

調整方程式法(혹은 弛緩方程式法)과 連續梁에의 應用

Adjusting Equation Method (or Relaxation Equation Method) and its Application to the Influence Line Analysis of Continuous Beams

조현영* · 김미옥**

Cho, Hyun Yung · Kim, Mi Ock

Abstract

Moment distribution procedure in the elastic analysis of rigid frames can be easily expressed with the adjusting moment equations(or relaxation equations) by using the concept of total adjusting moment at each joint after infinite cycles of moment distribution. Adjusting moment equations are a set of simultaneous equations from which the total adjusting moments at each joints after infinite cycles of physical relaxation can be determined. The form of simultaneous equations is a kind of relaxation equations and can be easily solved by the hand calculators. A unique and simplified procedure for the influence line analysis of a continuous beam is presented as an application of the method.

要 旨

剛節 뼈대 構造物의 解析에 적용하는 모멘트 분배법은 總調整 모멘트라는 개념을 이용하여 聯立方程式으로 간단히 표현된다. 이 方程式은 간단한 손계산기(hand calculator)로 직접 작성되고 쉽게 풀어질 수 있다. 이 방정식(調整方程式)은 무한번의 분배 과정을 완료한 상태를 나타내며 그 해는 消去法으로 풀 수도 있으나 일종의 弛緩方程式으로써 되풀이 산법을 사용하면 간단히 풀어진다. 이 방법이 連續梁의 휨 모멘트 계산이나 影響線 解析에 어떻게 이용될 수 있는 지를 두개의 예제로서 설명하였다. 특히 영향선의 해법은 전산에 편리하도록 行列로 표현하였다.

1. 序 論

모멘트 분배법은 剛節 構造物을 푸는 교과서적 방법이며 아직도 連續梁이나 간단한 라멘 구조의 계산에 實務적으로 널리 이용되고 있다.

최근에 손계산기(예컨대 sharp EL 9300 등)의 성능 향상으로 중소규모의 聯立方程式은 손쉽게 풀 수 있게 되었다.

이러한 계산 환경에 맞추어 모멘트 분배법도 분배표 작성과정을 聯立方程式化 하므로써 보다 편리하게 계산할 수 있다. 이 방법은 저자(趙)가 오래 전에 독자적으로 고안하여 사용해 오고 있는 것으

* 정회원 · 부산대 공대 토목공학과 교수

** 정회원 · 부산대 대학원 석사과정

로서⁽¹³⁾ 사용 경험으로 비추어 부정정력을 구하는 應力法이나 절점의 변위와 회전각을 구하는 처짐각법 혹은 3연 모멘트법 등과 비교해 볼 때 문제에 따라서는 월등하게 간편하다는 것을 알게 되었다.

일상적으로 이용하는 교과서적 방법이라 할지라도 좀 더 간단하고 편리한 방법으로 고쳐질 수 있는 여지가 있을 때는 이를 추구하는 것이 옳다고 여겨 이 소고를 정리하였다.

2. 調整 方程式과 재단 모멘트

剛節 構造物에 모멘트 분배법을 적용할 경우 먼저 절점에 고의적 회전구속을 준 다음에 각종 실하중을 작용시키면 그 절점들에는 초기의 구속 모멘트 m_{i0} 들이 발생한다. 이 m_{i0} 들은 그 절점 i 에 모이는 모든 部材端의 固定端 모멘트를 합한 것이다. 즉

$$m_{i0} = \sum_{j=1}^{k_i} (FEM)_{ij} \quad (1)$$

단 $k_i = i$ 절점에 강결된 부재수

$(FEM)_{ij} = ij$ 부재의 i 단 고정 모멘트

여기서 한 절점씩 고의적 구속을 解除(혹은 弛緩)한 후 再拘束하는 과정은 그 절점에서 제 n 사이클째를 생각하면 구속 모멘트 m_{in} 를 상쇄하는 조정 모멘트 q_{in} 을 가해주는 것으로 생각할 수 있다. 즉

$$q_{in} = -m_{in}$$

이러한 調整 過程을 모든 구속 절점에 대하여 빠짐없이 돌아가며 무한번 실시하였다고 할 때 한 절점 i 에서의 調整 모멘트 q_{in} 의 총계를 Q_i 라 하자. 즉

$$Q_i = \sum_{n=0}^{\infty} q_{in} = \sum_{n=0}^{\infty} (-m_{in}) \quad (2)$$

그런데 한 절점에서의 總調整 모멘트 Q_i 는 초기 구속 모멘트와 분배 과정에서 이웃 절점들에서 전달된 固定端 모멘트들의 합계를 상쇄시키는 모멘트가 된다. 즉

$$Q_i = -m_{i0} + \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} Q_j \quad (3)$$

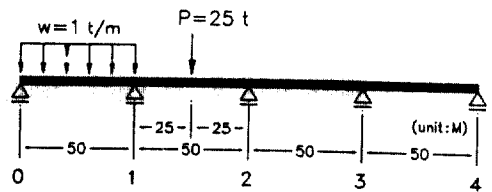


그림 1. 계산예 1.

$$\text{단 } a_{ij} = -c_{ij}d_{ij}$$

$m_{i0} = i$ 절점에서의 초기 구속 모멘트

$a_{ij} = j$ 절점에서 조정으로 인한 i 절점 추가조정율

$d_{ij} = j$ 절점에서 i 절점 쪽으로의 분배율

$c_{ij} = j$ 절점에서 i 절점 쪽으로의 전달율

식 (3)을 i 절점에 대한 調整方程式이라 부르기로 한다. 이러한 방정식을 모든 절점들에 대하여 만들어 보면 미지수 Q_i 갯수와 같은 수로 구성되는 연립 방정식을 얻는다. 이를 풀면 절점별 總調整 모멘트 Q_i 들을 구할 수 있다.

그러면 조정이 완료되었을 때의 部材端 모멘트는 그 부재단에 최초로 발생했던 固定端 모멘트 $(FEM)_{ij}$ 와 總調整 모멘트 Q_i 에 의하여 그 단에 분배된 모멘트 및 건너단 조정 모멘트 Q_j 의 조정시에 i 단에 발생한 단 모멘트 $c_{ij}d_{ij}Q_j$ 의 합계로 주어진다. 즉

$$M_{ij} = (FEM)_{ij} + d_{ij}Q_i + c_{ij}d_{ij}Q_j \quad (4)$$

결국 조정 모멘트법은 (3)식의 調整方程式을 풀어서 절점별 總調整 모멘트를 구하고 이를 이용하여 (4)식으로 部材端 모멘트를 구하는 절차로서 구성된다.

[計算例 1] 調整方程式법을 이용하여 그림 1과 같은 4경간 連續보의 지점 휨 모멘트를 구하여 본다. 계산상의 편의를 위하여 彈性계수 E , 단면2차 모멘트 I 및 경간장 l 은 각각 전 구간에 걸쳐 일정하다.

[해]

$$(1) \text{ 分配率 } d_{01} = 3/7 \quad d_{21} = 4/7 \quad d_{12} = d_{32} = 1/2$$

$$d_{23} = 4/7 \quad d_{43} = 3/7$$

$$(2) \text{ 傳達率 } c_{12} = c_{21} = c_{23} = c_{32} = 0.5$$

$$(3) \text{ 固定端 모멘트}$$

$$(FEM)_{10} = wl^2/8 = 312.5 \text{ t-m}$$

$$(FEM)_{12} = -pl/8 = -156.25 \text{ t-m}$$

$$(FEM)_{21} = pl/8 = 156.25 \text{ t-m}$$

(4) 初期拘束 모멘트 (식 (1))

$$m_{10} = (FEM)_{10} + (FEM)_{12} = 156.25 \text{ t-m}$$

$$m_{20} = (FEM)_{21} = 156.25 \text{ t-m}$$

(5) 調整率

$$a_{24} = -c_{21}d_{21} = -(1/2)(4/7) = -0.2857 = a_{23}$$

$$a_{12} = -c_{12}d_{12} = -(1/2)(1/2) = -0.25 = a_{32}$$

(6) 調整方程式 (식 (3))

$$Q_1 = -m_{10} + a_{12}Q_2$$

$$Q_2 = -m_{20} + a_{21}Q_1 + a_{23}Q_3$$

$$Q_3 = -m_{30} + a_{32}Q_2$$

(4), (5)항의 결과를 대입하여 되풀이 산법으로 풀면

$$Q_1 = -156.25 - 0.25Q_2 = -123.7 \text{ t-m}$$

$$Q_2 = -156.25 - 0.2857Q_1 - 0.2857Q_3 = -130.2 \text{ t-m}$$

$$Q_3 = -0.25Q_2 = 32.55 \text{ t-m}$$

표 1. 모멘트 조정과정

하 중							
분배율		3/7	4/7	1/2	1/2	4/7	3/7
전달율	0.0		0.5		0.5		0.0
조정율			0.2857		0.25		
고정단 모멘트	+312.5	-156.25	156.25				
초기조정모멘트 (m _{io})		-156.25		-156.25		0.0	
조정표 (q _{in})		27.96		44.64		27.90	
		3.98		-7.97		-7.97	
		0.57		-1.13		-1.13	
		0.08		-0.16		-0.16	
		0.01		-0.07		-0.07	
총조정 모멘트 (Q _i)		-123.7		-130.3		32.6	
분배		-53.0	-70.7	-65.15	-65.15	18.6	14.0
전달			-32.6	-35.3	9.3	-32.6	
M _{ij}	259.5	-259.5	-55.8	55.9	-14.0	14.0	

(7) 材端 모멘트(절점 휨 모멘트) (식 (4))

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= (FEM)_{12} + d_{21}Q_1 - a_{12}Q_2 \\
 &= -156.25 + (-123.7) \times (4/7) + (-130.2) \times 0.25 \\
 &= -259.5 \text{ t-m} \\
 M_{23} &= d_{32}Q_2 - a_{23}Q_3 \\
 &= 0 + (-130.2) \times (1/2) + 32.55 \times 0.2857 \\
 &= -55.8 \text{ t-m} \\
 M_{34} &= d_{43}Q_3 \\
 &= 32.55 \times (3/7) = 13.95 \text{ t-m}
 \end{aligned}$$

3. 모멘트 調整法과 모멘트 分配法의 比較

모멘트 분배법과 똑같이 모멘트의 調整過程을 표를 만들면서 수행할 수 있다. 표 1은 모멘트 분배법을 이해하고 있는 사람이면 쉽게 판독할 수 있을 것이므로 긴 설명을 생략한다. 다만 표중의 조정과정은 앞의 (3)식을 푸는 과정에 해당하며 總調整 모멘트 Q_i 들을 한 번만 분배하고 전달한 결과와 최초의 固定端 모멘트를 합하는 과정은 (4)식과 완전히 같음을 알 것이다.

이 표로서 모멘트 조정법이 모멘트 분배법과 物理的 弛緩과정은 똑같고 다만 표를 만들어 계산하는 과정이 분배법에서는 단 모멘트의 추가량을 구하고 조정법에서는 절점 조정 모멘트의 추가량을 구해 나가는 과정으로 되어 있을 뿐이다. 이 차이는 고층 다경간 평면 라멘 구조에서 처럼 한 절점에 연결된 부재수가 많을 때는 절점당 한개의 미지수를 문제 삼으므로 作表 過程이 분배법보다 훨씬 단순해짐을 이해할 수 있을 것이다.

최종결과는 계산에 1과 일치하며 調整方程式법은 이러한 조정표 작성 과정에서 착안된 것이다.

4. 調整方程式법에 의한 連續梁의 影響線 解法

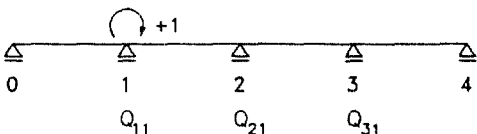


그림 2. 단위 절점 모멘트에 의해 발생하는 총조정 모멘트.

먼저 한 절점에 단위의 모멘트를 작용시키고 이를 조정하였을 때 각 절점에서의 總調整 모멘트들을 구한다. 가령 그림 2에서 단위 모멘트가 1지점상에 작용할 때 각 절점의 總調整 모멘트는 다음 식으로 계산된다.

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{11} &= 1 + a_{12}Q_{21} \\
 Q_{21} &= 0 + a_{21}Q_{11} + a_{23}Q_{31} \\
 Q_{31} &= 0 + a_{32}Q_{21}
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

이러한 調整方程式는 절점수(혹은 경간수)가 많더라도 되풀이 산법으로 즉시 구해진다. 단위 모멘트가 지점 2, 지점 3 위에 각각 왔을 때도 같이 해서 Q_{i2}, Q_{i3} (단 $i=1, 2, 3$)을 구하여 Q행렬을 쉽게 완성할 수 있다. 行列方程式으로 적어보면

$$Q = AQ + u \quad (6)$$

단, u : 단위행렬
 A : 조정행렬

(6)식을 그림 2의 경우에 대하여 구체적으로 적어보면

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)
 \end{aligned}$$

된다. (6)식의 해는

$$Q = (u - A)^{-1} \quad (8)$$

로서 주어지나 역을 구하는 것보다 (5)식을 되풀이 산법으로 풀어서 Q행렬을 한 열씩 구하는 것이 실체적이다.

그림 2에서 단위 모멘트에 의한 각 지점에서의 휨 모멘트는 각 지점 우측 部材端 모멘트를 구하면 되므로 (4)식 우변에서 固定端 모멘트 항을 제외한 식으로 주어진다. 즉

$$\left. \begin{aligned}
 M_{12} &= m_{11} = d_{21}Q_{11} - a_{12}Q_{21} \\
 M_{23} &= m_{21} = d_{32}Q_{21} - a_{23}Q_{31} \\
 M_{34} &= m_{31} = d_{43}Q_{31}
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

이를 행렬로 표현하면

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{21} & -a_{12} & 0 \\ 0 & d_{32} & -a_{23} \\ 0 & 0 & d_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \\ Q_{31} \end{bmatrix} \quad (10)$$

똑같이 생각해서 단위 모멘트가 2지점 및 3지점 상에 각각 작용할 때 i 지점 휨 모멘트를 m_{i2}, m_{i3} (단 $i=1, 2, 3$)라 하면, 각 지점 단위하중에 의한 각 지점 휨 모멘트를 주는 영향계수들은 다음 식으로 구해진다. 즉

$$\mathbf{m} = \mathbf{BQ} \quad (11)$$

단,

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} d_{21} & -a_{12} & 0 \\ 0 & d_{32} & -a_{23} \\ 0 & 0 & d_{43} \end{bmatrix} \quad (13)$$

연속보에서 경간수가 아무리 많아지더라도 (6)식의 \mathbf{A} 행렬이나 (11)식의 \mathbf{B} 행렬은 分配率, 傳達率 및 調整率만 구해두면 즉시 작성될 수 있으므로 \mathbf{Q} 및 \mathbf{m} 행렬은 수계산으로 간단히 구해진다. 이 \mathbf{m} 행렬을 이용하면 어느 지점의 휨 모멘트의 영향선은 다음 식으로 구해진다. 그림 3에서 i - j 경간상의 단위하중으로 인한 k 지점 휨 모멘트 m_k 는 단위하중에 의한 i 및 j 지점 固定端 모멘트를 해제할 때 k 지점에 발생하는 휨 모멘트이므로 \mathbf{m} 행렬을 이용하면

$$m_k = \delta_{ik}(FEM)_{ki} - m_{ki}(FEM)_{ij} - m_{kj}(FEM)_{ji} \quad (14)$$

단 δ_{ik} = Chronecker의 delta

로 주어진다. 여기서 고정단 모멘트의 값은 등단면일 때

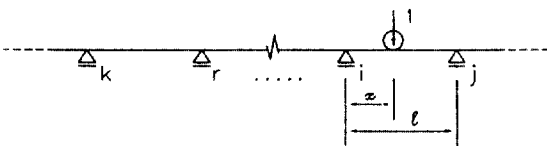


그림 3. i - j 경간의 단위하중에 의한 k 지점 휨 모멘트 m_k .

$$(FEM)_{ij} = -\frac{x(l-x)^2}{l^2} \quad (15)$$

$$(FEM)_{ji} = \frac{x^2(l-x)}{l^2}$$

로 주어지며 최초의 구속이 右端 고정, 左端 힌지일 때는

$$(FEM)_{ij} = 0$$

$$(FEM)_{ji} = \frac{x(l^2 - x^2)}{2l^2} \quad (16)$$

되며 左端 고정, 右端 힌지일 때는

$$(FEM)_{ij} = -\frac{x(l-x)(2l-x)}{2l^2}$$

$$(FEM)_{ji} = 0 \quad (17)$$

로 주어진다. (14)식 우변 중 $(FEM)_{kr}$ 는 $k=i$ 때 $(FEM)_{ij}$ 로 계산되고 $k \neq i$ 때는 0이다.

[計算例 2] 그림 4와 같은 5경간 連續梁의 지점 휨 모멘트의 影響線을 구해보자. (EI =일정)

[해] 단위 모멘트가 절점에 각각 작용할 때 각 절점에서의 總調整 모멘트 행렬 \mathbf{Q} 를 구하기 위하여 (6)식의 \mathbf{A} 행렬을 구해보자. (7)식의 우변의 \mathbf{A} 행렬을 참작하면 \mathbf{A} 행렬은 다음과 같이 적어진다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ -2/7 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & -2/7 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

위 식의 계산은 분배율이 그림 4와 같고 전달율이 모두 1/2임을 고려한 것이다. 그러면 \mathbf{Q} 의 제 1열 \mathbf{Q}_1 은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{AQ}_1 + \mathbf{u}_1 \quad (19)$$

단, $\mathbf{u}_1 = [1, 0, 0, 0]^T$

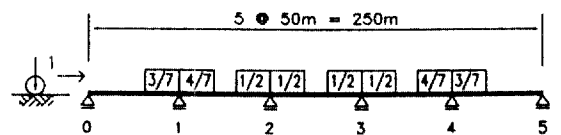


그림 4. 계산에 2 및 분배율.

Q_1 을 되풀이 산법으로 구하고 이하 같이 해서 (6) 식의 Q 행렬을 완성하면 다음 값을 얻는다.

$$Q = \begin{bmatrix} 1.08293 & -0.29072 & 0.07815 & -0.022328 \\ -0.33173 & 1.16108 & -0.31260 & 0.089314 \\ 0.089312 & -0.31260 & 1.16108 & -0.33173 \\ -0.022328 & 0.078150 & -0.29027 & 1.08293 \end{bmatrix} \quad (20)$$

이 Q 는 (8)식 우변에서 $(u-A)^{-1}$ 를 직접 구해오 된다. 이제 단위 절점 모멘트에 의한 절점 휨 모멘트의 影響行列인 (11)식의 $[m_{ij}]$ 를 구하기 위하여 B 행렬을 적어보자. (13)식을 참고하면 5경간 연속인 이 경우에는 B 행렬이 다음과 같이 즉시 적어진다. 즉

$$B = \begin{bmatrix} d_{21} & -a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & d_{32} & -a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & d_{43} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & d_{54} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 3/7 \end{bmatrix} \quad (21)$$

따라서 (11)식의 $m=BQ$ 를 계산하여서

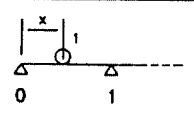
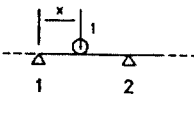
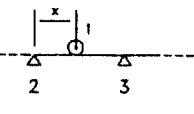
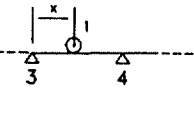
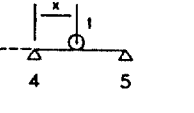
$$m = [m_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.53589 & 0.12440 & -0.033493 & 0.009569 \\ -0.14354 & 0.50239 & 0.13393 & -0.038276 \\ 0.038276 & -0.13397 & 0.49761 & 0.14354 \\ -0.009569 & 0.033493 & -0.12440 & 0.46411 \end{bmatrix} \quad (22)$$

단위 절점 모멘트에 의한 임의 절점의 휨 모멘트 $[m_{ij}]$ 가 주어졌으므로 임의의 단위 하중에 의한 임의 지점의 휨 모멘트는 (14)식으로 계산된다. 예컨대 1 지점 휨 모멘트의 影響函數는 단위하중이 작용하는 경간에 따라서 표 2와 같은 연속함수로 주어지고 이것으로부터 M_1 -영향선을 10 m 간격으로 계산한 결과는 그림 5과 같다.

5. 結 論

연속보나 라멘을 계산하는 모멘트 分配法은 構造 工學을 하는 사람에겐 너무나 잘 알려진 교과서적

표 2. M_1 -영향선 함수

하 중 위 치	영 향 함 수
	$M_1 = M_{12} = -m_{11}(FEM)_{10} = 0.53589 \times \frac{x(50^2 - x^2)}{2 \times 50}$
	$M_1 = M_{12} = (FEM)_{12} - m_{11}(FEM)_{12} - m_{12}(FEM)_{21}$ $= \frac{-1}{50^2} x(50-x) \{0.46411(50-x) + 0.12440x\}$
	$M_1 = M_{12} = -m_{12}(FEM)_{23} - m_{13}(FEM)_{32}$ $= \frac{1}{50^2} x(50-x) \{0.12440(50-x) + 0.033493x\}$
	$M_1 = M_{12} = -m_{13}(FEM)_{34} - m_{14}(FEM)_{43}$ $= \frac{-1}{50^2} x(50-x) \{0.033493(50-x) + 0.009569x\}$
	$M_1 = M_{12} = -m_{14}(FEM)_{45}$ $= 0.009569 \times \frac{x(50-x)(100-x)}{2 \times 50^2}$

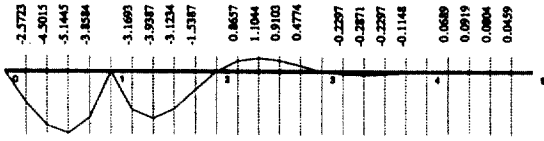


그림 5. M_1 영향선도.

방법이나 計算過程을 프로그램화하기는 분배법의 작성과정 등이 번거로와 그리 용이하지는 않다.

그러나 分配過程은 절점별 總調整 모멘트를 미지수로 할 때 聯立方程式으로 직접 적어지며 그 해도 되풀이 산법으로 간단히 구해진다. 이러한 방정식을 이용하면 物理的으로는 분배법과 똑같이 弛緩의 개념을 그대로 유지하면서 數學的으로는 프로그램화가 간편한 질서정연한 해법이 성립될 수 있다.

이 해법은 통상 變位法과 같은 미지수를 가지며 應力法에서처럼 정정수계의 선정이 필요없고 식을 세우고 푸는 과정이 直接的이며 一貫性 있어서 전산(programming)에 알맞다.

調整方程式법은 분배법에서처럼 가로 흔들이(side sway)가 있는 라멘에는 직접적으로 적용이 안되나 분배법에서 이를 해결하는 것과 똑같이 수평변위의 拘束과 解除를 고려하는 과정에서 모멘트 분배법대신 조정방정식의 적용이 가능하며 그 적용과정은 분배법보다 훨씬 편함은 말할 것도 없다.

參考文獻

1. Hardy Corss, "Analysis of Continuous Frames By Distributing Fixed-End Moments", *Trans. of ASCE*, Vol. 96, Paper 1793 (1932).
2. B. Rawling, "The General Moment Distribution Analysis of Space Frames".

3. Lino Quirko, "Generalization of Hardy Cross Method", *Journal of the Structural Division*, Proceedings of ASCE, Vol. 91, No. ST5, October, 1965.
4. Ralph R. Mazingo, "Matrix Distribution", *Journal of the Srtuctural Division*, Proceedings of ASCE, Vol. 94, ST4, April, 1968.
5. James Michalos, "Numerical Anaysis of Continuous Frames in Space", *Trans. of ASCE*, Paper No. 2685, September, 1953.
6. Jan J. Tuma, "Analysis of Continuous Beams by Carry-Over Moments", *Journal of the ASCE*, Vol. 84, No. ST5, September, 1958.
7. Sven Olof Asplund, "Matrix-Analysis of Successive Momemt-Distribution", International Association of Bridge and Structural Engineering Publications, 1955, pp. 17-28.
8. E. Light, "Generalized Slope-Deflection and Moment Distribution Methods for the Analysis of Viaducts and Multi-Bay, Rigided Partal Frames", *The Structural Engineer*, Vol. 36, Jan. 1958, pp. 21-33.
9. 趙顯榮, "Cross 分配過程의 級數公式에 의한 한處理法", *대한토목학회지*, 第15卷, 第1號 및 第16卷, 第1號, 1968.
10. 趙顯榮, "行列級數를 利用한 彈性 받침 連續보의 解析", *대한토목학회지*, 第17卷, 第2號, 1969.
11. 趙顯榮, "複斜材 트러스의 直應力 分配法에 의한 影響線의 解析", *대한토목학회지*, 第11卷, 第4號, 1963.
12. 趙顯榮, "立體 뼈대의 電算을 위한 Cross概念의 行列에 의한 一般化", *대한토목학회 창립 20주년 기념논문집*, 1972, pp. 102-111.
13. 趙顯榮, "引導 매트릭스를 利用한 매트릭스 分配法 및 調整方程式法에 관한 研究", *釜山大學校 工科大學 附設 生産技術研究所 研究報告*, 第14輯 別刷 1975.

(接受: 1994. 2. 15)