

Accelerated Newton-Raphson 방법에 의한 대형구조물의 자유진동수와 모우드형의 결정

Determination of the Natural Frequencies and Mode Shapes of Large Structures by Accelerated Newton-Raphson Method

김만철* · 이인원**

Kim, Man Cheol · Lee, In Won

Abstract

For the design of various structures, the dynamic analysis of the structures is essential. Eigenproblem must be first computed when the mode superposition method is used in the dynamic analysis of the structures. However, since most of solution time is spent on calculating the eigenpairs of the system, the development of more efficient solution method is required. The purpose of this paper is to present the efficient solution method that combines the Robinson-Lee's method and accelerated Newton-Raphson method to improve numerical stability and increase convergence. Effectiveness of the proposed method is verified through numerical examples.

요 지

각종 구조물의 설계에 있어서 동적해석은 필수적이다. 이러한 구조물의 동적해석에 모우드 중첩법을 사용할 경우 고유치문제의 해석이 선행되어야 한다. 그러나 동적해석에 있어서 대부분의 노력, 즉 시간은 고유치와 그에 대응하는 고유벡터를 구하기 위하여 사용되기 때문에 보다 효율적인 고유치해법의 개발이 요구된다. 본 논문은 수치적 불안정성을 해소하고 수렴성을 향상시킴으로써 전체 해석시간을 줄이기 위해 Robinson-Lee 방법에 accelerated Newton-Raphson 방법을 적용한 고유치해법을 제시하였다. 제안방법의 효율성은 몇가지의 수치해석을 통해서 증명하였다.

1. 서 론

공학의 많은 분야에서 동하중(dynamic load)을 받는 구조물의 해석은 매우 중요하게 고려되고 있다. 특히 비행기, 우주선, 선박, 기계 부품과 지진하중을 받는 뼈대구조물 등의 설계에는 동적해석(dynamic

analysis)의 선행이 필수적이다. 이러한 구조물의 동적해석에 모우드 중첩법(mode superposition method)^(1,2)을 사용할 경우 반드시 고유치문제(eigenproblem)의 해석이 선행되어야 하며, 동적해석에 있어서 대부분의 노력, 즉 시간은 고유치와 그에 대응하는 고유벡터를 구하기 위하여 사용된다. 이것은 고유치문제에 대한 연구를 활성화시키는 촉매역할을 해왔으며, 그 결과 해석시간을 단축시킨 많은 해법

* 정희원 · 한국과학기술원 토목공학과 박사과정
** 정희원 · 한국과학기술원 토목공학과 교수

들이 개발되었다.⁽³⁻¹⁵⁾

고유치문제를 해석하기 위해 개발된 많은 해법들은 다음과 같이 분류할 수 있다. 첫째, 근사적인 고유치와 고유벡터를 구하는 해법이다. 이 해법에는 static condensation,⁽⁴⁻⁷⁾ dynamic condensation,⁽⁴⁻⁷⁾ Rayleigh-Ritz 방법,⁽⁴⁻⁷⁾ component mode synthesis⁽⁴⁻⁷⁾ 그리고 Lanczos 방법⁽⁹⁻¹¹⁾ 등이 있다. 둘째, 정확한 고유치와 고유벡터를 구하는 해법이다. 이 해법에는 vector iteration 방법,⁽⁴⁻⁷⁾ transformation 방법,⁽⁴⁻⁷⁾ Sturm sequence 성질을 이용한 방법⁽⁴⁻⁷⁾ 그리고 polynomial iteration 방법⁽⁴⁻⁷⁾ 등이 있다. 대부분의 고유치해석에서는 정확한 소수의 저차고유치와 그에 대응하는 고유벡터를 필요로하기 때문에 이들 해법들은 고유치해석에 비효율적이다. 오늘날 고유치해석을 위해 가장 많이 사용하고 있는 해법은 위의 해법들의 장점을 이용한 determinant search 방법^(4,8,12)과 subspace iteration 방법^(3,8,13-15)이다.

determinant search 방법은 polynomial iteration 방법, Sturm sequence 성질을 이용한 방법 그리고 vector iteration 방법으로 이루어져 있다. 이 해법은 각 반복단계마다 새로운 행렬분해(matrix decomposition)를 필요로하기 때문에 따폭이 큰 시스템의 고유치해석에는 비효율적이다. subspace iteration 방법은 simultaneous inverse iteration 방법과 Rayleigh-Ritz 방법으로 이루어져 있다. 이 해법은 고유치문제의 해석에 가장 효율적이고 안정된 해법이지만 아래와 같은 몇가지의 단점을 가지고 있다.^(14,15)

첫째: 수렴성을 증가시키기 위하여 shift를 가진 inverse iteration을 이용했을 경우 shift값이 정확한 고유치에 가까우면 수치적 불안정성을 갖게 된다.

둘째: 많은 고유치를 구하고자 하는 경우(p>50), 고려되는 고유치의 수가 증가하는 만큼 subspace iteration 방법을 이용한 해석에 소요되는 시간은 급격히 증가한다. 이러한 해석 시간의 증가는 소수의 고유치를 구할 경우 무시될 수 있는 몇몇 인자들에 기인한다.

- 1) p가 증가될 경우 ϕ_p 에 대한 수렴비($\frac{\lambda_p}{\lambda_{q+1}}$)가 1에 가까워진다.
- 2) q가 증가될 경우 subspace iteration당 연산 횟수가 증가한다.
- 3) q가 증가될 경우 소수 저차 고유치들의 수렴은

단지 몇번의 반복횟수 안에 이루어진다. 즉 이미 수렴된 벡터와 (p+1)번째부터 q번째 까지의 반복 벡터들은 단지 해석의 안정성과 수렴되지 않은 고유치들의 수렴을 가속화하기 위하여 부가적인 반복 연산에 포함된 것이다.

여기서 p는 구하고자 하는 고유벡터의 수를 그리고 q는 수렴의 가속화를 위한 초기벡터의 수 $q = \min(p+8, 2 \times p)$ 를 의미한다.

본 논문은 accelerated Newton-Raphson 방법을 이용하여 Robinson-Lee 방법의 수렴성을 향상시킨 고유치해법과 개발된 고유치해법을 이용한 새로운 알고리즘을 제안함으로써 기존 고유치해법의 문제점을 해결하고 해석시간을 감소시키고자 한다. 제안된 해법의 신뢰도 및 효율성은 평면 뼈대구조물과 3차원 뼈대구조물을 이용하여 증명하였다.

2. Robinson-Lee 방법^(16,17)

구조물의 동적해석에서 고려되는 일반화된 고유치문제는 다음과 같다.

$$A\bar{x}_j = \lambda_j B\bar{x}_j (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

여기서 A와 B는 각각 시스템의 강성행렬과 질량행렬이다. B는 positive definite이고, A는 semi-positive definite 이다. A와 B는 n차의 대칭행렬이며 λ_j 와 \bar{x}_j 는 시스템의 자유진동수의 제곱과(ω^2) 그에 대응하는 모드이다.

식 (1)에 있어서 초기근사값을 $\lambda_j^{(0)}$ 와 $\bar{x}_j^{(0)}$ 라 하자. 이들 초기근사값으로는 근사해법(Rayleigh-Ritz 방법, C.M.S. 방법 등)의 결과나, 또는 반복법(subspace iteration 방법, determinant search 방법 등)의 중간 결과를 사용할 수 있다. k번 반복 연산 후에 이들 근사값을 $\lambda_j^{(k)}$ 와 $\bar{x}_j^{(k)}$ 라 하면, 식 (1)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{r}_j^{(k)} &= A\bar{x}_j^{(k)} - \lambda_j^{(k)} B\bar{x}_j^{(k)} \\ &= \bar{r}_j^{(k)}(\lambda_j^{(k)}, \bar{x}_j^{(k)}) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $\bar{r}_j^{(k)}$ 는 λ_j 와 \bar{x}_j 의 근사값을 대입하였기 때문에 일반적으로 0이 아니다.

근사값 $\lambda_j^{(k)}$ 와 $\bar{x}_j^{(k)}$ 를 j번째 고유치와 그에 대응하는 고유벡터로 수렴시키기 위해서는 잔류벡터를 제거해야한다. 이를 위해서 다음과 같은 Newton-Raphson 방법을 도입한다.

$$\begin{aligned} \bar{r}_j^{(k+1)} &= 0 \\ &= A\bar{x}_j^{(k+1)} - \lambda_j^{(k-1)}B\bar{x}_j^{(k+1)} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

$$\bar{r}_j^{(k+1)} = \bar{r}_j^{(k+1)}(\lambda_j^{(k+1)}, \bar{x}_j^{(k+1)}) \quad (4)$$

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} + \Delta\lambda_j^{(k)} \quad (5)$$

$$\bar{x}_j^{(k+1)} = \bar{x}_j^{(k)} + \Delta\bar{x}_j^{(k)} \quad (6)$$

truncated Taylor 전개에 의해서 식 (3)을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{r}_j^{(k+1)} &= 0 \\ &= \bar{r}_j^{(k)}(\lambda_j^{(k)}, \bar{x}_j^{(k)}) + \frac{\partial \bar{r}_j^{(k)}}{\partial \bar{x}_j^{(k)}} \Delta\bar{x}_j^{(k)} + \frac{\partial \bar{r}_j^{(k)}}{\partial \lambda_j^{(k)}} \Delta\lambda_j^{(k)} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)에 식 (2)를 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$(A - \lambda_j^{(k)}B)\Delta\bar{x}_j^{(k)} - \Delta\lambda_j^{(k)}B\bar{x}_j^{(k)} = -\bar{r}_j^{(k)} \quad (8)$$

여기서 $\Delta\lambda_j^{(k)}$ 와 $\Delta\bar{x}_j^{(k)}$ 는 $\lambda_j^{(k)}$ 와 $\bar{x}_j^{(k)}$ 의 미지의 미소증가량이다.

식 (8)에서 미지수는 $(n+1)$ 개($\Delta\lambda_j^{(k)}$, $\Delta\bar{x}_j^{(k)}$ 의 n 개 요소)이지만, 단지 n 개의 방정식이 존재하기 때문에 $\Delta\lambda_j^{(k)}$ 와 $\Delta\bar{x}_j^{(k)}$ 를 구하기 위해서는 반드시 하나의 부가조건식(side condition)이 도입되어야 한다. $(n+1)$ 개의 미지수를 가진 $(n+1)$ 개의 방정식을 유도하기 위해서 Robinson-Lee가 도입한 부가조건식은 다음과 같다.

$$(\bar{x}_j^{(k)})^T B \Delta\bar{x}_j^{(k)} = 0 \quad (9)$$

식 (9)는 고유벡터의 미소 증가량 $\Delta\bar{x}_j^{(k)}$ 은 질량 행렬 B 에 대해서 $\bar{x}_j^{(k)}$ 와 직교하도록 함으로써 이의 비제한적인 변화를 막아 \bar{x}_j 에 가장 효율적으로 수렴하도록 함을 의미한다(그림 1). 여기서 $\theta_j^{(k+1)}$ 는 \bar{x}_j 와 $\bar{x}_j^{(k+1)}$ 사이의 각의 차이를 의미한다.

식 (8)과 식 (9)를 연립선형대수방정식으로 표현하면 다음과 같다(그림 2).

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_j^{(k)}B & -B\bar{x}_j^{(k)} \\ -(\bar{x}_j^{(k)})^T B & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\bar{x}_j^{(k)} \\ \Delta\lambda_j^{(k)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{r}_j^{(k)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

그림 2에서 $\bar{\phi}_\lambda = \begin{Bmatrix} \bar{x}_j^{(k)} \\ \lambda_j^{(k)} \end{Bmatrix}$ 이다. 식 (10)에서 미소 증

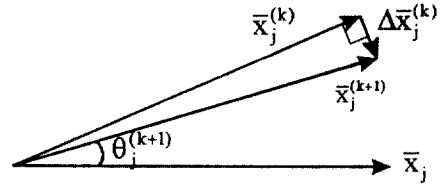


그림 1. 부가조건식(B=I)

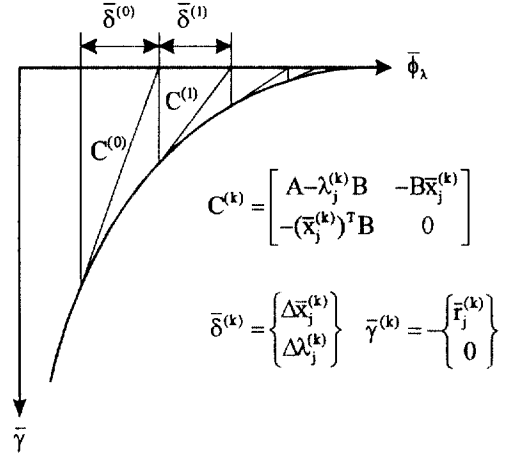


그림 2. Newton-Raphson 방법

가량 $\Delta\lambda_j^{(k)}$ 와 $\Delta\bar{x}_j^{(k)}$ 에 대한 계수행렬은 $(n+1)$ 차의 대칭행렬이고, λ_j 가 다중근(multiple root)이 아닐 경우 정칙행렬(nonsingular matrix)이다.

Newton-Raphson 방법을 이용한 위의 방법은 각 반복연산마다 $\lambda_j^{(k)}$ 와 $\bar{x}_j^{(k)}$ 가 $\lambda_j^{(k+1)}$ 과 $\bar{x}_j^{(k+1)}$ 로 미소 증가하기 때문에 계수행렬의 모든 요소가 변한다. 즉, 각 단계마다 새로운 계수행렬의 조합을 필요로 하며 미소증가량 $\Delta\lambda_j^{(k)}$ 와 $\Delta\bar{x}_j^{(k)}$ 를 구하기 위한 새로운 행렬분해를 필요로 한다. 이것은 띠틈의 증가에 따른 연산횟수의 급격한 증가를 의미한다.

Robinson-Lee는 이러한 단점을 해소하기 위해 modified Newton-Raphson 방법을 이용하여 다음과 같은 고유치해법을 제안했다(그림 3).

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_j^{(0)}B & -B\bar{x}_j^{(k)} \\ -(\bar{x}_j^{(k)})^T B & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\bar{x}_j^{(k)} \\ \Delta\lambda_j^{(k)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \bar{r}_j^{(k)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

그림 3에서 $\bar{\phi}_\lambda = \begin{Bmatrix} \bar{x}_j^{(k)} \\ \lambda_j^{(k)} \end{Bmatrix}$ 이다. 이와같은 방법을 Robinson-Lee 방법이라 하며, 이 방법에서 미소 증가량 $\Delta\lambda_j^{(k)}$ 와 $\Delta\bar{x}_j^{(k)}$ 에 대한 계수 행렬 역시 $(n+1)$ 차의 대칭행렬이고, λ_j 가 다중근이 아닐 경우 정칙 행렬

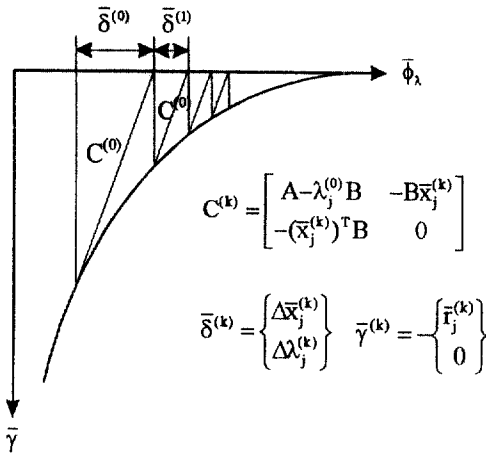


그림 3. modified Newton-Raphson 방법

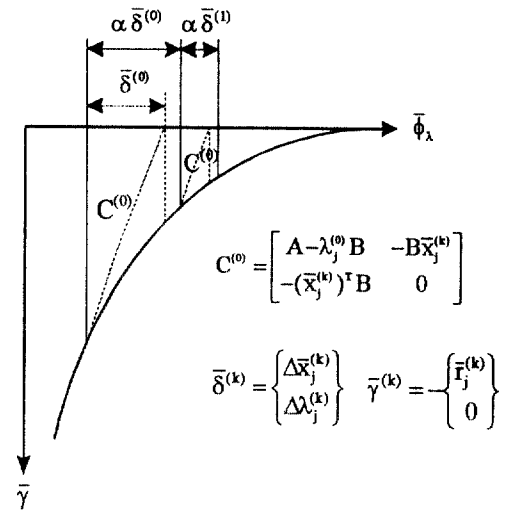


그림 4. accelerated Newton-Raphson 방법

이다.

modified Newton-Raphson 방법을 이용한 Robinson-Lee 방법의 고유치와 고유벡터의 수렴성은 다음과 같다.

$$\kappa_j^{(k+1)} = h^2 \kappa_j^{(k)} \quad (12)$$

$$\theta_j^{(k+1)} = h\theta_j^{(k)} \quad (13)$$

$$\text{여기서 } \kappa_j^{(k+1)} = \left| \frac{\lambda_j - \lambda_j^{(k+1)}}{\lambda_j} \right|, \quad h = \max_{i,i \neq j} \left| \frac{\lambda_j - \lambda_i^{(0)}}{\lambda_i - \lambda_j^{(0)}} \right|$$

이고 $\theta_j^{(k+1)}$ 는 \bar{x}_j 와 $\bar{x}_j^{(k+1)}$ 사이의 각의 차이를 의미한다.

3. 제안방법

modified Newton-Raphson 방법을 이용한 Robinson-Lee 방법은 일단 계수행렬의 부행렬 $A - \lambda_j^{(0)} B$ 가 LDL^T 로 행렬분해되면 연속적인 반복연산에서는 $B\bar{x}_j^{(k)}$ 에 대한 조합과 행렬분해만을 필요로 하기 때문에 Newton-Raphson 방법을 이용한 경우보다 각 반복횟수당 필요한 연산횟수를 현저히 감소시켰으나, 수렴성의 저하로 수렴을 위해서는 많은 반복횟수를 필요로 한다(그림 3). 본 논문에서는 수렴성과 안정성을 향상시킴으로써 Robinson-Lee 방법의 이러한 단점을 해소하기 위해 다음과 같은 accelerated Newton-Raphson 방법을 이용하였다(그림 4).

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} + \Delta\lambda_j^{(k)} \quad (14)$$

$$\bar{x}_j^{(k+1)} = \bar{x}_j^{(k)} + \alpha \Delta\bar{x}_j^{(k)} \quad (15)$$

그림 4에서 $\bar{\phi}_\lambda = \begin{Bmatrix} \bar{x}_j^{(k)} \\ \lambda_j^{(k)} \end{Bmatrix}$ 이다. 식 (15)에 있어서 step length(α)는 $\bar{\gamma}_j^{(k+1)}$ 의 정규(norm)를 최소화하기 위한 값으로 최소자승법(least square method)을 이용하여 다음과 같이 구하였다.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \{(\bar{\gamma}_j^{(k+1)})^T \bar{\gamma}_j^{(k-1)}\} = 0 \quad (16)$$

$$\alpha = - \frac{(\Delta\bar{x}_j^{(k)})^T (A - \lambda_j^{(k+1)} B) (A - \lambda_j^{(k+1)} B) \bar{x}_j^{(k)}}{(\Delta\bar{x}_j^{(k)})^T (A - \lambda_j^{(k+1)} B) (A - \lambda_j^{(k+1)} B) \Delta\bar{x}_j^{(k)}} \quad (17)$$

여기서 $\lambda_j^{(k+1)}$ 과 $\Delta\bar{x}_j^{(k)}$ 는 각각 식 (14)와 식 (11)에서 이미 구해진 값들이다.

제안방법의 첫번째 반복 과정에서 α 를 구하는데 필요한 연산횟수는 $2nm_a + 2nm_b + 7n + 1$ 이다. 이러한 연산횟수는 Robinson-Lee 방법의 각 반복과정에서 필요한 총 연산횟수 $5nm_a + 2nm_b + 6n$ 과 비교할 때 매우 큰 값이다. 그러나 두번째 이후의 각 반복과정부터는 α 를 구하는 과정에서 계산된 결과를 다음 과정에서 사용할 수 있기 때문에 단지 $7n + 1$ 의 부가적인 연산횟수만을 필요로 한다.⁽¹⁹⁾ 여기서 n 은 시스템의 차수를, m_a 와 m_b 는 각각 강성행렬과 질량행렬의 띠풍을 의미하고 있다. 즉, 제안 방법은 부가적인 연산을 필요로 하는 step length(α)를 이용하여 기존방법보다 수렴성을 향상시킴으로써 전체 해석시간의 감소와 정확도가 증가된 고유치와 그에 대응하는 고유벡터를 구하려는 해법이다.

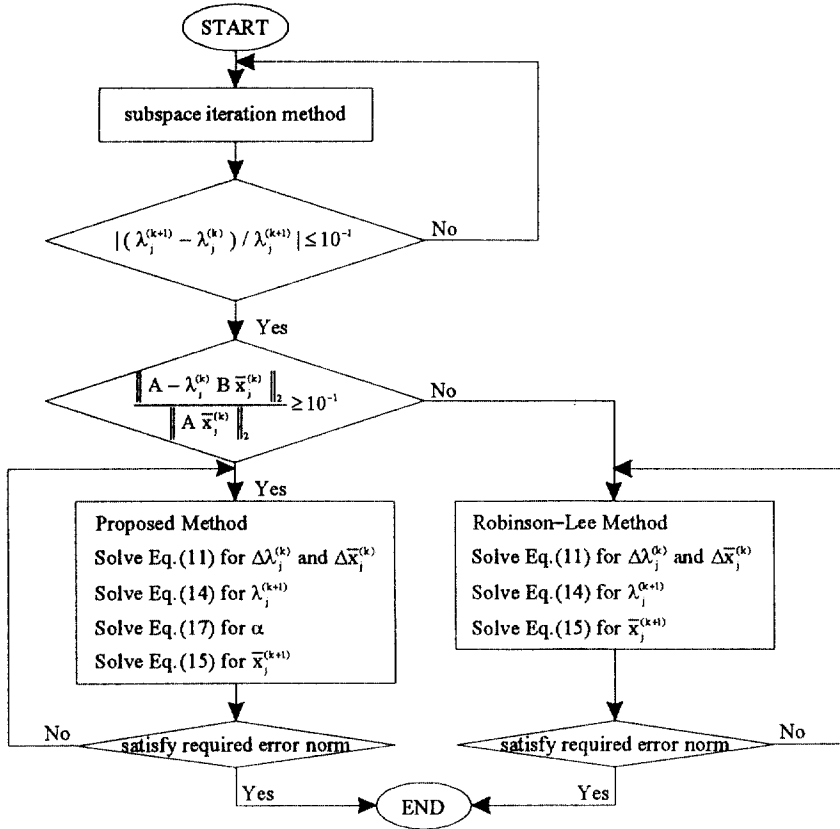


그림 5. 제안방법의 알고리즘

제안방법의 알고리즘은 다음과 같다(그림 5). subspace iteration 방법에서 상대오차(relative error) 10^{-1} 을 만족하는 중간결과를 초기값으로 하여, 그 값의 오차정규가 10^{-1} 이상인 경우 step length(α)를 적용한다.

4. 수치해석

제안방법의 유용성을 증명하기 위하여 K.J. Baltha가 사용한 평면 뼈대구조물과 3차원 뼈대구조물을 대상구조물로 해석하였다.⁽¹³⁾ 각 대상구조물에 대해서 제안방법, Robinson-Lee 방법 그리고 상용 코드인 ADINA에서 사용하고 있는 subspace iteration 방법, determinant search 방법을 이용하여 오차정규(error norm) 10^{-9} 를 만족하는 15개의 모우드를 구하는데 소요되는 해석시간(CPU 시간)과 수렴성을 각각 비교하였다. 제안 방법과 Robinson-

Lee 방법의 초기값들은 ADINA에서 사용하고 있는 subspace iteration 방법에서 상대오차(relative error) 10^{-1} 을 만족하는 중간결과를 이용하였고, 오차정규가 10^{-1} 이상인 모우드에 대해서 step length(α)를 적용하였다. 해석에 사용한 컴퓨터는 IRIS 4D20-S17이다.

4.1 평면 뼈대구조물

평면 뼈대구조물의 유한요소 모델은 210개의 보요소와 121개의 절점으로 되어 있고 총 자유도수는 330개이다(그림 6). 유한요소법에 의해서 모델화된 평면 뼈대구조물의 띠폭은 30이다.

평면 뼈대구조물의 물성치는 다음과 같다. ($A = 0.2787 \text{ m}^2$, $I = 8.631 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, $E = 2.068 \times 10^{-7} \text{ Pa}$, $\rho = 5.154 \times 10^9 \text{ kg/m}^3$) 초기값의 오차정규가 10^{-1} 이상인 13, 14 그리고 15번째의 모우드에 step length (α)를 적용하였다.

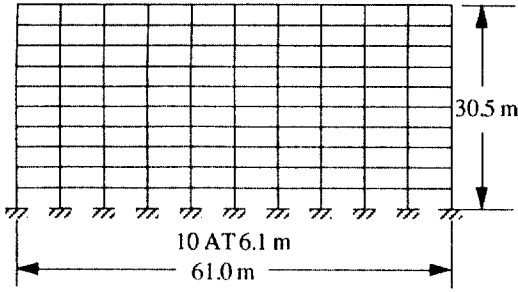


그림 6. 평면 뱀대구조물

표 1. 평면 뱀대구조물의 허용 오차정규 10^{-9} 을 만족하는 15개의 모우드를 구하는데 소요되는 해석시간

Methods	Solution Time(sec) (Ratio)
Proposed Method	58.09 (1.00)
Robinson-Lee Method	59.70 (1.03)
Subspace Iteration Method	155.44 (2.68)
Determinant Search Method	133.46 (2.30)

표 1은 네가지 해석방법에 대해서 허용오차정규 10^{-9} 를 만족하는데 소요되는 해석시간을 비교한 것이다. 제안방법에 소요되는 해석시간을 1이라 하였을 경우 subspace iteration 방법은 2.68배, determinant search 방법은 2.3배 그리고 Robinson-Lee 방법은 1.03배의 해석시간이 더 소요되었다. 그림 7부터 9까지는 step length(α)가 적용된 모우드에 대해서 각 반복단계마다 네가지 해석방법에 대한 오차정규의 변화를 비교한 것이다. 위의 그림에서 알 수 있듯이, 제안방법의 수렴성은 subspace iteration 방법과 determinant search 방법보다 월등하며, step length(α)에 의해서 Robinson-Lee 방법보다 향상된 수렴성을 갖게됨으로써 허용오차정규를 만족하는데 필요한 반복횟수를 감소시켰거나 또는 반복횟수가 같은 경우에 정확도가 좋은 모우드를 구할 수 있었다.

제안방법에서 step length(α)의 효율성은 초기값의 오차정규와 매우 밀접한 관계를 가지고 있다. 초기값의 오차정규가 0.23×10^{-1} 인 13번째 모우드에 대해서 제안방법은 허용오차정규를 만족하기 위해 Robinson-Lee 방법과 같은 반복횟수를 필요로 하

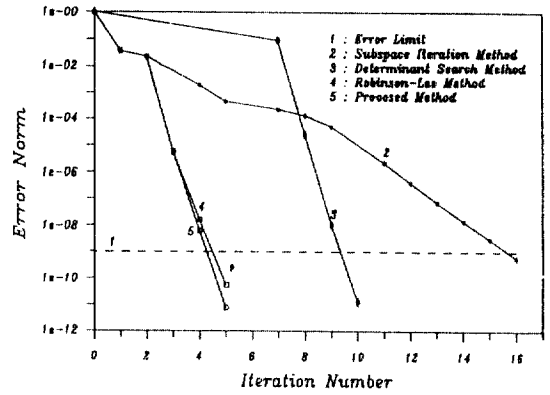


그림 7. 13번째 모우드의 수렴성

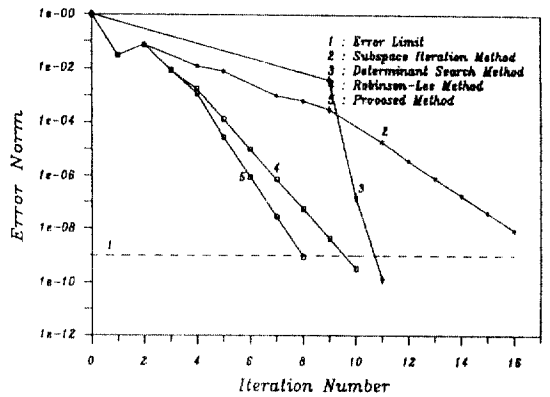


그림 8. 14번째 모우드의 수렴성

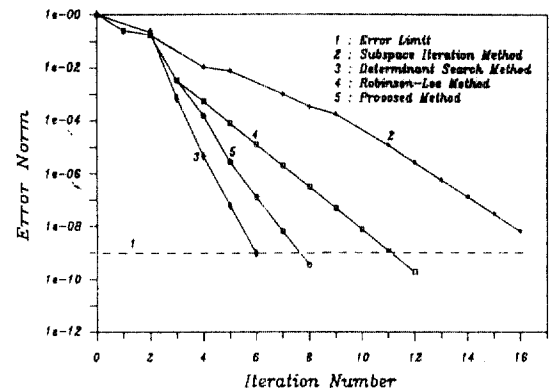


그림 9. 15번째 모우드의 수렴성

지만 Robinson-Lee 방법의 결과보다 정확한 값을 구하였다(그림 7). 초기값의 오차정규가 0.76×10^{-1} 인 14번째 모우드에 대해서는 2번의 반복횟수의 감소효과를 얻었다(그림 8). 그리고 14번째의 모우

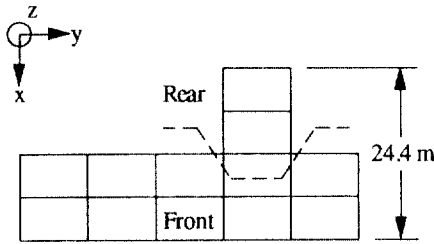
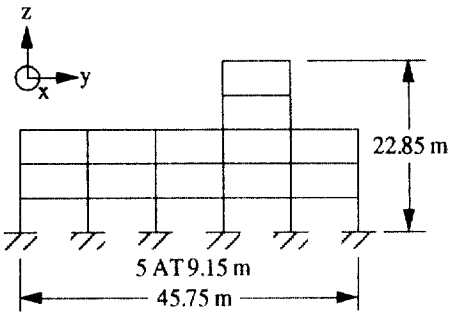


그림 10. 3차원 뼈대구조물

드를 구하기 위해 사용한 초기값의 오차정규(0.76×10^{-1})보다 큰 1.73×10^{-1} 의 오차정규를 가지고 있는 값을 초기값으로 사용한 15번째 모우드의 경우 4 번의 반복횟수의 감소 효과를 얻었다(그림 9). 즉, 제안방법의 step length(α)는 초기값의 오차가 클수록 더욱 효율적으로 작용함으로써 제안방법의 수렴성을 더욱 향상시켰다. 위의 예제에서 계산된 step length(α)는 0.85~1.5 사이의 값들이었다.

4.2 3차원 뼈대구조물

3차원 뼈대구조물의 유한요소 모델은 191개의 보요소와 100개의 절점으로 되어있고 총 자유도수는 468개이다(그림 10).

3차원 뼈대구조물의 물성치는 다음과 같다(Columns in Front Building $A=0.2787 \text{ m}^2$, $I=8.631 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, Columns in Rear Building : $A=0.3716 \text{ m}^2$, $I=10.789 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, All Beams into x-Direction : $A=0.6096 \text{ m}^2$, $I=6.473 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, All Beams into y-Direction : $A=0.2787 \text{ m}^2$, $I=8.631 \times 10^{-3} \text{ m}^4$, $E=2.068 \times 10^{-7} \text{ Pa}$, $\rho=5.154 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$).

제안방법에서의 step length(α)는 초기값의 오차정규가 10^{-1} 이상인 12, 14 그리고 15번째 모우드에 적용하였다. 표 2는 네가지 해석방법에 대해서 허

표 2. 3차원 뼈대구조물의 허용 오차정규 10^{-9} 을 만족하는 15개의 모우드를 구하는데 소요되는 해석시간

Methods	Solution Time(sec) (Ratio)
Proposed Method	217.40 (1.00)
Robinson-Lee Method	233.90 (1.08)
Subspace Iteration Method	723.91 (3.33)
Determinant Serach Method	1111.37 (5.11)

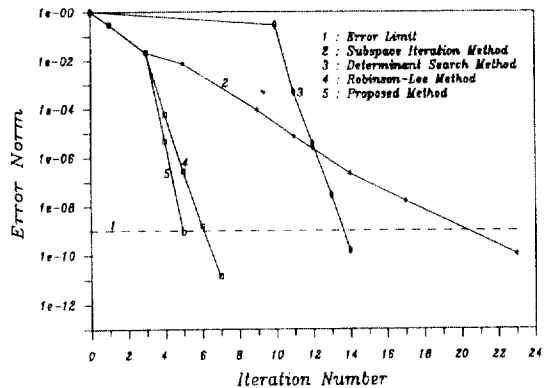


그림 11. 12번째 모우드의 수렴성

용오차정규 10^{-9} 를 만족하는데 소요되는 해석시간을 비교한 것이다. 제안방법에 소요되는 해석시간을 1이라 하였을 경우 subspace iteration 방법은 3.33배, determinant search 방법은 5.11배 그리고 Robinson-Lee 방법은 1.08배의 해석시간이 더 소요되었다. 그림 11부터 13까지는 step length(α)가 적용된 모우드에 대해서 각 반복단계마다 네가지 해석방법에 대한 오차정규의 변화를 비교한 것이다. 기존의 accelerated Newton-Raphson 방법은 특성함수의 형상을 무시한 채 1.0~2.0 사이의 값을 step length(α)로 이용하기 때문에 몇몇의 경우에는 오히려 수렴성이 저하되는 단점이 지적되었다. 제안방법은 각 반복단계마다 잔류벡터의 정규를 최소화 하도록 특성함수의 형상을 고려한 값을 step length(α)로 이용하기 때문에 수렴성이 향상되었고, 그 결과 적은 해석시간이 소요되었다. 또한 step length(α)의 효과는 초기값의 오차가 클수록 효과가 두드러졌다. 위의 예제에서 계산된 step length(α)는 0.85~1.02 사이의 값들이었다.

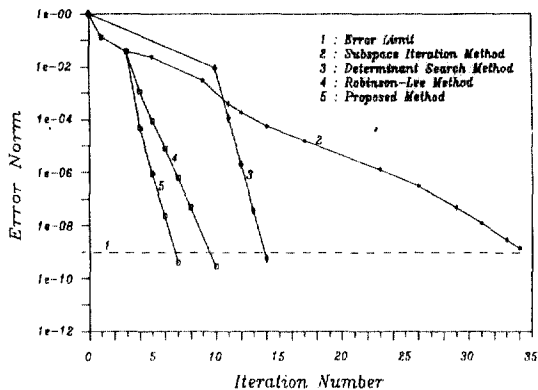


그림 12. 14번째 모드드의 수렴성

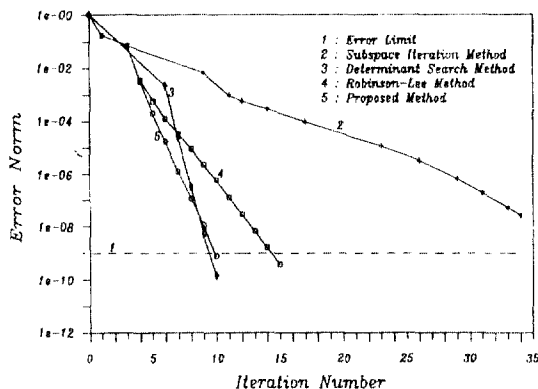


그림 13. 15번째 모드드의 수렴성

5. 결 론

본 논문은 accelerated Newton-Raphson 방법을 Robinson-Lee 방법에 도입하여 고유치 해석을 위한 효율적인 수치 해석법을 제안하였다. 예제를 통해서 알 수 있듯이, 제안방법은 다음과 같은 특징을 가지고 있다.

첫째, 제안방법은 각각의 고유쌍(eigenpair)을 독립적으로 구하기 때문에 이미 구해진 고유쌍의 오차에 영향을 받지 않는다.

둘째, shift값이 시스템의 고유치에 매우 근접한 경우라도 제안방법은 수치적 불안정성을 유발하지 않고 시스템의 동특성을 구해준다.

셋째, 일반적인 고유치 해법들의 수렴성은 초기값의 오차에 매우 큰 영향을 받는다. 그러나 제안방법에서 사용하는 step length(α)는 초기값의 오차가 클수록 보다 효율적으로 작용하기 때문에 초기

값의 오차가 비교적 커도 신뢰할 수 있는 정확도를 가진 구조물의 동특성을 구해준다.

넷째, 기존 accelerated Newton-Raphson 방법에서는 특성함수의 형상을 무시한 채 일정한 값을 step length(α)로 사용함으로써 몇몇의 경우 오�히려 수렴성이 감소하는 문제점이 지적되었다. 그러나 제안방법에서는 각 반복단계마다 잔류벡터의 정규를 최소화 하도록 특성함수의 형상을 고려한 적절한 값을 step length(α)로 사용하기 때문에 위의 문제점을 해결하였다.

다섯째, 제안방법은 subspace iteration 방법의 중간 결과를 초기값으로 이용하기 때문에 고차 모우드드의 수렴을 위해 많은 해석시간을 필요로 하는 subspace iteration 방법의 단점과 shift값을 구하는데 많은 시간을 필요로 하는 determinant search 방법의 단점을 해결하였다.

즉, 제안방법은 step length를 구하기 위해 부가적인 연산을 필요로 하지만 수렴성을 향상시킴으로써 전체 해석시간을 감소시켰을 뿐만 아니라 수치적 안정성을 가지고 구조물의 동특성을 구할 수 있는 효율적인 고유치 해법이다.

참고문헌

1. Meirovitch, L., *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, 1986.
2. Clough, R.W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1975.
3. Roberti, P., "The Accelerated Power Method", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 20, 1984, pp. 1179-1191.
4. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, 1982.
5. Meirovitch, L., *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
6. Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, McGraw-Hill, 1967.
7. Petyt, M., *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge, 1990.
8. Bathe, K.J. and Wilson, E.L., "Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 6, 1973, pp. 213-226.
9. Hughes, T.J.R., *The Finite Element Method*, Prentice-Hall.

10. Paige, C.C., "Computational Variants of the Lanczos Method for the Eigenproblem", *J. Inst. Math. Appl.*, Vol. 10, 1976, pp. 373-381.
11. Paige, C.C., "Error Analysis of the Lanczos Algorithm for Tridiagonalizing a Symmetric Matrix", *J. Inst. Math. Appl.*, Vol. 18, 1976, pp. 341-349.
12. Bathe, K.J. and Wilson, E.L., "Eigensolution of the Large Structural Systems with Small Bandwidth", *J. Eng. Mech. Div.*, Vol. 99, 1973, pp. 467-479.
13. Bathe, K.J. and Wilson, E.L., "Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 98, 1972, pp. 1471-1485.
14. Bathe, K.J. and Ramaswamy, S., "An Accelerated Subspace Iteration Method", *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 23, 1980, pp. 313-331.
15. Wilson, E.L. and Itoh, T., "An Eigensolution Strategy for Large Systems", *Comp. Struct.*, Vol. 16, 1983, pp. 259-265.
16. Robinson, A.R. and Harris, J.F., "Improving Approximate Eigenvalues and Eigenvectors", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. 97(EM2), 1971, pp. 457-475.
17. Lee, I.W. and Robinson, A.R., "Solution Techniques for Large Eigenvalue Problems in Structural Dynamics", *Structural Research Series No. 462*, University of Illinois, 1979.
18. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1991.
19. 김만철, "대형구조물의 효율적인 자유진동해석방법", KAIST, 석사학위논문, 1994. 2.
(接受 : 1994. 6. 7)