

線形 變斷面 I-型 部材의 自由振動

Free Vibrations of Linearly Tapered I-Beams

李庸友* · 閔庚周**

Lee, Yong Woo · Min, Kyung Ju

Abstract

The closed forms of consistent mass matrix with rotational inertia matrix are developed for free vibration analysis in space structures containing linearly tapered members with cross section of thin-walled I-sections. The exact displacement functions are used for formulating mass matrices. The very small slopes of the tapered member are used in usual practice, such that the series expansion forms of these are also developed to avoid numerical failure in vibration analysis. Significant improvements of accuracy and efficiency of free vibration analysis are achieved by using the mass matrices developed in this study. Frequencies of free vibration of tapered members are compared with solutions based upon stepped representation of beam element in the ANSYS. The mass matrices presented in this study can be used for the free vibration analysis of tapered and prismatic members.

요 지

線形變斷面 I-形 部材의 3次元 空間에서의 固有振動解析을 위하여 回轉慣性도 포함하는 컨시스턴트 質量行列을 유도하였다. 誘導過程에서 精確한 形狀函數를 사용했다. 일반적으로 많이 사용되는 變斷面 部材의 傾斜는 매우 작으므로 '整形式'으로 표현된 行列을 사용하여 變斷面 部材를 포함하는 構造物을 해석할 때에 신빙성 없는 결과를 얻게 된다. 이러한 數值的 誤謬를 피하기 위하여 '級數式'을 유도했다. 變斷面 部材의 構造物을 해석하기 위하여 본 연구에서 유도된 質量行列을 사용하여 구한 固有振動數와 變斷面 部材를 均一斷面의 塔形態로 표현하여 ANSYS에서 구한 固有振動數를 비교하여 본 연구 결과 효율성과 精確성이 증진된 것을 확인하였다. 본 연구에서 유도된 質量行列은 變斷面 部材와 均一斷面 部材의 自由振動解析에 사용할 수 있다.

1. 序 論

현대의 土木 또는 建築 構造物들은 自體荷重의

輕量化, 효율적인 構造 體系, 材料의 經濟的인 이용 및 美的인 요인을 고려하여 變斷面 部材(tapered members)가 자주 사용되고 있다. 變斷面 I-型 부재는 제작이 용이하고 휨강성이 강하므로 공장구조 등 Gable 구조에 많이 사용되고 있다.

* 檀國大學校 土木工學科 教授

** 檀國大學校 土木工學科 講師

Gallagher 등은 動的 상태에 대한 彈性安定解析을 위한 剛度行列과 均一보의 形狀函數를 이용하고 線形變斷面 部材의 幾何學的 특성들을 對數函數로 개략화하여 구한 安定 및 自由振動의 해석 결과치와 塔形態로 해석한 결과를 비교하였으며,⁽¹⁾ Gupta는 정확한 形狀函數들을 이용하여 다양한 斷面形狀에 대하여 보 要素의 質量行列을 유도하여 橫方向 自由振動解析을 하였다.⁽²⁾ Santana는 平面 뼈대 構造의 設計를 위하여 有限要素法으로 線形 變斷面 部材의 動的解析을 하였으며,⁽⁵⁾ warping을 포함하는 薄壁部材에 대한 自由振動解析이 Wekezer에 의하여 연구되었다.⁽⁶⁾

構造解析에 자주 사용되는 ANSYS(Engineering Analysis System)의 tapered member는 面積과 慣性모멘트를 補正하여 均一斷面 部材로 해석한다. 위의 方法들은 質量行列과 剛度行列들에 正確性이 결여되므로 계산의 精確도를 높이기 위하여는 많은 分割 要素數를 요구하게 된다.

線形變斷面 部材의 힘-變位 관계를 고려하여 Lee⁽³⁾가 유도한 線形變斷面 部材를 위한 形狀函數로부터 回轉慣性을 포함하는 컨시스턴트 質量行列을 유도하였으므로 質量行列의 精確도를 높일 수 있었으며, 이 質量行列은 均一斷面 部材에도 수정없이 사용할 수 있다. 본 연구에서 유도된 質量行列과 문헌⁽³⁾에서 유사한 방법으로 유도된 線形變斷面 部材의 線形剛度行列을 사용하여 線形變斷面 部材를 포함하는 構造物의 自由振動解析을 하면 보다 신뢰할 수 있는 固有振動數를 효율적으로 구할 수 있을 것이다.

2. 컨시스턴트 質量行列

定積分을 나타내는 기호를 '定積分記號'라 하고 定積分 결과를 '整形式(closed form)'이라 규정하고 '整形式'을 級數로 展開한 식을 '級數式(series form)'이라 규정한다.

質量行列 要素의 표현은 均一斷面 部材와는 달리 표현이 매우 복잡하므로 편의상 定積分을 '定積分記號'로 다음과 같다.

$$T_1 = \int_0^1 \frac{d\xi}{I_x} \quad U_1 = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{I_x} \quad V_1 = \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{I_x}$$

$$T_i = \int_0^1 \frac{d\xi}{1+\beta\xi} \quad U_i = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{1+\beta\xi} \quad V_i = \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{1+\beta\xi}$$

$$F_{10} = \int_0^1 f_{10} \phi d\xi \quad F_{100} = \int_0^1 f_{10}^2 \phi d\xi \quad F_{11} = \int_0^1 f_{11} \phi d\xi$$

$$F_{111} = \int_0^1 f_{11}^2 \phi d\xi \quad F_{112} = \int_0^1 f_{11} f_{12} \phi d\xi \quad F_{114} = \int_0^1 f_{11} f_{14} \phi d\xi$$

$$F_{12} = \int_0^1 f_{12} \phi d\xi \quad F_{122} = \int_0^1 f_{12}^2 \phi d\xi \quad F_{124} = \int_0^1 f_{12} f_{14} \phi d\xi$$

$$F_{11} = \int_0^1 f_{11} \phi d\xi \quad F_{111} = \int_0^1 f_{11}^2 \phi d\xi \quad F_{112} = \int_0^1 f_{11} f_{12} \phi d\xi$$

$$F_{114} = \int_0^1 f_{11} f_{14} \phi d\xi \quad F_{12} = \int_0^1 f_{12} \phi d\xi \quad F_{122} = \int_0^1 f_{12}^2 \phi d\xi$$

$$F_{124} = \int_0^1 f_{12} f_{14} \phi d\xi \quad F_{14} = \int_0^1 f_{14} \phi d\xi \quad F_{144} = \int_0^1 f_{14}^2 \phi d\xi$$

$$F_{IM3} = \int_0^1 I_{px} d\xi \quad F_{I3} = \int_0^1 f_{13}^2 I_{px} d\xi \quad F_{I33} = \int_0^1 f_{13}^3 I_{px} d\xi$$

$$R_{M11} = \int_0^1 I_{xz} d\xi \quad R_{11} = \int_0^1 h_{11} I_{xz} d\xi \quad R_{111} = \int_0^1 h_{11}^2 I_{xz} d\xi$$

$$R_{112} = \int_0^1 h_{11} h_{12} I_{xz} d\xi \quad R_{12} = \int_0^1 h_{12} I_{xz} d\xi \quad R_{122} = \int_0^1 h_{12}^2 I_{xz} d\xi$$

$$R_{11} = \int_0^1 h_{11} I_{y\xi} d\xi \quad R_{111} = \int_0^1 h_{11}^2 I_{y\xi} d\xi \quad R_{112} = \int_0^1 h_{11} h_{12} I_{y\xi} d\xi$$

$$R_{12} = \int_0^1 h_{12} I_{y\xi} d\xi \quad R_{122} = \int_0^1 h_{12}^2 I_{y\xi} d\xi$$

여기서,

$$f_{11} = \frac{(2+A)B + (A+2B)(1+\alpha\xi)}{2\alpha^3 BQ}$$

$$\text{Ln}\left(\frac{2A+2B-Q+(2+A+B)(1+\alpha\xi)}{2A+2B-Q+(2+A+B)(1+\alpha)}\right)$$

$$- \frac{1+\alpha\xi}{2\alpha^3 B} \text{Ln}\left(\frac{(1+\alpha\xi)^2(1+A+B)}{(1+\alpha\xi)^2+A(1+\alpha\xi)+B}\right)$$

$$- \frac{1+\alpha\xi}{2\alpha^3} \text{Ln}\left(\frac{(1+\alpha\xi)^2+A(1+\alpha\xi)+B}{1+A+B}\right)$$

$$f_{12} = \frac{2B+A(1+\alpha\xi)}{2\alpha^2 BQ}$$

$$\text{Ln}\left(\frac{2A+2B-Q+(2+A+B)(1+\alpha\xi)}{2A+2B-Q+(2+A+B)(1+\alpha)}\right)$$

$$- \frac{1+\alpha\xi}{2\alpha^2 B} \text{Ln}\left(\frac{(1+\alpha\xi)^2(1+A+B)}{(1+\alpha\xi)^2+A(1+\alpha\xi)+B}\right)$$

$$f_{10} = \frac{\text{Ln}(1+\alpha'\xi)}{\text{Ln}(1+\alpha')} \quad f_{13} = \frac{\text{Ln}(1+v\xi)}{\text{Ln}(1+v)} \quad f_{14} = \xi$$

$$h_{11} = \frac{df_{11}}{d\xi} \quad h_{12} = \frac{df_{12}}{d\xi} \quad h_{11} = \frac{df_{11}}{d\xi}$$

$$Q = \sqrt{A^2 - 4B}, \quad \phi = 1 + \alpha'\xi$$

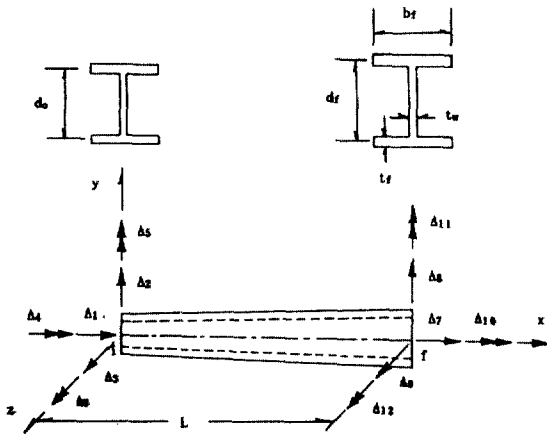


그림 1. 보 요소

$f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}$ 은 變斷面의 形狀函數를 유도하는데 나타나는 函數로서 各各 軸力, 剪斷力, 純粹휨, 비틀림에 관련된 特性曲線이다. 添字 I과 i은 主·副軸에 관련되었음을 나타내고 있다. 定積分記號의 ‘整形式’ 및 ‘級數式’의 표현은 문헌⁽⁷⁾을 참고하였다.

部材의 相對傾斜 α 와 頂의 斷面의 높이 d_x 를 그림 1를 참고하여 다음과 같이 규정하였다.

$$\alpha = \frac{d_f - d_0}{d_0} \quad (1)$$

$$d_x = d_0 + \alpha x = d_0(1 + \alpha \xi), \quad \xi = x/L \quad (2)$$

節點의 變位를 軸方向은 Δ_1, Δ_7 , 橫方向은 $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_8, \Delta_9$, 휨變位는 $\Delta_5, \Delta_6, \Delta_{11}, \Delta_{12}$, 비틀림 變位는 Δ_4, Δ_{10} 로 각각 나타내었다.

變斷面 部材의 動的舉動을 해석하기 위하여 構造物에 發生될 수 있는 座掘, 剪斷變形, 減衰振動 및 뒹(warping)의 영향은 고려하지 않았다.

2.1 形狀函數

變斷面 I-型 部材의 形狀函數는 문헌⁽³⁾에서 휨-變位 관계를 고려하여 유도된 것을 사용하였으며 部材의 휨에 의하여 發生되는 回轉慣性 質量行列을 유도하기 위하여 휨에 관련되는 形狀函數들을 部材 軸方向에 관하여 微分하여 구하였다.

이들 形狀函數를 方向 成分과 變位 별로 정리하여 놓은 것이 표 1이며, $u(\xi)$ 列의 $h_{N11}, h_{N12}, h_{N11}$ 과 h_{N12} 로 표현된 부분들은 回轉質量行列을 구하는데 사용된다.

形狀函數들은 應力과 變位의 관계로부터 유도되었으므로 다른 曲線式 보다는 상당히 정확할 것이므로 變斷面 部材의 線形剛度 行列, 安定解析과 非線形解析을 위한 幾何學的 剛度行列과 振動解析을 위한 質量行列 등을 보다 正確하게 유도할 수 있으며 構造解析에 유용하게 사용할 수 있을 것으로 思料된다.

2.2 컨시스턴트 質量行列

컨시스턴트 質量行列은 假想일의 原理(principle of virtual work)로부터 内部 假想 變形 에너지(internal virtual strain energy)와 外部 假想일(external virtual work)이 같다는 조건으로부터 컨시스턴트 質量行列 要素 m_{ij} 는 다음 식으로부터 유도할 수 있다.^(4,7)

$$m_{ij} = \rho L \int_0^1 \psi_i \psi_j A_x d\xi + \rho \int_0^1 I_x \left(\frac{\psi_i}{d\xi} \right) \left(\frac{\psi_j}{d\xi} \right) d\xi \quad (3)$$

여기서, ρ, A_x, I_x 는 各各 質量(density of material), 斷面積, 斷面2次모멘트이다. 표 1에서 각각의 自由度에 해당하는 形狀函數와 부록 A에서 斷面의 性質들을 찾아 식 (3)에 대입하여 積分하면 컨시스턴트 質量行列을 유도할 수 있으며 그 결과를 수록한 것이 표 2이다. 이때 비틀림방향은 質點運動의 方向을 고려하여 식 (3)을 적용하여야 한다. 主方向의 경우는 定式化 표현이 불가능하였으므로 數值積分으로 質量行列 要素를 구하는데 사용하였다.

3. 適用例

變斷面 部材의 動的解析에 필요로 하는 剛度行列은 Lee⁽³⁾가 유도한 것을 사용하였으며 形狀函數로부터 Castigliano의 定理로부터 剛度行列을 쉽게 유도할 수 있을 것이다. 材料는 鋼材로서 彈性係數 $E = 2.04 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 質量 $\rho = 7.9974 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}^4$, 포와송比 $\nu = 0.3$ 으로 각각 가정하였다.

變斷面 部材에 대한 固有振動數의 精確한 값은 알 수 없으므로 본 방법에서 구한 固有振動數가 一定誤差率(相對誤差:1/10000) 內에 들어올 때까지 部材를 分割하여 얻은 값을 편의상 精確한 값으로 보았다.

3.1 외팔보의 해석

變斷面 I-形 部材의 컨시스턴트 質量行列의 精確

표 1. 變斷面 I-型 斷面의 形狀函數

	$u(\xi)$	$v(\xi)$	$w(\xi)$
1	$1 - f_{10}$		
2	$\frac{1}{D_1} (T_1 h_{11} + U_1 h_{12}) + 1$	$\frac{1}{D_1} (T_1 f_{11} + U_1 f_{12}) + 1$	
3	$\frac{1}{D_1} (T_1 h_{11} + U_1 h_{12})$		$\frac{1}{D_1} (T_1 f_{11} + U_1 f_{12}) + 1$
4	$1 - f_{13}$		
5	$\frac{L}{D_1} (T_1 h_{11} + U_1 h_{12}) + 1$		$\frac{L}{D_1} (T_1 f_{11} + U_1 f_{12}) + \xi L$
6	$\frac{L}{D_1} (T_1 h_{11} + U_1 h_{12} + 1)$	$\frac{L}{D_1} (T_1 f_{11} + U_1 f_{12}) + \xi$	
7	f_{10}		
8	$-\frac{1}{D_1} (T_1 h_{11} + U_1 h_{12})$	$-\frac{1}{D_1} (T_1 f_{11} + U_1 f_{12})$	
9	$\frac{1}{D_1} (T_1 h_{11} + U_1 h_{12})$		$\frac{1}{D_1} (T_1 f_{11} + U_1 f_{12})$
10	f_{13}		
11	$\frac{L}{D_1} [(T_1 - U_1)h_{11} + (U_1 - V_1)h_{12}]$		$-\frac{L}{D_1} [(T_1 - U_1)f_{11} + (U_1 - V_1)f_{12}]$
12	$\frac{L}{D_1} [(T_1 - U_1)h_{11} + (U_1 - V_1)h_{12}]$	$-\frac{L}{D_1} [(T_1 - U_1)f_{11} + (U_1 - V_1)f_{12}]$	

여기서, $D_1 = T_1 V_1 - U_1^2$, $D_2 = T_2 V_2 - U_2^2$

성을 비교하기 위하여 Gupta⁽²⁾ 論文의 解析例를 선택하여 그림 1에서 左端 拘束, 右端 自由端인 외팔 보로서 $L=180"$, $d_o=21.8"$, $d_f=8.3"$, $b_f=8"$, $t_f=0.7"$, $t_w=0.45"$ 이다.

표 3은 결과의 비교를 위해 본 논문에서 유도된 質量行列을 이용한 64개 分割 要素의 결과를 기준으로 하여 誤差率을 구하였다. 主方向의 경우 본 방법의 1개 요소가 ANSYS의 4개 요소보다 정확하였다. 副方向의 경우는 두 방법 모두에서 수렴성이 主方向에 비하여 상대적으로 좋은데 이는 副方向에서 斷面性質의 변화가 작기 때문인 것으로 생각된다. 軸과 비틀에 대한 振動數는 ANSYS의 결과가 본

방법보다 약간 좋은 수렴성을 보여주고 있다. 이에 대한 분석은 그림 2(b)의 고찰에서 이뤄진다.

部材傾斜의 크기에 따르는 오차율을 비교하기 위하여 같은 조건의 외팔 보를 末端의 높이만 변화시켜 가면서 해석하고 1개 要素로 나누었을 때의 固有振動數를 계산하여 16요소에서 얻은 固有振動數를 기준으로 相對誤差를 나타낸 것이 그림 2이다. 그림 2(a)는 主·副 방향에서의 오차율을 圖示한 것으로 본 방법은 部材傾斜에 관계 없이 誤差를 거의 나타내지 않으나 ANSYS는 部材傾斜이 '0' 즉 均一斷面일 때를 중심으로 部材傾斜에 비례하여 誤差率 이 커짐을 알 수 있다. 따라서 ANSYS로 變斷面

표 2. I-形 變斷面 部材의 컨시스턴트 質量行列*

$$\begin{aligned}
 m_{1,1} &= \rho A_0 L (\alpha' / 2 - 2F_{10} + F_{100}) & m_{1,7} &= \rho A_0 L (F_{10} - F_{100}) & m_{7,7} &= \rho A_0 L F_{100} \\
 m_{2,2} &= \rho A_0 L \left(\frac{1}{D_1^2} \{T_1^2 F_{111} + 2T_1 U_1 F_{112} + U_1^2 F_{122} + 2D_1 (T_1 F_{11} + U_1 F_{12})\} + 1 + \alpha' / 2 \right) \\
 &+ \frac{\rho I_z}{L D_1^2} (T_1^2 R_{111} + 2T_1 U_1 R_{112} + U_1^2 R_{122}) \\
 m_{2,6} &= \rho A_0 L \left(\frac{L}{D_1^2} \{T_1 U_1 F_{111} + (T_1 V_1 + U_1^2) F_{112} + U_1 V_1 F_{122} + D_1 (T_1 F_{114} + U_1 F_{124} + U_1 F_{11} + V_1 F_{12})\} + L F_{14} \right) \\
 &+ \frac{\rho I_z}{D_1^2} (T_1 U_1 R_{111} + (U_1^2 + T_1 V_1) R_{112} + D_1 T_1 R_{11} + U_1 V_1 R_{122} + D_1 U_1 R_{12}) \\
 m_{2,8} &= -\rho A_0 L \left(\frac{1}{D_1^2} \{T_1^2 F_{111} + 2T_1 U_1 F_{112} + U_1^2 F_{122} + D_1 (T_1 F_{11} + U_1 F_{12})\} \right) - \frac{\rho I_z}{L D_1^2} (T_1^2 R_{111} + 2T_1 U_1 R_{112} + U_1^2 R_{122}) \\
 m_{2,12} &= \rho A_0 L \left(\frac{L}{D_1^2} \{T_1 (T_1 - U_1) F_{111} + (2T_1 U_1 - T_1 V_1 - U_1^2) F_{112} + U_1 (U_1 - V_1) F_{122} + D_1 L (T_1 - U_1) F_{11} + (U_1 - V_1) F_{12}\} \right) \\
 &+ \frac{\rho I_z}{D_1^2} (T_1 (T_1 - U_1) R_{111} + (2T_1 U_1 - U_1^2 - T_1 V_1) R_{112} + U_1 (U_1 - V_1) R_{122}) \\
 m_{3,3} &= \rho A_0 L \left(\frac{1}{D_1^2} \{T_1^2 F_{111} + 2T_1 U_1 F_{112} + U_1^2 F_{122} + 2D_1 (T_1 F_{11} + U_1 F_{12})\} + 1 + \alpha' / 2 \right) + \frac{\rho I_y}{L D_1^2} (T_1^2 R_{111} + 2T_1 U_1 R_{112} + U_1^2 R_{122}) \\
 m_{3,5} &= -\rho A_0 L \left(\frac{L}{D_1^2} \{T_1 U_1 F_{111} + (T_1 V_1 + U_1^2) F_{112} + U_1 V_1 F_{122} + D_1 (T_1 F_{114} + U_1 F_{124} + U_1 F_{11} + V_1 F_{12})\} + L F_{14} \right) \\
 &- \frac{\rho I_y}{D_1^2} (T_1 U_1 R_{111} + (U_1^2 + T_1 V_1) R_{112} + D_1 T_1 R_{11} + U_1 V_1 R_{122} + D_1 U_1 R_{12}) \\
 m_{3,9} &= \rho A_0 L \left(\frac{1}{D_1^2} \{T_1^2 F_{111} + 2T_1 U_1 F_{112} + U_1^2 F_{122} + D_1 (T_1 F_{11} + U_1 F_{12})\} \right) + \frac{\rho I_y}{L D_1^2} (T_1^2 R_{111} + 2T_1 U_1 R_{112} + U_1^2 R_{122}) \\
 m_{3,11} &= -\rho A_0 L \left(\frac{L}{D_1^2} \{T_1 (T_1 - U_1) F_{111} + (2T_1 U_1 - T_1 V_1 - U_1^2) F_{112} + U_1 (U_1 - V_1) F_{122} + D_1 L (T_1 - U_1) F_{11} + (U_1 - V_1) F_{12}\} \right) \\
 &- \frac{\rho I_y}{D_1^2} ((T_1^2 - T_1 U_1) R_{111} + (2T_1 U_1 - U_1^2 - T_1 V_1) R_{112} + (U_1 - V_1) R_{122}) \\
 m_{4,4} &= \rho I_{P0} L (F_{M13} - 2F_{13} + F_{133}) & m_{4,10} &= \rho I_{P0} L (F_{13} - F_{133}) & m_{10,10} &= \rho I_{P0} L F_{133} \\
 m_{5,5} &= \rho A_0 L \left(\frac{L^2}{D_1^2} \{U_1^2 F_{111} + 2U_1 V_1 F_{112} + V_1^2 F_{122} + 2D_1 (U_1 F_{114} + V_1 F_{124})\} \right) \\
 &+ \frac{\rho I_y L}{D_1^2} (U_1^2 R_{M11} + U_1^2 R_{111} + 2U_1 V_1 R_{112} + 2D_1 U_1 R_{11} + V_1^2 R_{122} + 2D_1 V_1 R_{12}) \\
 m_{5,9} &= \rho A_0 L \left(\frac{L}{D_1^2} \{U_1 T_1 F_{111} + (U_1^2 + T_1 V_1) F_{112} + U_1 V_1 F_{122} + D_1 L (T_1 F_{114} + U_1 F_{124})\} \right) \\
 &+ \frac{\rho I_y}{D_1^2} (T_1 U_1 R_{111} + (U_1^2 + T_1 V_1) R_{112} + D_1 T_1 R_{11} + U_1 V_1 R_{122} + D_1 U_1 R_{12})
 \end{aligned}$$

$$m_{5,11} = \rho A_0 L \left(\frac{L^2}{D_1^2} \{U_i(T_i - U_i)F_{111} + (U_i^2 - 2U_iV_i + T_iV_i)F_{112} + V_i(U_i - V_i)F_{122} + D_1\{(T_i - U_i)F_{114} + (U_i - V_i)F_{124}\}\} \right)$$

$$+ \frac{\rho I_y}{D_1^2} \left(U_i(T_i - U_i)R_{111} + (U_i^2 + T_iV_i - 2U_iV_i)R_{112} + D_1(T_i - U_i)R_{11} + V_i(U_i - V_i)R_{122} + D_1(U_i - V_i)R_{12} \right)$$

$$m_{6,6} = \rho A_0 L \left(\frac{L^2}{D_1^2} \{U_i^2F_{111} + 2U_iV_iF_{112} + V_i^2F_{122} + 2D_1(U_iF_{114} + V_iF_{124}) + L_2F_{144}\} \right)$$

$$+ \frac{\rho I_2 L}{D_{12}} (D_1^2 R_{M11} + U_i^2 R_{111} + 2U_iV_i R_{112} + 2D_1U_i R_{11} + V_i R_{122} + 2D_1V_i R_{12})$$

$$m_{6,8} = -\rho A_0 L \left(\frac{L}{D_1^2} \{U_i T_i F_{111} + (U_i^2 + T_i V_i) F_{112} + U_i V_i F_{122} + D_1 L (T_i F_{114} + U_i F_{124})\} \right)$$

$$- \frac{\rho I_2}{D_1^2} (T_i U_i R_{111} + (U_i^2 + T_i V_i) R_{112} + D_1 T_i R_{11} + U_i V_i R_{122} + D_1 U_i R_{12})$$

$$m_{6,12} = \rho A_0 L \left(\frac{L^2}{D_1^2} \{U_i(T_i - U_i)F_{111} + (U_i^2 - 2U_iV_i + T_iV_i)F_{112} + V_i(U_i - V_i)F_{122}\} + D_1\{(T_i - U_i)F_{114} + (U_i - V_i)F_{124}\} \right)$$

$$+ \frac{\rho I_2 L}{D_1^2} (T_i U_i - U_i^2) R_{111} + (U_i^2 + T_i V_i - 2U_i V_i) R_{112} + D_1 (T_i - U_i) R_{11} + (U_i V_i - V_i^2) R_{122} + D_1 (U_i - V_i) R_{12}$$

$$m_{8,8} = \rho A_0 L \left(\frac{1}{D_1^2} \{U_i(T_i^2 F_{111} + 2T_i U_i F_{112} + U_i^2 F_{122})\} + \frac{\rho I_2}{L D_1^2} (T_i^2 R_{111} + 2T_i U_i R_{112} + U_i^2 R_{122}) \right)$$

$$m_{8,12} = -\rho A_0 L \left(\frac{L}{D_1^2} \{T_i(T_i - U_i)F_{111} + (2T_i U_i - T_i V_i - U_i^2)F_{112} + U_i(U_i - V_i)F_{122}\} \right)$$

$$- \frac{\rho I_2}{D_1^2} ((T_i^2 - T_i U_i)R_{111} + (2T_i U_i - U_i^2 - T_i V_i)R_{112} + (U_i^2 - U_i V_i)R_{122})$$

$$m_{9,9} = \rho A_0 L \left(\frac{1}{D_1^2} (T_i^2 F_{111} + 2T_i U_i F_{112} + U_i^2 F_{122}) \right) - \frac{\rho I_y}{L D_1^2} (T_i^2 R_{111} + 2T_i U_i R_{112} + U_i^2 R_{122})$$

$$m_{9,11} = \rho A_0 L \left(\frac{L}{D_1^2} \{T_i(T_i - U_i)F_{111} + (2T_i U_i - T_i V_i - U_i^2)F_{112} + U_i(U_i - V_i)F_{122}\} \right)$$

$$+ \frac{\rho I_y}{D_1^2} \left(-T_i(T_i - U_i)R_{111} + (2T_i U_i - U_i^2 - T_i V_i)R_{112} + U_i(U_i - V_i)R_{122} \right)$$

$$m_{11,11} = \rho A_0 L \left(\frac{L^2}{D_1^2} \{(T_i - U_i)^2 F_{111} + 2(T_i U_i - T_i V_i - U_i^2 + U_i V_i)F_{112} + (U_i - V_i)^2 F_{122}\} \right)$$

$$+ \frac{\rho I_y L}{D_1^2} \left((T_i - U_i)^2 R_{111} + 2(T_i - U_i)(U_i - V_i)R_{112} + (U_i - V_i)^2 R_{122} \right)$$

$$m_{12,12} = \rho A_0 L \left(\frac{L^2}{D_1^2} \{(T_i - U_i)^2 F_{111} + 2(T_i U_i - T_i V_i - U_i^2 + U_i V_i)F_{112} + (U_i - V_i)^2 F_{122}\} \right)$$

$$+ \frac{\rho I_2 L}{D_1^2} \left((T_i - U_i)^2 R_{111} + 2(T_i - U_i)(U_i - V_i)R_{112} + (U_i - V_i)^2 R_{122} \right)$$

註 行列은 對稱行列이며 규정되어 있지 않은 行列 要素는 零이다.

표 3. 외팔보의 1st mode의 收斂性*

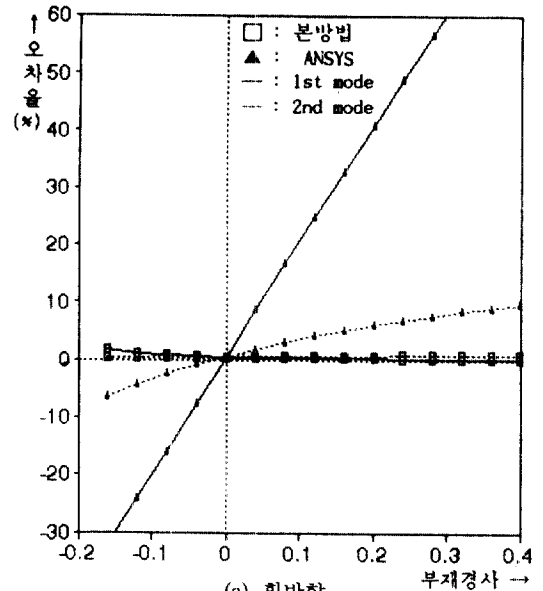
방 향	요 소 수	고유진동수(cycle/sec)			
		본방법	오차 %	ANSYS	오차 %
부 축 방 향	1	6.83	-0.54	6.47	4.75
	2	6.80	-0.05	6.70	1.42
	3	6.79	-0.01	6.75	0.65
	4	6.79	0.00	6.77	0.37
	5	6.79	0.00	6.78	0.24
10	6.79	0.00	6.79	0.06	
비 틀 방 향	1	13.05	-18.30	9.93	9.98
	2	11.40	-3.30	10.80	2.08
	3	11.19	-1.44	10.94	0.83
	4	11.12	-0.81	10.98	0.44
	5	11.09	-0.52	11.00	0.27
10	11.05	-0.12	11.03	0.06	
주 축 방 향	1	30.89	-1.10	23.19	24.08
	2	30.60	-0.14	28.42	6.97
	3	30.56	-0.02	29.57	3.21
	4	30.55	0.00	29.99	1.83
	5	30.55	0.00	30.19	1.18
10	30.55	0.00	30.46	0.29	
축 방 향	1	337.83	-12.34	309.62	-2.96
	2	309.71	-2.99	304.76	-1.34
	3	304.67	-1.31	302.68	-0.65
	4	302.92	-0.73	301.88	-0.39
	5	302.12	-0.47	301.50	-0.26
10	301.05	-0.11	300.97	-0.08	

*각 방향별의 1st mode

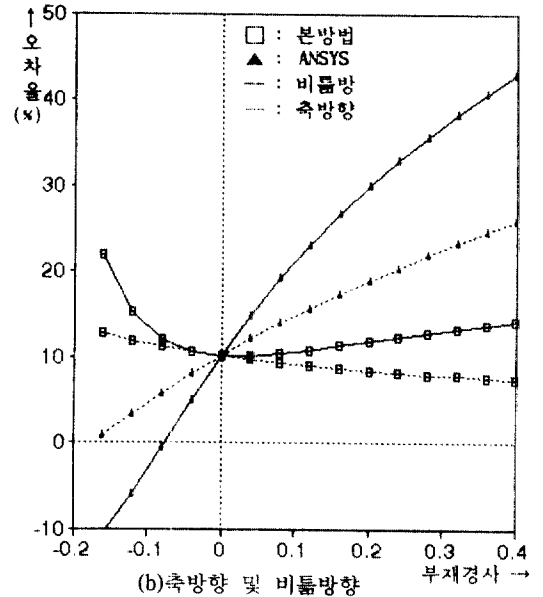
오차율 $\times (1 - \text{진동수} / \text{본방법 64 요소}) \times 100\%$

部材의 自由振動 解析을 할때는 部材傾斜에 따라 部材를 나누는 分割數를 달리하여야 할 것이다.

그림 2(b)는 軸·비틀 방향에서의 1개 요소에서 구한 固有振動數의 誤差率을 圖示한 것으로 本 方法은 오차율이 10% 내외에서 部材 傾斜에 큰 영향을 받지 않음을 알 수 있으며 ANSYS는 앞에서 휨방향의 振動과 유사하다. 여기서 특히 유의할 것은 표 3의 고찰에서 ANSYS의 결과가 본 방법보다 좋은 결과를 보여주고 있다고 하였는데 ANSYS는 斷面의 性質을 보정할 필요가 없는 均一斷面 部材에서보다도 본 적용예와 같은 部材傾斜이 낮은 일부 구간에서 더 좋은 결과를 나타냈을 뿐이며 일관성이 없음을 알 수 있다.



(a) 휨방향



(b) 축방향 및 비틀방향

그림 2. 部材傾斜에 따른 收斂性 比較

部材傾斜 $a=0$ 인 경우 즉 均一斷面 部材에서는 본 방법과 ANSYS의 결과 및 解析의 方法인 正解의 결과는 같았다. 이는 본 연구에서 유도한 一致性 質量行列을 가지고 均一斷面 部材의 自由振動 解析에 그대로 적용시킬 수 있음을 의미한다.

본 예제에서 단부의 구속조건을 달리하면서 즉 單純보, 固定端(fixed end) 回轉端(hinged end)으로

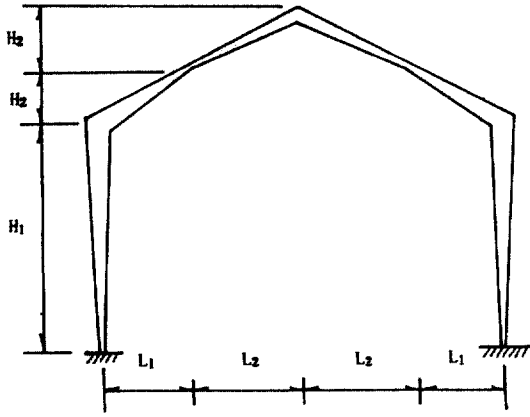


그림 3. 뿔대 構造

바꾸어 해석한 결과도 앞의 예와 유사한 결과를 나타냄을 알 수 있었으며, 본 논문에서는 이들에 대한 고찰은 생략한다.

Gupta⁽²⁾의 결과와 본 방법과의 결과를 비교한 한 결과 실제적인 차이는 거의 없었다. 그러나, Gupta의 결과는 主方向에 대하여 斷面의 性質의 표현에서 사용되는 係數인 m과 n의 분母에 $\text{Log}(d_i/d_o)$ 가 포함되어 部材傾斜가 작아지거나 보다 정확한 결과 값을 얻고자 部材를 많은 要素로 分割하는 경우 또는 相對傾斜가 작아지게 될 경우 좋은 결과를 기대할 수 없을 것이다.

일반적으로 座掘解析이나 自由振動 解析에서 정확도에 상대적으로 많은 영향을 미치는 것은 剛度行列로 알려져 있다. 그러나 문헌⁽⁷⁾의 연구결과 변 단면 부재의 자유진동 해석에서는 질량행렬의 영향도 剛度行列의 영향과 마찬가지로 크게 나타남이 밝혀졌다.

3.2 平面 뿔대 構造物

뿔대 構造物의 自由振動解析에 사용된 變斷面 I-形 部材의 모델로 그림 3.7과 같은 뿔대 構造로서, 폭 $b_f=16\text{in.}$, $t_f=1^{3/4}\text{in.}$, $t_w=1^{1/16}\text{in.}$, 높은 斷面의 높이 $d_o=24\text{in.}$, 낮은 斷面의 높이 $d_i=8\text{in.}$, 部材의 길이는 그림 3.6에서 $H_1=1000\text{cm}$, $H_2=300\text{cm}$, $L_1=L_2=500\text{cm}$ 인 대칭 變斷面 뿔대 構造物이다.

결과의 비교를 위해 본 논문에서 유도된 컨시스턴트 質量行列을 이용하여 한部材를 16개 分割要素로부터 해석하여 얻은 固有振動數를 기준으로 하여 誤差率을 구하였다. 표 4에서 보는 바와 같이 본

표 4. 뿔대 構造의 收斂性

방 향	요 소 수	고유진동수(cycle/sec)			
		본방법	오차 %	ANSYS	오차 %
1	1	8.78	0.14	8.69	1.18
	2	8.78	0.10	8.80	-0.09
	4	8.78	0.05	8.80	-0.13
	8	8.79	0.02	8.79	-0.06
	16	8.79	0.00	8.79	-0.03
2	1	33.08	-0.22	31.88	3.42
	2	32.99	0.06	32.57	1.34
	4	32.99	0.04	32.92	0.25
	8	33.00	0.01	33.00	0.03
	16	33.01	0.00	33.01	-0.00
3	1	71.01	-2.29	81.09	-16.82
	2	69.42	-0.00	70.76	-1.93
	4	69.38	0.05	69.77	-0.50
	8	69.40	0.02	69.53	-0.15
	16	69.42	0.00	69.46	-0.06
4	1	102.11	-2.89	124.43	-25.38
	2	99.28	-0.03	103.47	-4.26
	4	99.17	0.06	100.60	-1.37
	8	99.21	0.03	99.64	-0.40
	16	99.24	0.00	99.37	-0.13

오차율 = $(1 - \text{진동수}/\text{본방법16요소}) \times 100\%$

요소수: 1개 부재의 분할수

방법을 ANSYS의 결과와 비교하면 본 방법으로 구한 1개 分割要素로 계산된 固有振動數가 ANSYS의 4 分割要素보다 정확함을 알 수 있었으며 이는 앞의 보 해석 결과와 유사하다.

4. 結 論

컨시스턴트 質量行列을 應力-變形의 관계를 만족시키는 形狀函數로부터 變斷面 I-형 部材의 컨시스턴트 質量行列을 유도하여 自由振動解析을 하였다.

본 연구에서 유도된 質量行列들을 사용하여 自由振動解析한 결과는 ANSYS로 自由振動解析한 결과보다 1/4 정도의 分割 要素에서 대체로 더 정확한 固有振動數를 구할 수 있었다. 部材를 分割하는 데에 따라 行列의 크기와 實行時間이 幾何級數의으로 增加됨을 고려할 때 유도된 컨시스턴트 質量行列의 正確性 및 效率性을 확인할 수 있었다.

變斷面 部材에 대한 自由振動解析을 한 결과 일정한 分割數에서 ANSYS의 결과는 部材傾斜에 따라 수렴성이 달라지나 본 연구에서 유도한 컨시스턴트 質量行列을 사용하면 部材傾斜에 관계없이 수렴성이 일정하며 그 절대치 또한 작았다. 이는 본 연구에서 유도한 컨시스턴트 質量行列이 그만큼 신뢰도가 높은 것이라 할 수 있을 것이다.

유도된 컨시스턴트 質量行列 要素의 계산에 사용되는 定積分記號의 표현에서 '級數式'은 均一斷面 部材에도 修正없이 사용할 수 있었으며, 결과 또한 일치하였다. 이는 變斷面 部材를 위하여 컨시스턴트 質量行列을 유도하였지만 均一斷面 部材에도 적용할 수 있으므로 質量行列의 일반성을 입증하는 것이라 할 수 있다.

본 연구에서는 비틀에 관련된 뒀의 영향을 고려하지 않았으므로 이에 대한 연구가 진행되어야 할 것이다.

參考文獻

1. Gallagher, R.H. and Lee, C.-H., "Matrix Dynamic and Instability Analysis with Non-Uniform Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, 1970, pp. 265-275.
2. Gupta, A.K., *Vibration Analysis of Linearly Tapered Beams Using Frequency-Dependent Stiffness and Mass Matrices for*, Ph.D. Dissertation., Utah State University, 1975.
3. Lee, Y.-W., *New Element for Analysis of Space Frames with Tapered Members*, Ph.D. Dissertation., University of Nebraska, Jan., 1983.
4. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structures Analysis*, McGraw-Hill, 1968.
5. Santana, B.W., *An Interactive Computer-Aided Dy-*

amic Analysis and Design System for Elastic Steel Plane Frames, Ph.D. Dissertation., Utah State University, 1975.

6. Wekezer, J.W., "Vibrational Analysis of Thin-Walled Bars with Open Cross Sections", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 115, No. 12, 1990, pp. 2965-2978.
7. 閔庚周, "線形變斷面部材의 自由振動", 博士學位論文, 檀國大學校, 1992.
8. 李庸友, 閔庚周, "線形變斷面圓形管의 自由振動", *大韓土木學會論文集*, 第11卷 第4號 1991. 12.
(接受: 1993. 3. 31)

附 錄

A. 變斷面 I-型 部材의 斷面 性質

$$A_x = A_0(1 + \alpha\xi), \quad I_{zx} = I_w I_{z\xi}$$

$$I_{zy} = (1 + \alpha\xi)[(1 + \alpha\xi)^2 + A(1 + \alpha\xi) + B], \quad I_{yx} = I_{yo} I_{y\xi}$$

$$I_{y\xi} = (1 + \beta\xi), \quad K_x = K_o(1 + \nu\xi)$$

여기서, $A_0 = 2b_F t_F + (d_o - t_F)t_w$

$$I_{yo} = \frac{t_F b_F^3}{6} + \frac{(d_o - t_F)t_w^3}{12} \quad I_w = \frac{b_F t_o^3}{12} (1 + \mu)$$

$$K_o = \frac{(d_o - t_F)t_w^3 - 2b_F b_F^3}{3} \quad A = \frac{3t_F}{d_o} \left(\frac{2b_F}{t_w} - 1 \right)$$

$$B = 3 \left(\frac{t_F}{d_o} \right)^2, \quad \alpha' = \frac{\alpha d_o t_w}{A_o}, \quad \beta = \frac{\alpha d_o t_w^3}{I_{yo}}, \quad \nu = \frac{\alpha d_o t_w^3}{K_o}$$

$$\mu = \frac{AB}{9(1+\alpha)[(1+\alpha)^2 + A(1+\alpha) + B]} \quad \alpha > 0 \text{ 일 때,}$$

$$\mu = \frac{AB}{9(1+A+B)} \quad -1 < \alpha \leq 0 \text{ 일 때,}$$