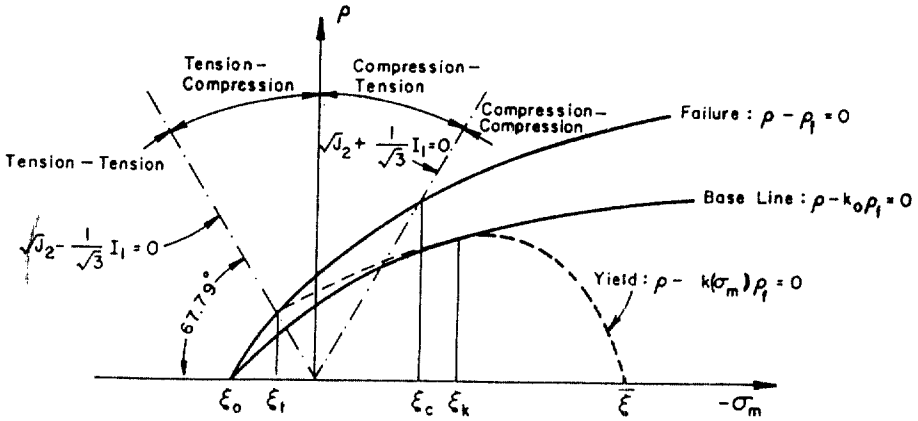


그림 5. Han-Chen의 부등경화법

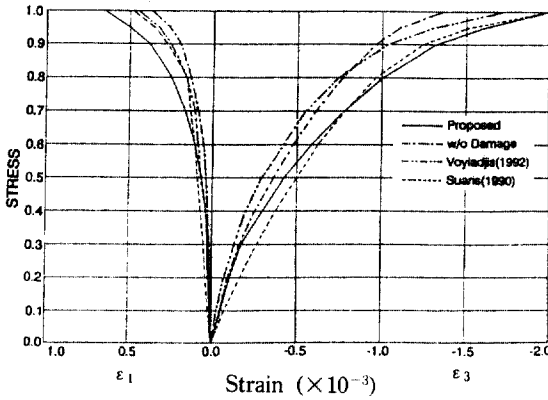


그림 6. 일축압축응력을 받는 콘크리트의 응력-변형률 비교

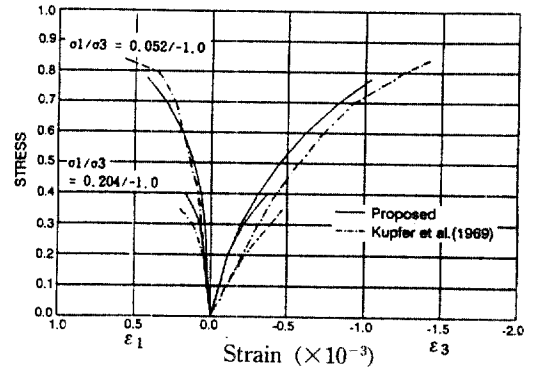


그림 7. 이축의 인장-압축응력을 받는 콘크리트의 응력-변형률 비교

손상의 영향을 도시하기 위하여 손상을 받지 않은 경우와 손상을 받은 경우의 구성관계도를 그림 6에 함께 나타내었다. 모델의 계산에 사용된 변수로는 $E=2000$, $B_0=0.001$ 와 $dB/d\beta_0=5.7$ 등을 사용하였다.

또한 이축응력에 대한 결과를 비교하기 위하여 Kupfer 등⁽¹⁵⁾에 의한 인장-압축 실험결과와 계산결과를 그림 7에 나타내었다. 여기서는 응력비가 $(\sigma_1/\sigma_3) = 0.052/-1.0$, $0.204/-1.0$ 인 두가지 경우를 비교하였다.

그림 6과 그림 7로부터 단조하중에 의한 일축응력상태와 이축응력상태에 대한 각각의 실험결과와 비교하여 볼 때 본 모델이 타당함을 알 수 있다. 따라서 콘크리트의 비선형특성을 규명하는데 손상

모델은 탄성, 손상 및 소성을 고려할 수 있는 재료 모델로 사료된다.

7. 결 론

유효응력개념을 기본으로하는 손상모델은 간단한 변수인 손상변수를 이용하여 재료의 비선형 성질을 규명하는 방법으로서 콘크리트는 이러한 손상모델을 적용하기에 적합한 특성을 가지고 있으므로 콘크리트의 비선형 현상을 해석하기에 적절한 방법인 것으로 사료된다.

에너지 등가원리를 이용하여 유효탄성계수를 정의하고 열역학 법칙으로부터 자유에너지함수와 소산포텐셜을 가정하여 손상에너지해방률의 함수로 손상면을 정의하므로 이차텐서로 나타낸 콘크리트

손상모델의 전개법칙과 구성방정식을 제안하였다. 구성방정식은 탄성과 손상 및 소성을 고려하도록 하였다.

단조하중에 의한 일축응력상태와 이축응력상태에 대한 각각의 실험결과와 본 모델의 계산결과를 비교할 때 잘 일치하였다. 따라서 손상모델은 콘크리트의 비선형특성을 규명하는데 탄성, 손상 및 소성을 고려할 수 있는 재료모델로 사료된다.

기 호

A : 요소의 공칭단면적
 \bar{A} : 요소의 유효저항면적
 B : 손상발생시점의 증분
 B_0 : 손상발생시점
 $[\bar{D}]$: 식 (30)의 텐서
 E : 탄성계수
 E^* : 하중제거시의 평균탄성계수
 $[E]$: 탄성텐서
 $[\bar{E}]$: 유효탄성텐서
 f_d : 손상면
 f_p : 항복면
 H^p : 소성계수
 $[\bar{H}]$: 탄성-손상-소성 접선계수
 $[J]$: 손상상장의 이방성특성을 나타내는 텐서
 k : 형상계수
 k_0 : 경화변수
 $[\bar{K}]$: 탄성-손상 접선계수
 $[N]$: 식 (34)의 텐서
 $[M]$: 이방성 유효손상텐서
 $[P]$: 식 (32)의 텐서
 q : 누적된 소성유효변형률
 $[Q]$: 식 (36)의 텐서
 R : 소성유효응력
 W^e : 탄성변형에너지
 Y_d : $[Y]$ 의 2차 불변량
 $[Y]$: 손상에너지해방률
 β : 전체적인 손상을 나타내는 계수
 ε : 총변형률
 ε^e : 탄성변형률
 ε^p : 소성변형률
 $\bar{\varepsilon}^e$: 유효탄성변형률

γ : 소성응력상태의 스칼라 함수
 λ_d : 손상의 크기를 나타내는 양의 계수
 λ_p : 소성의 크기를 나타내는 양의 계수
 ρ : 재료의 밀도
 ρ_{ψ} : Helmholtz 자유에너지
 ρ_f : 파괴면
 σ : 공칭응력
 σ_m : 정수압응력
 $\bar{\sigma}$: 유효응력
 Φ : 소산에너지
 ψ_d : 손상경화에너지
 ψ_p : 변형률경화에너지
 ω : 손상변수

참고문헌

1. Lemaitre, J., "How to Use Damage Mechanics", *Nuclear Engineering and Design* 80, 1984, pp. 233-245.
2. Mazars, J. and Pijaudier-Cabot, G., "Continuum Damage Theory-Application to Concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 115, No. 1, 1989, pp. 345-365.
3. Ishikawa, M., Yoshikawa, H., and Tanabe, T., "The Constitutive Model in Terms of Damage Tensor", *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures*, ASCE, 1985, pp. 93-103.
4. Chaboche, J. L., "Continuum Damage Mechanics: Present State and Future Trends", *Nuclear Engineering and Design* 105, 1987, pp. 19-33.
5. Lorrain, M. and Loland, K. E., "Damage Theory Applied to Concrete", *Fracture Mechanics of Concrete*, 1983, pp. 341-369.
6. Krajcinovic, D., "Continuous Damage Mechanics Revisited: Basic Concepts and Definitions", *Journal of Applied Mechanics*, 1985, pp. 829-834.
7. Ju, J.W., "On Energy-Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspect", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, No. 7, 1989, pp. 803-833.
8. Krajcinovic, D., "Statistic Aspects of the Continuous Damage Theory", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 18, No. 7, 1982, pp. 551-562.
9. Breyssse, D., "Probabilistic Formulation of Damage Mechanics Model for Plain Concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, No. 7, 1990, pp.

- 1489-1510.
10. Ju, J.W., "Isotropic and Anisotropic Damage Variables in Continuum Damage Mechanics", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, No. 12, 1990, pp. 2764-2770.
 11. Lee, H., Peng, K. and Wang, J., "An Anisotropic Damage Criterion for Deformation Instability and its Application to Forming Limit Analysis of Metal Plates", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 21, No. 5, 1985, pp. 1031-1054.
 12. Han, D.J. and Chen, W.F., "A Nonuniform Hardening Plasticity Model for Concrete Materials", *Journal of Mechanics of Materials*, Vol. 4, No. 4, 1985, pp. 283-302.
 13. Voyiadjis, G.Z. and Abu-Lebdeh, T.M., "Biaxial Testing of Repaired Concrete", *Journal of American Concrete Institute Materials*, Vol. 89, No. 6, 1992, pp. 564-573.
 14. Suaris, W., Ouyang, C., and Fernando, V., "Damage Model for Cyclic Loading of Concrete", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, No. 5, 1990, pp. 1020-1034.
 15. Kupfer, H., Hilsdorf, H.K., and Rusch, H., "Behavior of Concrete under Biaxial Stress", *Journal of American Concrete Institute*, Vol. 66, No. 6, 1969, pp. 656-666.
 16. 이기성, 변근주, "콘크리트의 연속체 손상모델", 학술발표회개요집, 대한토목학회, 1992, pp. 139-142.
 17. 변근주, 이기성, 김종우, 이주영, "탄성, 손상 및 소성을 고려한 콘크리트의 구성관계", 가톨릭학술발표회논문집, 한국콘크리트학회, 제 5권, 제 2호, 1993, pp. 190-194.
- (接受 : 1994. 2. 14)