

Mohr-Coulomb式을 사용한 흙의 構成모델

A Constitutive Model for Soil Using Mohr-Coulomb Criteria

李滄洙* · 李炳壽**

Lee, Hyung Soo · Lee, Byung Dae

Abstract

The soil on the behavior of the nonlinear elastic work-hardening plasticity has a variety of stress paths due to the state of soil and the test conditions. The soil with a specific volume v in principal stress space ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, and v) displays the shape of an irregular hexagonal pyramid with an end cap. With variations of v the size of the cap is changed but its shape remains unchanged and the movement of the cap is controlled by the increase or decrease of the plastic volumetric strain. By reflecting such a property of soil various cap models have been developed by researchers. In this thesis, a constitutive model of soil with a combination of the nonlinear elastic work-hardening plastic cap and the failure surfaces of Mohr-Coulomb (M-C cap model) has been developed. According to the the results of analyses using the work-hardening plastic cap model, the normally consolidated soil under shearing has experienced the work-hardening and plastic flow (movement of the cap). But in the shearing of the overconsolidated soil the elastic behavior is shown until the stress path has reached the failure surface and the cap does not move.

要 旨

彈塑性 變形硬化 舉動을 하는 흙은 土質의 狀態와 試驗條件에 따라 多樣한 應力經路를 갖는다. 體積比 v 인 흙을 主應力空間에서 表示하면 不規則六角形피라미드에 캡을 씌운 形狀이다. 캡은 v 값이 變하면 그 크기가 달라지나 形狀은 항상 닮은 꼴이며 塑性體積變形的 增減에 따라 移動이 결정된다. 이와 같은 土質特性을 반영하여 現在까지 많은 學者들이 캡모델을 研究發表하였으며 本 研究에서는 非線形 彈性 變形 硬化 塑性 캡과 Mohr-Coulomb의 破壞曲面을 接合한 흙의 構成 모델(M-C 캡모델)의 函數式을 誘導하였다. 變形硬化 塑性 캡모델을 使用한 解析의 結果에 의하면 正規壓密 狀態에서는 剪斷을 통한 硬化와 塑性흐름(캡의 移動)의 形狀을 보여주고 있으나 過壓密狀態의 剪斷에서는 破壞包絡線에 도달할 때까지 彈性舉動을 보이고 캡은 移動하지 않았다.

* 正會員 · 中央大學校 工科學 土木工學科 教授

** 正會員 · 眞華技術公社(株) 副社長

1. 序 論

土質材料도 金屬材料와 마찬가지로 彈性變形과 塑性變形的 거동을 한다. 土質試料의 等方壓縮試驗에서 正規壓密曲線은 塑性區間이고 膨脹線은 彈性區間에 該當된다. 試料의 應力狀態가 膨脹線에 있을 때 荷重을 除去하면 變形은 原狀回復되나 正規壓密曲線上에서 荷重이 除去될 때는 塑性變形이 發生된다.

塑性理論의 基本은 降伏, 硬化 및 흐름의 3段階로 說明된다. 應力狀態가 降伏曲線안에 있을 때는 彈性舉動을 하며, 降伏應力狀態가 되면 그 以後는 彈塑性舉動으로 바뀐다. 彈塑性 狀態로부터 荷重을 除去하면 塑性에 의한 永久變形이 남게 되고 이에 따라 降伏曲面이 擴張되며 이 현상을 變形硬化라고 한다. 흙構造體가 破壞에 이르기까지 應力履歷 또는 塑性變形에 따라 無數한 降伏曲面이 만들어질 수 있다.

全體變形率增分은 彈性變形率增分과 塑性變形率增分으로 構成된다. 彈性範圍內에서의 舉動은 彈性構成式으로 表示된다. 塑性舉動에 대한 數值解析을 위해 Drucker(1950)는 降伏曲面이 應力空間에서 凸面이고 降伏曲面과 塑性포텐셜面은 一致하며 變形軟化는 생기지 않는다고 假定하였다.

Chen and Baladi(1985)는 彈塑性變形硬化理論을 體系化하고 흙에 대한 캡型 構成모델을 誘導하였다. Chen and Baladi모델에서 極限破壞曲面式은 指數型으로 假定하고 變形硬化캡은 橢圓形으로 하였다. Chen *et al.*의 모델을 平面에 投影시킨 破壞面의 모양은 圓形이다.

여러 學者들의 實驗結果에 의하면 破壞曲面의 형상은 平面上에서 모서리가 없이 미끈한 六角形과 三角形의 中間形狀을 나타내며 Mohr-Coulomb과 Lade-Duncan의 中間에 있음이 確認되었다.

本 研究에서는 θ 에 따라 변하는 應力狀態를 나타낼 수 있도록 主應力空間에서 불규칙 六角形과 미끈한 六角形을 나타내는 Mohr-Coulomb 破壞曲面과 橢圓形의 變形硬化 캡모델을 조합한 彈塑性모델(M-C 캡모델)을 개발하고 기존의 Drucker-Prager 캡모델과 비교하여 M-C 캡모델의 有效性을 檢證하였다.

2. 應力不變量

n_i 平面에 作用하는 應力 벡터 T_i 는 힘의 平衡關係에서 다음과 같이 應力텐서로 表示된다.

$$T_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}n_j = \sigma_{in_i}$$

微小要素에 대한 모멘트의 平衡을 고려할 때 應力텐서 σ_{ij} 는 對稱이므로 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 가 된다. 物體內 任意點에는 3個의 主方向과 主應力이 存在한다.

$$T_i = \sigma_n = \sigma n_i \\ (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$$

여기서 δ_{ij} = Kronecker Delta로서 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{if } i=j \\ \delta_{ij} = 0 \quad \text{if } i \neq j$$

윗 式은 (n_1, n_2, n_3) 에 대한 3個의 線形方程式을 表示하는 것으로 다음과 같이 解를 求한다.

$$\det|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0$$

σ 에 대해서 풀면 다음과 같다.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

여기서 I_1, I_2 및 I_3 는 各各 第1, 第2 및 第3應力不變量이다.

應力텐서 σ_{ij} 는 靜水壓面 應力텐서와 軸差應力텐서의 組合으로 構成된다.

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + p\delta_{ij}$$

여기서 s_{ij} = 軸差應力텐서
 p = 平面主應力

s_{ij} 와 σ_{ij} 는 동일한 主應力軸을 갖는다.

主應力텐서와 같은 方法으로 軸差應力텐서를 구하면,

$$\det|s_{ij} - s\delta_{ij}| = 0 \\ s^3 - J_1s^2 - J_2s - J_3 = 0 \quad (2)$$

여기서 J_1, J_2 및 J_3 는 各各 第1, 第2 및 第3軸差應力不變量이다.

軸差應力에 관한 式(2)는 $J_1 = 0$ 이므로 다음과 같다.

$$s^3 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (3)$$

式(3)은 3次方程式으로서 直接解析이 쉽지 않다. 따라서 降伏과 塑性에 관한 數值解析을 便利하게 하기 위해서 'Lode' Angle $\theta^{(19)}$ 를 應力不變量에 導入한다.

三角函數式에서 $\sin 3\theta$ 를 求하면,

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\sin^3\theta - \frac{3}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 3\theta = 0$$

$s = \gamma \sin\theta$ 를 式(3)에 代入하면 다음과 같다.

$$\sin^3\theta - \frac{J_2}{\gamma^2} \sin\theta - \frac{J_3}{\gamma^3} = 0$$

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} J_2^{1/2}$$

$$\sin 3\theta = -\frac{4J_3}{\gamma^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (4)$$

第3不變量 J_3 를 θ 값으로 代替하여 다음과 같은 3個의 應力不變量을 求한다.

$$I_1, J_2, \theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \quad (5)$$

式(5)에서 I_1 은 平面內 모든 位置에서 一定한 값을 가지며, 第2不變量 J_2 는 π 平面에서 벡터의 크기로 表示되고 θ 는 平面에서 角度로 表示된다.

軸差主應力은 π 平面에서 $\frac{2}{3}\pi$ 의 간격으로 位置하게 되므로 $s = \gamma \sin\theta$ 를 정리하면 다음식이 誘導된다.

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{Bmatrix} \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin\theta \\ \sin(\theta + \frac{4}{3}\pi) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式(6)에 平面主應力을 더하여 主應力의 項으로도 表示할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \begin{Bmatrix} \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin\theta \\ \sin(\theta + \frac{4}{3}\pi) \end{Bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 이며 θ 의 範圍는 $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 이다.

3. 흙의 破壞基準

흙의 破壞基準(또는 降伏基準)은 破壞(또는 塑性變形)가 始作되는 지점에서의 應力水準을 나타내는 것으로 다음과 같은 一般式으로 表示할 수 있다.

$$f(\sigma_{ij}) = k(\kappa)$$

윗 式에서 k 는 硬化과라미터 κ 의 函數로서 實驗으로 決定되는 材料과라미터이다. 흙의 破壞基準은 主應力空間에서 等方性과 凸面條件이 成立하는 것으로 假定하고 있으며 座標軸의 方向과 無關하여 應力不變量의 函數로 表示된다. 특별히 言及하지 않는 한 應力에 관계하는 모든 記號는 有效應力으로 나타낸다.

3.1 Mohr-Coulomb의 破壞基準

흙의 剪斷強度를 나타내는 Mohr-Coulomb의 破壞基準은 簡單하고 正確한 長點때문에 實用的으로 가장 많이 사용되고 있으며 基本式은 다음과 같다 (Tension을 Positive로 함).

$$\tau = c - \sigma_n \tan\phi \quad (8)$$

式(8)은 破壞包絡線을 나타내는 式으로서 Mohr圓이 破壞包絡線에 接觸할 때 破壞된다. 이때 中間主應力은 破壞에 影響을 미치지 않는 것으로 看做한다.

Mohr-Coulomb式을 主應力의 項으로 表示하면 다음과 같다.

$$\sigma_1 \frac{(1 + \sin\phi)}{2c \cos\phi} - \sigma_3 \frac{(1 - \sin\phi)}{2c \cos\phi} = 1 \quad (9)$$

Mohr-Coulomb式을 $I_1, \sqrt{J_2}$ 및 θ 의 項으로 表示하면 다음과 같다.

$$f = \frac{1}{3} \sin\phi I_1 + \sqrt{J_2} (\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\theta \sin\phi) - c \cos\phi = 0$$

$$= \sqrt{J_2} + \frac{\left(\frac{1}{3} \sin \phi I_1 - c \cos \phi\right)}{\left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi\right)} \quad (10)$$

Mohr-Coulomb 기준은 主應力空間에서 不規則 六角形 피라밋形狀이고 包絡線은 直線이다.

Mohr-Coulomb 破壞基準은 中間主應力을 考慮하지 않는 點과 破壞包絡線을 直線으로 假定하여, 파라미터 ϕ 가 拘束壓의 크기에 따라 變하지 않고 一定한 것으로 假定하는 弱點이 있다. 그러나 實用的인 拘束壓의 範圍에서는 상당히 正確한 結果를 얻을 수 있으며 使用이 簡便하기 때문에 가장 많이 사용되는 破壞모델이다. Mohr-Coulomb 모델의 破壞面에는 모서리 때문에 解析하는데 어려움이 있으므로 羞恥 解析時 모서리에 대한 別途處理가 必要하다.

3.2 Drucker-Prager의 破壞基準

Drucker-Prager 모델은 靜水壓의 影響을 考慮하지 않는 von Mises의 矛盾點을 補完하여 修正한 破壞 모델로서 다음식과 같다.

$$f = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k = 0 \quad (11)$$

윗 식에서 α 와 k 는 材料常數이며 實驗으로 求한다. α 와 k 는 Mohr-Coulomb 기준의 c 및 ϕ 와 關聯 지어 表示할 수 있다.

Drucker-Prager式에서 $\alpha=0$ 으로 놓으면 von Mises 기준과 같아진다. Drucker-Prager 모델은 主應力空間에서 靜水壓軸($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$)을 中心軸으로 하는 圓錐形 이므로 破壞모델식은 θ 와 無關하다.

Drucker-Prager 破壞모델과 Mohr-Coulomb 破壞 모델의 두 꼭지점을 靜水壓軸에 일치시켰을 때 두 모델의 π 平面上에서의 모양을 比較하면 材料常數의 相關性을 求할 수 있다. 三軸壓縮條件에서 두 破壞 모델의 材料常數 關係式은 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (12)$$

三軸伸張條件에서 두 모델의 材料常數 關係式은 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}, \quad k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (13)$$

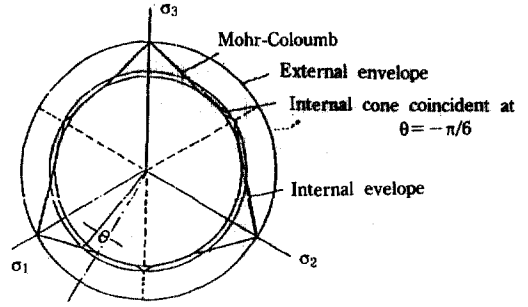


그림 1. Mohr-Coulomb and Drucker-Prager failure criteria

平面變形條件에서 材料常數關係式은 다음과 같다.^(4,11)

$$\alpha = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}, \quad k = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \quad (14)$$

Drucker-Prager 破壞모델은 壓縮과 伸張의 條件에 따라서 Mohr-Coulomb 破壞모델의 不規則六角形에 대한 外接圓(External Envelope), 內側圓(Internal Cone) 또는 內接圓(Internal Envelope)이 되고 π 平面上 나타낸 모양은 그림 1과 같다.

4. 變形硬化 塑性 캡 모델

4.1 캡 모델의 一般式

全體變形率增分은 彈性變形率增分과 塑性變形率增分の 合으로 構成된다.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (15)$$

彈性範圍內에서 等方性材料의 舉動은 다음과 같이 彈性構成式으로 表示한다.

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{dI_1}{9K(\sigma_{mn})} \delta_{ij} + \frac{1}{2G(\sigma_{mn})} ds_{ij} \quad (16)$$

여기서 $K(\sigma_{mn})$ = 彈性體積係數

$G(\sigma_{mn})$ = 彈性剪斷係數

材料의 塑性舉動에 관한 數值解析을 위해 Drucker는 다음과 같은 假定條件을 導入하였다.

- ① 降伏曲面(荷重函數)은 應力空間에서 凸面이다.
- ② 降伏曲面과 塑性포텐셜面은 一致한다(關聯흐름法則의 假定).

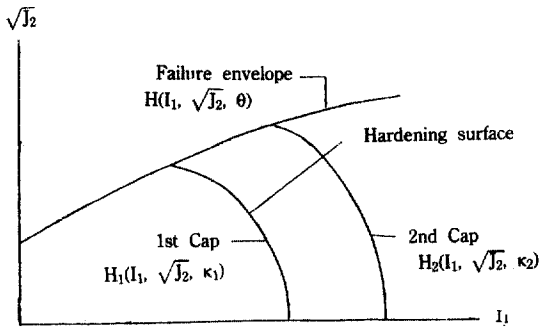


그림 2. Loading function for cap model

③ 변형軟化는 생기지 않는다(Dilatation現象 不考慮).

荷重函數는 다음과 같이 一般式으로 表示한다.

$$f(\sigma_{ij}, k) = 0 \quad (17)$$

윗式에서 \$k\$는 硬化과라미터이다.

彈塑性變形硬化모델에서 荷重函數의 式은 最大剪斷應力의 限界를 나타내는 極限破壞包絡線과 變形硬化曲面을 나타내는 캡으로 構成되며 그림 2와 같다.

荷重函數의 式(17)은 다음과 같이 나타낸다.

破壞包絡線 :

$$f = h(I_1, \sqrt{J_2}, \theta) = \sqrt{J_2} - F(I_1, \theta) = 0 \quad (18)$$

變形硬化 캡 :

$$f = H(I_1, \sqrt{J_2}, k) = \sqrt{J_2} - F(I_1, k) = 0 \quad (19)$$

硬化과라미터 \$k\$는 一般的으로 塑性體積變形率의 函數로 나타낸다.

$$k = g(\epsilon_{kk}^p) \quad (20)$$

式(19) 및 (20)은 變形硬化 캡이 主應力空間에서 固定이 아니고 塑性變形이 發生함에 따라 이동하는 것을 나타내고 있다.

Drucker(1951)는 變形硬化塑性材料에 대한 塑性變形率增分텐서를 다음과 같이 表示하였다.

$$d\epsilon_{ij}^p = \left\{ \begin{array}{l} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \text{ if } f=0 \text{ and } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \\ 0 \text{ if } f < 0, \text{ or } f=0 \text{ and } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \leq 0 \end{array} \right\} \quad (21)$$

윗式에서 \$f\$는 式(18) 또는 式(19)로 表示되고 荷重과라미터 \$d\lambda\$는 塑性變形發生시 陽(+)이 되는 比例係數이다.

4.2 應力-變形率의 增分式

4.2.1 彈性變形率增分텐서

等方性材料의 彈性舉動은 \$K\$와 \$G\$값에 의해서 支配된다. 만약 \$K\$와 \$G\$가 常數이면 式(16)은 Hook의 法則을 나타낸다. 彈性領域內에서 에너지 또는 應力履歷이 發生되지 않기 위해서는 材料의 彈性舉動이 應力經路에 無關하여야 한다. 이에 대한 必要充分條件을 充足시키기 위해서는 \$K\$ 및 \$G\$값이 다음과 같은 形態로 된다.

$$K = K(I_1, \epsilon_{ij}^p)$$

$$G = G(\sqrt{J_2}, \epsilon_{ij}^p)$$

\$K\$는 第1應力不變量과 塑性變形率의 函數이고 \$G\$는 第2軸差應力不變量과 塑性變形率의 函數이다.

式(16)의 彈性變形率增分式은 變形率과 應力增分텐서의 靜水壓成分과 軸差成分의 項으로 表示할 수 있다.

$$d\epsilon_{kk}^e = \frac{d I_1}{3K(I_1, \epsilon_{ij}^p)} \quad (22)$$

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{d\sigma_{ij}}{2G(\sqrt{J_2}, \epsilon_{ij}^p)} \quad (23)$$

4.2.2 塑性變形率增分텐서

塑性變形率增分텐서는 式(21)과 같고 荷重函數 \$f\$는 式(18) 또는 式(19)로 表示된다. 塑性舉動에 있어서도 彈性舉動과 마찬가지로 變形率과 應力의 靜水壓成分과 軸差成分으로 나타낼 수 있다.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}} \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \right] \quad (24)$$

式(24)의 양변에 \$\delta_{ij}\$를 곱하면 다음과 같다.

$$d\epsilon_{kk}^p = 3d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}} \quad (25)$$

塑性變形率增分텐서의 軸差成分은 다음과 같다.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} d\epsilon_{kk}^p \delta_{ij}$$

$$de_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \quad (26)$$

위의 식들을 사용하기 위해서는 荷重파라미터 $d\lambda$ 가 결정되어야 한다. 식(17)로부터 f 의 導函數를 구하면 다음과 같다.

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{KK}} d\sigma_{mm} + \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon_{KK}^P} d\epsilon_{mm}^P = 0$$

$$3K \frac{\partial f}{\partial \sigma_{KK}} (d\epsilon_{mm} - d\epsilon_{mm}^P) + 2G \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} (de_{ij} - de_{ij}^P) = - \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \epsilon_{KK}^P} d\epsilon_{mm}^P$$

$$3K \frac{\partial f}{\partial \sigma_{KK}} d\epsilon_{mm} + 2G \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} de_{ij} = d\lambda \left[9K \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{KK}} \right)^2 + 2G \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} - 3 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mm}} \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{KK}^P} \right]$$

$$d\lambda = \frac{3K \frac{\partial f}{\partial \sigma_{KK}} d\epsilon_{mm} + 2G \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} de_{ij}}{9K \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{KK}} \right)^2 + 2G \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} - 3 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mm}} \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{KK}^P}} \quad (27)$$

等方性材料인 경우에 식(27)을 應力不變量으로 表示하면 다음과 같다.

$$d\lambda = \frac{3K \frac{\partial f}{\partial I_1} d\epsilon_{KK} + G \left[\frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} + \frac{2}{3} \frac{s_k s_{kj}}{(J_3)^{2/3}} \frac{\partial f}{\partial (J_3)^{1/3}} \right] de_{ij}}{9K \left(\frac{\partial f}{\partial I_1} \right)^2 + G \left(\frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \right)^2 + 2G \frac{(J_3)^{1/3}}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial f}{\partial (J_3)^{1/3}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} + \frac{4G}{27} \frac{J_2^2}{J_3^{4/3}} \left[\frac{\partial f}{\partial (J_3)^{1/3}} \right]^2 - 3 \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{KK}^P}} \quad (28)$$

式(28)을 I_1 , $\sqrt{J_2}$ 및 θ 의 項으로 表示하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial (J_3)^{1/3}} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial (J_3)^{1/3}}$$

$\frac{\partial f}{\partial \theta}$ 를 Mohr-Coulomb으로부터 求하면,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\left(\frac{1}{3} \sin \phi I_1 - c \cos \phi \right) \left(\sin \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \sin \phi \right)}{\left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right)^2}$$

式(4)로부터 $\sin 3\theta = -3 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(J_3)^{1/3}}{(\sqrt{J_2})^2}$ 을 片微分

하여 정리하면

$$\frac{\partial \theta}{\partial (J_3)^{1/3}} = \frac{-3\sqrt{3}(J_3)^{1/3}}{\cos 3\theta \cdot 2(\sqrt{J_2})^3} = \frac{-3\sqrt{3}(J_3)^{1/3}}{2(\sqrt{J_2})^3 \cos 3\theta \cdot (\sqrt{J_3})^{1/3}} = \frac{\tan 3\theta}{(J_3)^{1/3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial (J_3)^{1/3}} = \frac{\tan 3\theta}{J_3^{1/3}} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

따라서 $d\lambda$ 는 다음과 같다.

$$d\lambda = \frac{3K \frac{\partial f}{\partial I_1} d\epsilon_{KK} + G \left[\frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{2\sqrt{3} s_{ij}}{\cos 3\theta \sqrt{J_2}} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] de_{ij}}{9K \left(\frac{\partial f}{\partial I_1} \right)^2 + G \left(\frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \right)^2 + \frac{2G \tan 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{G}{(\cos 3\theta \sqrt{J_2})^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 - 3 \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{KK}^P}} \quad (29)$$

5. 모델 適合方程式

工學的으로 取扱하는 흙의 狀態는 複雜하고 變化가 많으며 細粒의 粘土에서부터 粗粒모래에 이르기까지 그 工學的인 성질은 매우 다양하다. 또한 같은 材料라도 含水比量에 따른 影響과 荷重條件에 의한 變化도 심하다. 따라서 適切한 問題解決을 위해서는 對象이 되는 土質試料를 採取하여 現場狀態와 同一條件에서 試驗을 하고 그 材料와 荷重條件에 適合한 翳 모델을 決定해야 할 것이다.

5.1 Mohr-Coulomb 翳 모델

Drucker-Prager 또는 Chen *et al.*의 모델은 平面에 投影했을 때 破壞面이 θ 값에 關係없이 一定한 圓形으로 되어 試驗結果와 一致하지 않는 矛盾點이 있다. 따라서 本 研究에서는 이러한 矛盾點을 補完하기 위해서 土質材料에 가장 널리 사용되고 있는 Mohr-Coulomb의 破壞曲面과 變形硬化 翳를 연결한

모델의 函數式을 誘導하고 θ 에 따라서 變하는 應力狀態를 考慮하고자 한다.

本 모델은 等方性材料로 假定하며 Mohr-Coulomb의 破壞曲面式은 數值解析에 便利한 應力不變量 I_1, J_2 및 θ 項으로 表示한다.

$$f = h(I_1, \sqrt{J_2}, \theta) = \sqrt{J_2} + \frac{\left(\frac{1}{3} \sin\phi I_1 - c \cos\phi\right)}{\left(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\theta \sin\phi\right)} = 0$$

윗 式에서 보는 바와 같이 Mohr-Coulomb式은 三軸壓縮試驗으로부터 求할 수 있는 ϕ 및 c 에 關係되는 函數이므로 便利하다.

變形硬化캡은 橢圓形으로 Chen *et al.* 모델과 동일한 式을 使用한다.

$$f = H(I_1, \sqrt{J_2}, k) = \sqrt{J_2} - \frac{1}{R} \{ [X(k) - L(k)]^2 - [I_1 - L(k)]^2 \}^{1/2} = 0 \quad (30)$$

윗 式에서 $X(k)$ = 캡이 I_1 軸과 交하는 點의 座標 (I_1 값)

$$L(k) = \text{캡 中心의 } I_1 \text{ 座標} = \begin{cases} l & \text{if } l < 0 \\ 0 & \text{if } l \geq 0 \end{cases}$$

$(X-l)$ 는 다음과 같은 式으로 표시된다.

$$X-l = \frac{R \left(\frac{1}{3} \sin\phi l - c \cos\phi \right)}{\left(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\theta \sin\phi \right)} \quad (31)$$

式(31)은 Mohr-Coulomb 破壞모델인 六角形의 바깥쪽 꼭지點을 연결한 破壞包絡線(壓密側 包絡線)과 캡이 交하는 點에서 캡의 接線이 水平으로 된다는 假定下에 誘導되었다. 破壞曲面式은 三軸壓縮試驗으로부터 求할 수 있으며, 變形硬化캡은 施行錯誤法에 의하여 決定된다. Mohr-Coulomb 캡모델을 圖示하면 그림 3과 같다.

5.2 硬化函數

硬化파라미터 k 는 塑性體積變形率 ϵ_{kk}^p 의 履歷函數로서 다음과 같이 假定한다.⁽⁷⁾

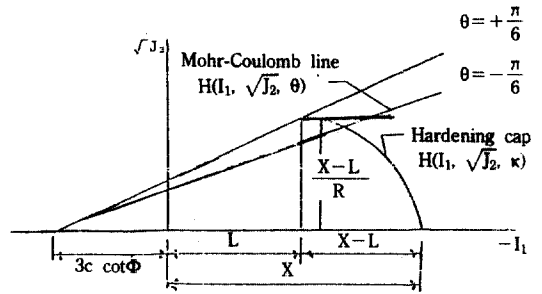


그림 3. Failure envelope and hardening surface of M-C cap model

$$k = \epsilon_{kk}^p = W \{ 1 - \exp[-DX(k)] \} \quad (32)$$

式(32)를 다시 整理하면

$$X(k) = -\frac{1}{D} \ln \left(1 - \frac{\epsilon_{kk}^p}{W} \right) = -\frac{1}{D} \ln \left(1 - \frac{k}{W} \right) \quad (33)$$

여기서 W, D = 材料常數

W 는 等方荷重下에서 材料가 受容할 수 있는 最大塑性體積壓縮으로 正義되며 間隙率 n 과 飽和度 S 에 關係된다.

$$W = n(1 - S) \quad (34)$$

5.3 彈性體積係數와 彈性剪斷係數

彈塑性모델에 使用되는 函數式과 파라미터는 試料의 室內試驗結果로부터 求한다. 모델의 彈性舉動을 決定하는 過程의 첫 단계는 應力-變形率關係資料에서 除荷部分을 使用한다. 變形硬化모델은 除荷初期에 대개 彈性舉動을 한다.

彈性範圍內에서 構成모델의 舉動은 K 와 G 에 의해서 支配된다. K 는 等方壓縮試驗에서 除荷時의 應力-變形率關係로부터 계산되고 G 는 三軸壓縮試驗에서 除荷時의 軸差應力($\sigma_z - \sigma_r$)과 軸差變形率($\epsilon_z - \epsilon_r$) 관계로부터 구한다. 一軸壓縮試驗의 除荷試料로부터 $\left(K + \frac{4}{3}G\right)$ 값을 誘導할 수 있다.

Chen *et al.*은 等方性 材料의 彈性體積係數를 다음과 같이 指數型으로 假定하였다.

$$K = \frac{K_1}{1 - K_1} [1 - K_1 \exp(-K_2 I_1)] \quad (35)$$

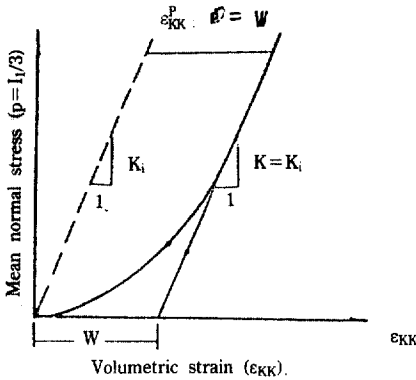


그림 4. Stress-strain relationship for isotropic compression test

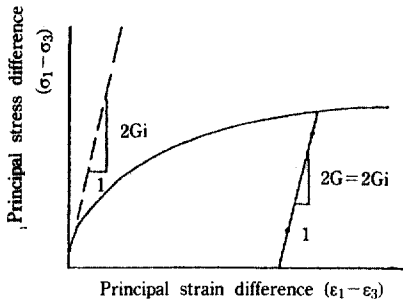


그림 5. Relationship for triaxial shear test

위 식에서 K_1, K_2 = 材料常數
 K_1 = 初期體積係數(Constant로 假定)

彈性剪斷係數는 그림 5에서 보는 바와 같이 三軸壓縮試驗으로부터 求한다.

Chen *et al.*은 彈性剪斷係數도 彈性體積係數와 같은 형태로 假定하였다.

$$G = \frac{G_1}{1 - G_1} [1 - G_1 \exp(-G_2 \sqrt{J_2})] \quad (36)$$

여기서 G_1, G_2 = 材料常數
 G_1 = 初期剪斷係數(Const로 假定)

計算을 簡便하게 하기 위해서 K 와 G 를 常數로 假定하기로 한다.

6. 應力과 變形率의 舉動

M-C 캡모델을 檢證하기 위해서 Chen *et al.*(1985)

이 개발한 Drucker-Prager 캡모델과 比較하였다.

Drucker-Prager 破壞모델과 Mohr-Coulomb 破壞모델의 두 꼭지점을 靜水壓軸에 일치시키고 平面上에서 두 모델을 나타내면 壓縮과 平面變形條件에서 Mohr-Coulomb破壞曲面上에 대응하는 Drucker-Prager의 材料常數 α 와 k 의 값이 결정되며 이 경우에 대한 두 모델의 應力과 變形率 關係를 比較하며 M-C 캡모델의 妥當性을 檢證하였다.

應力不變量 θ 는 $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 範圍內에서 荷重의

條件등에 의해서 결정되는 값이며 構造物의 解析을 다루지 않는 現단계로서는 실제로 θ 의 變化에 따른 應力-變形率關係를 檢토했었다. 따라서 本 研究에서는 θ 를 $0^\circ, \pm 10^\circ, \pm 20^\circ$ 및 $\pm 30^\circ$ 로 인위적으로 變化시켜 變하는 應力狀態에 對應하는 M-C 캡모델의 應力과 變形率의 舉動을 考察하였다.

또한 變形硬化 塑性캡모델에 대한 檢證을 통하여 캡의 존재와 塑性變形에 따른 캡의 移動樣相 및 剪斷에 의한 體積變化 등 혹의 가지고 있는 特性을 檢토했었다.

本 事例研究에서 사용한 土質試料의 材料常數는 다음과 같다.

土質常數	$\phi = 20^\circ, C = 0.1 \text{ MPa}$
橢圓形 캡	$R = 2.0, D = 0.5(\text{MPa})^{-1}, W = 0.5$
硬化파라미터	$k = \epsilon_{KK}^p, \epsilon_{KK, \max}^p = 0.15$
體積係數	$K_1 = 670 \text{ MPa}, K_1 = 0.77, K_2 = 0.1 (\text{MPa})^{-1}$
剪斷係數	$G_1 = 50 \text{ MPa}, G_1 = 0.77, G_2 = 0.433 (\text{MPa})^{-1}$

本 事例研究에서는 正規壓密試料에 대한 等方壓密과 剪斷時의 舉動을 分析하였다.

가. 解析 1

等方壓密 舉動의 分析으로 試驗段階는 다음과 같다.

$p = 0.5 \text{ MPa}$ 까지 等方壓密을 한 후 $p = 0.0$ 까지 除荷

$p = 1.0 \text{ MPa}$ 까지 再載荷 후 $p = 0.0$ 까지 除荷

$p = 5.0 \text{ MPa}$ 까지 再載荷 후 $p = 0.0$ 까지 除荷

解析 1의 結果는 그림 6과 같다.

그림 6에서 보면 體積變形率(ϵ_{KK})과 平均主應力(p)의 관계가 잘 나타나 있으며, 특히 體積變形率의 非線形硬化와 除荷時의 回復되지 않는 塑性體積變

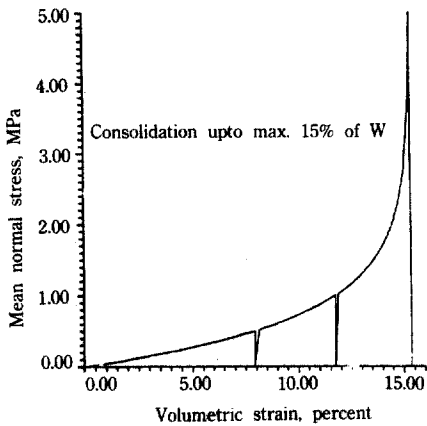


그림 6. ϵ_{kk}^p vs. $p(=1/3)$ curve

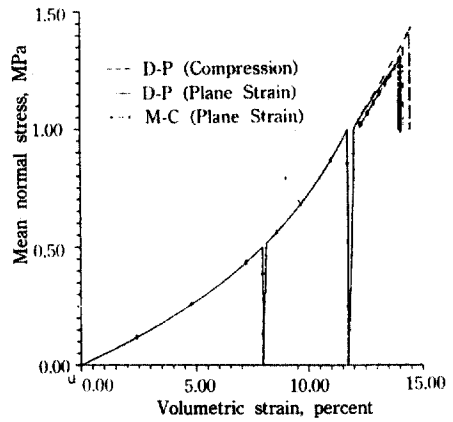


그림 8. ϵ_{kk} vs. p curve

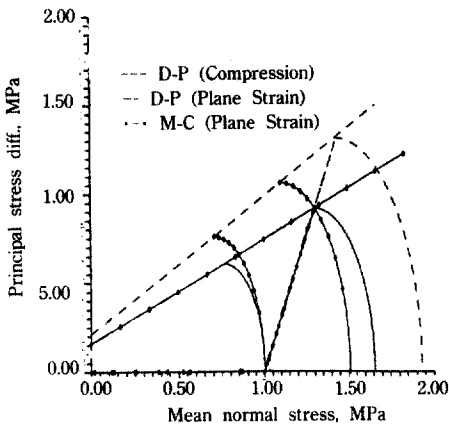


그림 7. p vs. $\sigma_z - \sigma_r$ curve

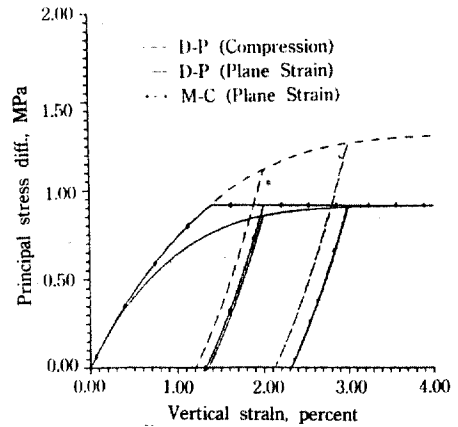


그림 9. $\epsilon_z - \epsilon_r$ vs. $\sigma_z - \sigma_r$ curve

形率의 存在도 보여주고 있다.

마지막應力經路를 보면最大塑性體積變形率 ($\epsilon_{kk,max}$)은 0.15를 넘지 못하고 있다. 이는 당연한 결과로서 실제의 試驗結果를 적절한 硬化函數로 표현해 주므로서 그 試料가 갖고 있는 硬化特性和 最大塑性體積變形率을 制御할 수 있는 모델의 提示가 可能할 것이다.

나. 解析 2

三軸壓縮時의 剪斷舉動分析으로 試驗段階는 다음과 같다.

$p=0.5$ MPa까지 等方壓縮을 한 후 $p=0.0$ 까지 除荷

$p=1.0$ MPa까지 再載荷 후 $p=0.0$ 까지 除荷

$p=1.0$ MPa까지 再載荷 후 다음과 같이 剪斷을 한다.

$\epsilon_z - \epsilon_r = 2\%$ 까지 剪斷 후 $\sigma_z - \sigma_r = 0.0$ 으로 除荷

$\epsilon_z - \epsilon_r = 3\%$ 까지 剪斷 후 $\sigma_z - \sigma_r = 0.0$ 으로 除荷

$\epsilon_z - \epsilon_r = 4\%$ 까지 剪斷

解析 2의 結果는 그림 7~11과 같다.

그림 7은 軸差應力($\sigma_z - \sigma_r = \sqrt{3}J_2$)과 平均主應力의 軸上에서 破壞曲面과 갭의 모양으로 나타내고 있다. $p=1.0$ MPa의 正規壓縮 상태에서 $\epsilon_z - \epsilon_r = 2\%$ 로 剪斷시키는 동안 갭이 이동하는 硬化흐름을 나타내고 있다. 除荷 후 다시 剪斷을 가하면 초기의 過壓縮狀態에서는 彈性舉動의 直線經路를 택하나 $\epsilon_z - \epsilon_r$ 가 2%를 지나면 正規壓縮狀態로 되면서 塑性흐름과 갭의 이동이 생긴다. 이 과정에서 M-C갭은 三軸壓縮條件에 따른 갭의 형상으로 결정되나 D-P 갭에서는 三軸壓縮과 平面變形條件 등 應力經路에 따라 갭의 모양이 다르게 나타난다.

그림 8은 等方壓縮과 剪斷과정의 $\epsilon_{kk} - p$ 관계를 나타내고 있으며 剪斷에 의한 體積變形率의 增加를

알 수 있다.

그림 9는正規壓密狀態에서 剪斷을 통한 硬化 및 塑性흐름을 보여주고 있다. 剪斷을 시작할 때 試料는 正規壓密狀態에 있으므로 곧바로 硬化와 塑性흐름이 일어나고 除荷했을 때 塑性變形을 남긴다. 다시 荷重을 增加시키면 초기에는 彈性舉動을 하나 降伏點을 지나서는 다시 塑性흐름이 일어난다.

그림 10과 그림 11은 θ 에 따라서 변하는 M-C 캡모델의 舉動을 나타내고 있다. 壓縮인 경우는 M-C 캡과 D-P 캡의 舉動이 같으며, 平面變形條件에서는 M-C 캡은 D-P 캡 壓縮條件과 같이 출발하며 D-P 캡 平面變形條件에 수렴하는 거동을 보이고 있다.

θ 값을 변화시켰을 때 $\theta = \pm 30^\circ$ 는 壓縮과 伸張의 경우이며 $\theta = \pm 0^\circ, \pm 10^\circ$ 및 $\pm 20^\circ$ 의 경우는 壓縮과 平面變形條件의 中間에 位置하고 있다. θ 값에 대한

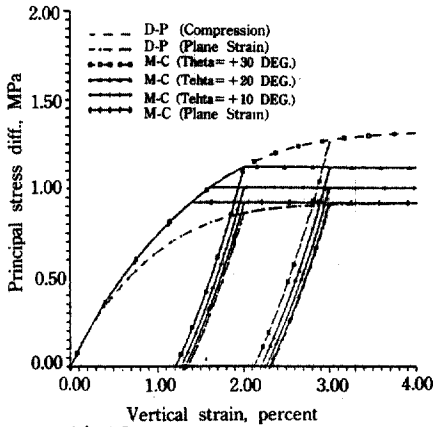


그림 10. $\epsilon_z - \epsilon_r$ vs. $\sigma_z - \sigma_r$ curve

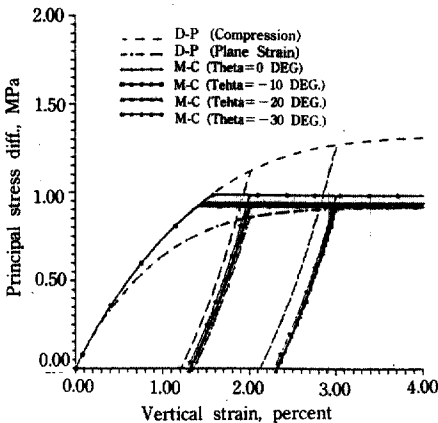


그림 11. $\epsilon_z - \epsilon_r$ vs. $\sigma_z - \sigma_r$ curve

變形率 關係는 平面變形條件에 접근해 있으며 이는 π 平面에 投影한 M-C 破壞曲面上에서도 알 수 있다.

7. 結 論

彈塑性 變形硬化 舉動을 하는 흙의 특성을 반영하여 Mohr-Coulomb破壞曲面上에 硬化캡을 접합시킨 彈塑性構成모델(M-C 캡모델)을 誘導하고 기존의 Drucker-Prager 캡모델과 비교한 바 M-C 캡모델의 유효함이 검증되었으며 다음과 같은 結論을 얻었다.

1. 흙의 構成모델은 應力不變量 $I_1, \sqrt{J_2}$ 및 θ 의 項으로 表示하는 것이 數值解析을 위해 便利하다.

2. Chen *et al.*이 개발한 彈塑性 구성모델 또는 D-P 캡모델은 π 平面에 投影시킨 破壞面의 모양이 圓形으로 θ 값에 無關하나 M-C 캡모델은 θ 에 따라 변하는 應力經路에 따른 흙의 舉動을 나타낼 수 있다.

3. 等方壓縮條件에서 體積變形率(ϵ_{KK})의 非線形硬化와 除荷시 回復되지 않는 塑性體積變形率을 確認할 수 있었다.

4. 正規壓密狀態에서는 剪斷을 통한 硬化와 塑性흐름(캡의 이동)의 현상을 나타내며, 過壓密狀態의 剪斷에서는 試料가 破壞包絡線에 到達할 때까지 彈性舉動을 보이며 橢圓形캡은 이동하지 않는다.

5. 硬化캡모델은 一般土質이 가지고 있는 여러가지 特性 즉 變形率-硬化 現象 등을 잘 나타내 주고 있다.

6. 以上の 例題를 통하여 檢討한 바와 같이 本論文에서 제시한 硬化塑性解析法은 土質 및 基礎分野에서 信賴할 만한 正確성을 갖고 있음을 確認하였다.

參考文獻

1. Atkison, J.H. and Bransby, P.L., *The Mechanics of Soil-An Introduction to Critical State Soil Mechanics*. McGraw-Hill. Maidenhead. 1978, pp. 375.
2. Baladi, G.Y. and Schuster, S.H., *A Cap Model with Strain-Dependent Elastic Moudli*. In: *Constitutive Laws for Engineering Materials; Theory and Application*, Vol. 1, Elsevier science publishing company, Inc., New York, 1987, pp. 363-370.
3. Bishop, A.W., "The Strength of Soils as Enginee-

- ring Materials", *Geotechnique* (London, England), Vol. 16. No. 2. 1966, pp. 92-130.
4. Chen, W.F., and Saleeb, A.F., "Constitutive Equations for Engineering Materials", Vol. 1. Elasticity and Modeling, Wiley-Interscience. New York, N. Y., 1982, pp. 580.
 5. Chen, W.F., and Saleeb, A.F., "Constitutive Equations for Engineering Materials", Vol. 2, Plasticity and Modeling, Wiley-Interscience. New York, N. Y., in press, 1986.
 6. Chen, W.F. and Baladi, G.Y., *Soil Plasticity: Theory and Implementation*, Elsevier Science Publishing Company, Inc., New York, N.Y., 1985.
 7. Desai, C.S., and Christian, J.T., Editors, *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, McGraw-Hill Book company, Inc., New York, 1977.
 8. DiMaggio, F.L. and Sandler, I.S., "Material Model for Granular Soils", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 97, No. EM3, 1971, pp. 935-950.
 9. Drucker, D.C., "Some Implication of Work Hardening and Ideal Plasticity", *Q. Appl. Math.*, Vol. 7, No. 4, 1950, pp. 411-418.
 10. Drucker, D.C., "A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations", *Proc. First U.S. National Congress of Applied Mechanics*, 1951, pp. 487-491.
 11. Drucker, D.C., and Prager, W., "Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design", *Q. Appl. Math.*, Vol. 10, No. 2, 1952, pp. 157-175.
 12. Drucker, D.C., "On Uniqueness in the Theory of Plasticity", *Q. Appl. Math.*, Vol. 14, 1956, pp. 35-42.
 13. Drucker, D.C., Gibson, R.E., and Henkel, D.J., "Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity", *Trans.*, ASCE, Vol. 122, 1957, pp. 338-346.
 14. Huang, T.K., and Chen, W.F., "Simple Procedure for Determining Cap-Plasticity-Model Parameters", *J. Geotech. Eng. Div.*, ASCE, Vol. 116, No. 3, pp. 1990, 492-513.
 15. Koiter, W.T., "Stress-Strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-Plastic Material with Singular Yield Surface", *Quart. Appl. Math.*, Vol. 11, pp. 350-354.
 16. Lade, P.V., and Duncan, J.M., "Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 101, No. GT10, October, 1975, pp. 1037-1053.
 17. Lade, P.V., and Musante, H.M., "Failure Conditions in Sand and Remolded Clay", *Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Tokyo, Vol. 1. 1977, pp. 181-186.
 18. Lade, P.V., "Elasto-Plastic Stress-Strain Theory Normally Consolidated Clay", *Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Meth. Geomech.*, Aschen, Germany, Vol. 4. 1979, pp. 1325-1337.
 19. Nayak, G.G. and Zienkiewicz, O.C., "Convenient form of Stress Invariants for Plasticity", *Journ. of the Struct. Div.*, Proc. of ASCE, pp. 1972, April, pp. 949-953.
 20. Owen, D.R.F. and Hinton, E., *Finite Elements in Plasticity Theory and Practice*. Pineridge press limited, Swansea, U.K. 1980.
 21. Parry, R.H.G. Strength and Seformation of Clay. PhD Thesis, University of London, 1956.
 22. Roscoe, K.H. and Burand, J.B., "On the Generalized Stress-Strain Behavior of 'Wet' Clay", In, J. Heyman and F. Leckie (Editors), *Engineering Plasticity*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1968, pp. 535-609.
 23. Sandler, I.S., DiMaggio, F.L. and Baladi, G.Y., "Generalized Cap Model for Geological Materials", *J. Geotechn. Eng. Div.*, ASCE, Vol. 102, No. GT7, 1976, pp. 683-699.
 24. Sandler, I.S. and Baron, M.L., "Recent Development in the Constitutive Modeling of Geological Materials", *Proc. 3rd Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics*, Aschen, Germany, 1979, pp. 363-376.
 25. Schofield, A.N. and Wroth, P., 1968. *Critical State Soil Mechanics*, McGraw-Hill, New York, N.Y., pp. 310.

(接受：1993. 12. 7)