

# 프랙탈과 고분자과학

류 주 환

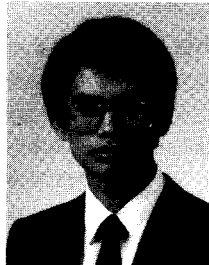
## 1. 서론

프랙탈은 엔트로피의 뒤를 이어서 흔히 사람들의 입에 오르내리는 용어가 되었다. 이러한 현상은 프랙탈이 소개된 것이 겨우 20여년 전임을 생각할 때 놀라운 일이 아닐 수 없다. 프랙탈 개념을 바탕으로 한 연구 결과들이 고분자 분야를 포함한 재료 분야에서 다양하게 발표되고 있다. 이러한 프랙탈을 주제로 몇 가지 기본적인 개념들의 소개로부터 시작하여 고분자과학의 어떤 분야에 어떤 방식으로 그것들이 적용되는지, 그리고 그 의의는 무엇인지 살펴보고자 한다.

프랙탈이란 말은 '부서진' 또는 '불규칙한'이라는 뜻을 가진 라틴어 형용사 'fractus'에서 유래되었다. '쪽거리'라 번역되기도 하지만 여기서는 의미의 확대를 위해 프랙탈이라는 용어를 그대로 사용하기로 한다. 뒤에 더욱 명백하게 되겠지만, 일단 프랙탈을 '자기유사성(self-similarity)을 가진 도형'이라 정의할 수 있다. 그러나 자기유사성을 가졌다고 해서 반드시 프랙탈인 것은 아니라는 사실을 미리 지적한다. 실상 프랙탈 개념은 인간이 미지의 영역으로 남겨두었던 혼돈과 복잡성 및 다양성의 영역들을 이해하는 하나의 틀을 마련해 주었다. 그것은 단순한 도형에 대한 기술로부터 시작하여 우리들의 세계관의 변화까지 요구하고 있다. Barnsley는 그의 책에서 다음과 같이 경고하고 있다.<sup>1</sup> "프랙탈 기하는 당신이 세상을 달리 보게 만들 것이다. 더 이상 읽어가는데에는 위험이 따른다. 당신은 자칫하면 구름, 숲, 은하, 잎사귀, 새의 깃, 바위, 산, 거센 물의 흐름, 카펫, 벽돌, 등등의 허다한 것들에 대한 어린 시절의 꿈을 잊어버리게 될 것이다. 이러한 사물들에 대한 당신의 해석은 예전과는 결코 같지 않게 될 것이다."

과학은 자연 현상에 대하여 수식으로 표현된 가설을 설정하고 그를 실험적인 방법으로 검증·확인 또는 수정·보완하고 가설을 보다 일반화하는 방향으로 진행되어 왔다.

이런 과정에서 예측은 중요한 검증 역할을 한다. 성공적인 가설, 환언하면 이론은 타당한 예측을 할 수 있어야 하며 예측에 입각한 실험 결과가 또한 이론과 합치되어야 한다. 이러한 과학은 주로 결정적인 현상들을 다루어 왔다. 결정론의 극단에 Laplace의 Demon이 있다. Laplace는 '현재의 순간에 우주에 있는 모든 객체들의 정확한 위치와 속도, 그리고 그들에게 미치는 힘을 알 수 있는 지적인 존재가 있다면 이 존재는 인과율에 따라서 과거나 미래에 대한 모든 것을 계산해서 알아낼 수 있을 것이다'라는 극단적인 결정론의 예를 제시했다. 반면 다른 극단에는 양자역학의 근간을 이루는 법칙의 하나인 Heisenberg의 불확정성 법칙이 있다. 그에 의하면 한 입자의 운동량과 위치를 동시에 정확하게 측정하기는 불가능하며 나아가서 그 두 가지 물리량은 근원적으로 동시에 정확하게 정의될 수도 없다. 이러한 결정론과 불확정성의 법칙을 절충한 것으로 '짧은 시간 동안 대략 같은 원인으로부터 대략 같은 결과가 귀결한다'고 하는 '약인과율'(Weak Causality)이 있으며 이것이 프랙탈이나 혼돈이론의 기초 정신이 된다. 학문의 대상이 되는 프랙탈이나 혼돈은 결정론적임을 상기해야 한다. 이들은 일정한 법칙들로부터 생성되기 때문이다. 우리는 구름의 형상, 날씨, 식물의 외양, 난류, 주식의 등락 등등의



류주환

1983 서울대학교 섬유공학과(공학사)  
 1986 미국 Case Western Reserve University, 고분자학과(공학석사)  
 1989 미국 Case Western Reserve University, 고분자학과(Ph. D.)  
 1989~1990 미국 Case Western Reserve University, 물리학과 Post-Doc  
 1990~ 현재 렉키고분자연구소 선임연구원

### Fractals and Polymer Science

(주) 렉키기술연구원 고분자연연구소(Juwhan Liu, Lucky Research Park, Petrochemicals and Polymers, P. O. Box 108, Yusung, Taejon 305-343, Korea)

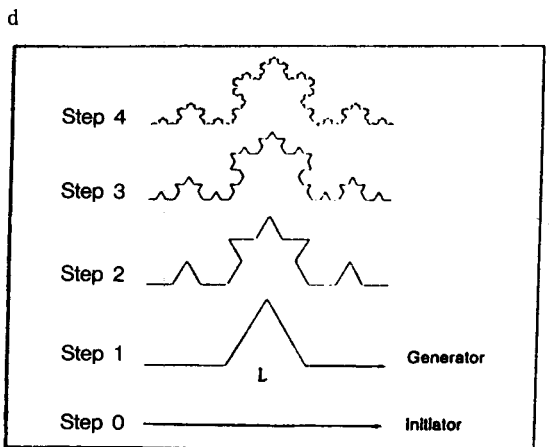
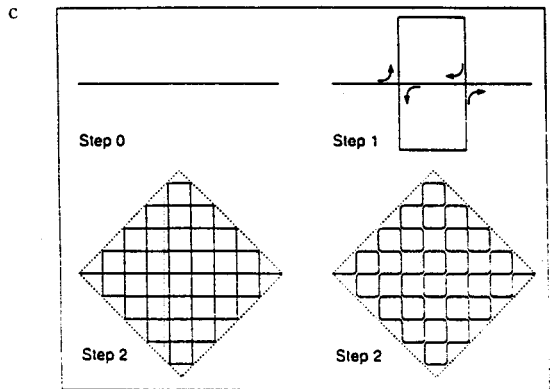
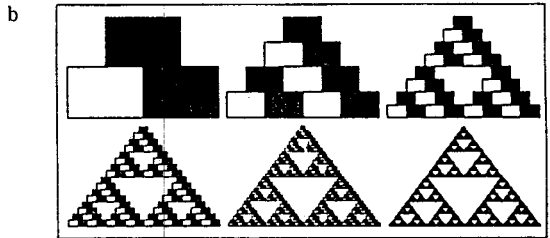
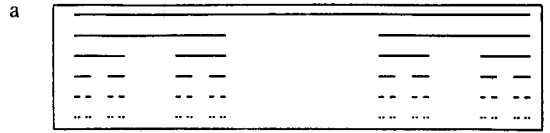
자연과 사회 현상에서 불규칙한 측면들을 목격해 왔다. 이러한 해석 불가능했던 영역에 대한 획기적인 이해의 틀이 프랙탈 개념을 통하여 마련되었다고 할 수 있다. 어쩌면 이것은 '자연에 랜덤인 것은 아무것도 없다. 랜덤인 것처럼 나타나는 어떤 현상은 우리들의 지식이 불완전하기 때문에 그렇게 보일 뿐이다' 라고 한 스피노자의 말을 지지하고 있는 것처럼 보인다. 한 개 또는 수 개의 단순한 법칙의 동일한 또는 유사한 방식으로 반복 적용함으로써 복잡한 현상들과 나아가서 일견 혼돈으로 보이는 현상들까지 얻을 수 있다는 생각은 자연의 근본법칙이 간단할 것이라는 인류의 끊임없는 믿음과 생명 현상과 진화 현상까지를 포함한 많은 자연현상들이 복잡성·다양성의 외관으로 드러난다는 사실의 두 측면을 연결해주는 고리로 작용할 수 있다. 이에 유사한 관점을 견지하는 견해들로는 complexity 이론<sup>2</sup>이나 quasicrystal의 존재에 대한 주장,<sup>3</sup> 그리고 self-assembly<sup>4</sup> 등이 있다.

프랙탈의 응용범위는 상당히 넓으며, 자연과학뿐만 아니라 사회과학에까지 그 응용 범위를 확대하고 있다. 컴퓨터 화상의 압축과 통신에서부터 기상현상의 예측, 심장기능이나 인간 심리의 예측, 하천의 발달 연구, 채광 등의 지질학의 응용, 재료 연구에의 적용, 그리고 우주의 구조나 Olber의 파라독스(밤하늘이 왜 검은가에 대한 질문인데 우주의 구조에 대한 이해와 밀접한 관련이 있다)에 대한 논의<sup>5,6</sup>에 이르기까지 다양한 분야들이 프랙탈 개념에 의한 연구 대상이 된다. 본고에서는 우선 프랙탈의 기본 개념을 일부 본 논의에 적합한 측면에서 기술한 후, 프랙탈 차원과 scaling 법칙, percolation과 재정규화(renormalization), 고분자 연구에의 응용, 그리고 마지막으로 결연의 순서로 기술하고자 한다. 그리고 프랙탈 개념은 근본적으로 혼돈(chaos) 개념과 밀접한 연관을 갖고 있지만 여기서는 혼돈에 대해서는 다루지 않기로 한다.

## 2. 기본개념<sup>7,8</sup>

프랙탈을 구성하는 방식들을 이해하는 것이 프랙탈을 이해하는데 필수적이다. 가장 단순한 방식이 기본적인 도형적인 조작의 반복이다. 도형적인 측면을 강조한 프랙탈의 예로서는 Cantor 집합, Sierpinski gasket, 공간을 채우는(space-filling) 곡선의 한 예인 Peano 곡선, 위상기하학적으로는 1차원이지만 무한대의 길이를 갖는 Koch 곡선, 무한대의 표면적을 가지나 용적은 0인 Menger 스펀지, 그리고 악마의 계단 등이 있다. 그림 1에 이들을 구성 방법을 중심으로 보였다. 프랙탈 도형 하나 하나가 매우 흥미로운 성질을 갖고 있으며, 흔히 직감적으로 알고 있는 도형에 대한 선입관을 거부한다. 도형적인 조작에 관련된 사항을 보다 자세하게 설명하기 위하여 Koch 곡선을 예로 들기로

한다. Koch 곡선은 그림 1d에 보인 바와 같은 한 직선을 삼등분 하여 그 중 가운데 직선을 같은 길이의 두 직선으로 대체하는 과정을 무한히 반복시키면 얻어지는 도형이다. 이 Koch 곡선의 자기유사성은 명백하다. 즉, 각 부분은 모체 곡선을 1/3로 축소한 형태를 지닌다. 처음의 선분의 길이를



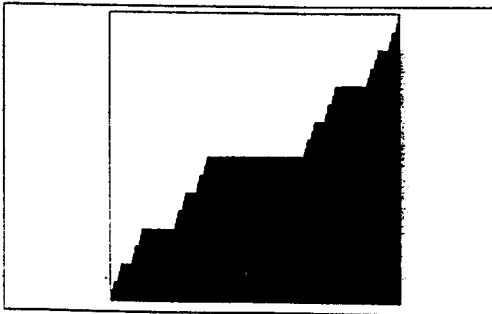
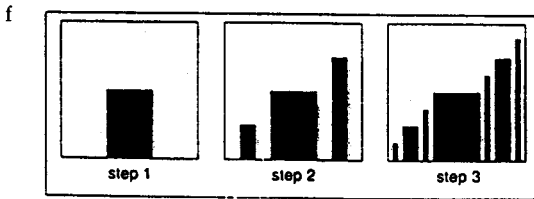
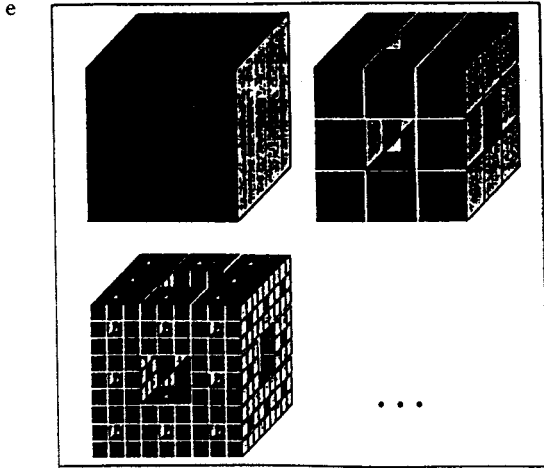


그림 1. 몇몇 대표적인 프랙탈 도형의 구성 방법. a. Cantor 집합 구성의 처음 단계들. 이를 무한히 반복하면 점의 '먼지'로 구성된 Cantor 집합이 얻어진다. b. 사각형을 기본단위로 사용한 Sierpinski gasket의 구성의 처음 단계들. 최종적으로 얻어지는 형태는 마지막 단계와 유사하다. c. Peano 곡선 구성의 처음 단계들. 이를 무한히 반복하면 점선으로 표시된 사각형이 완전히 채워지는 형태가 된다. d. Koch 곡선의 생성 과정. e. Menger 스펀지 구성의 처음 단계들. 이를 무한히 반복해서 얻어지는 Menger 스펀지의 표면적은 무한대이지만 용적은 0이다. f. 악마의 계단 구성의 처음 단계들과 최종 모습.

L이라고 하면 그것이 다음 단계에서는 각각 길이가  $L/3$ 인 4개의 선분으로 되므로  $L \cdot 4/3$ 이 되며,  $k$ 번째 단계에서는  $L \cdot 4^k/3^k$ 이 된다. 따라서 각 단계에서 곡선의 길이는  $4/3$ 의 인자로 증가한다. 이 사실은 프랙탈 차원을 논의할 때 다시 언급될 것이다.

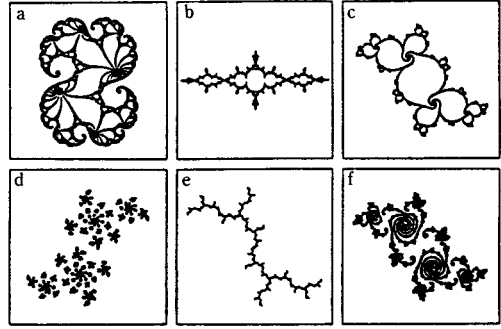


그림 2. Julia 집합의 도형들.

프랙탈을 구성하는 두 번째 방식은 iteration에 기초한 방법이다. 대표적으로 Julia 집합과 Mandelbrot 집합이 이에 속한다. 이들은 서로 밀접한 관계를 이룬다. Julia 집합은 다음과 같은 iteration 식을 사용하여 얻어진다.

$$z \leftarrow z^2 + c \quad (1)$$

여기서  $z$ 와  $c$ 는 복소수이며,  $c$ 는 임의의 상수이다. 주어진  $c$ 에 해당하는 Julia 도형은  $z$ -평면 상의 image로서 얻어진다.  $z$ -평면 상의 각 점에 대하여 식 (1)에 의한 iteration을  $k$ 번을 행하여 만일 발산하면 그 점을 'escape set'이라 부르고 0의 값을 부여하고 발산하지 않으면 그 점을 'prisoner set'이라 부르고  $k$ 의 값을 부여한다.  $k$ 를 증가시키며 이러한 과정을 반복하면  $z$ -평면의 각 점에 값들이 부여되는데 이것이 곧  $c$ 에 해당하는 Julia 도형이다. 그림 2에 몇 개의 Julia 도형들을 보였다. 그리고 Mandelbrot 집합도 식 (1)에 기초한다. 그러나 Mandelbrot 집합은 Julia 집합의 경우에서와는 달리  $c$ -평면 상의 image로서 얻어진다.  $c$ -평면 상의 각 점에 대하여 초기 값으로  $z=c$ 로 놓고 식 (1)의 iteration을 행한다. 그리고 Julia 집합의 경우와 마찬가지로 방법으로  $c$ -평면 상의 각 점에 대하여 값들을 부여하면 Mandelbrot 도형이 얻어진다. Mandelbrot 집합은 한가지 도형으로 이루어져 있는 반면 Julia 집합은 무한대 수의 도형으로 이루어져 있다. 그리고 각각의 Julia 도형은 Mandelbrot 도형의 한 점에 해당한다. Mandelbrot 도형의 한 부분을 아무리 크게 확대해도 수학적으로 정의되기 때문에 자세한 형태가 드러난다. 그림 3에 Mandelbrot 도형의 전체적인 모습과 그 중 한 부분을 약 27억 배 확대한 모습을 함께 보였다. 놀라게도 27억 배 확대한 그림의 아래쪽 상단 부분에 원래의 모습이 다시 드러나 있음을 볼 수 있다. 거시 세계와 미시 세계의 밀접한—그들이 같은 물리법칙에 의해 거동하는 한—연관성을 암시하고 있다고 볼 수도 있을 것이다. 그리고 식 (1)과 유사한 형태의 iteration 식을 사용하여 무수한 변형을 얻을 수 있음은 물론이다.

프랙탈 도형을 얻는 방법으로서 이상의 반복적인 도형조

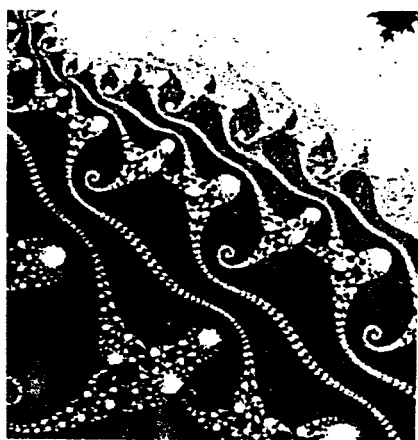
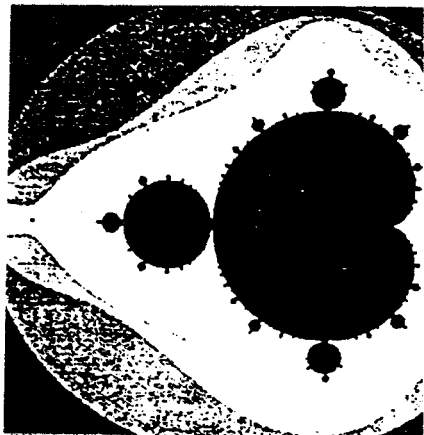


그림 3. Mandelbrot 도형의 전체 모습(위쪽)과 그 일부를 약 27배 확대한 모습(아래쪽).

작이나 iteration에 기초한 방법 외에 변환 방법, 혼돈 게임, 반복적인 조작에 랜덤성을 가미하는 방법, 또는 몇 가지 규칙의 복합적인 적용 등의 방법들이 있다. 변환 방법은 기본 도형의 선형 변환 조작인 확대 및 축소, 전단 변형 (shearing), 회전, 반사 등의 변환 조작을 통해 프랙탈 도형을 구성한다. 그림 4는 Barnsley의 양치(fern)라는 도형의 생성 과정을 보여준다. 이 중 위쪽 그림은 초기 image가 변환되는 단계를 보여준다. 1과 2는 각각 축소 및 회전, 3은 축소, 회전, 및 반사, 그리고 4는 축소와 약간의 회전 조작을 통해 얻어진다. 이러한 조작을 그렇게 얻어진 네 개의 도형에 또 각각 적용한다. 이것을 5번과 10번 반복하면 그림 4의 아래쪽 그림들이 얻어지고 이를 무한히 반복적용하면 Barnsley의 양치가 얻어진다. 여기서는 기본적인 도형이 사각형이었지만 어떤 형태의 image도 사용될 수 있다. 그리고 그 변환 방식 또한 무궁무진한 조합이 가능하다.

혼돈 게임은 랜덤수의 생성에 기초한 도형 생성 방식이

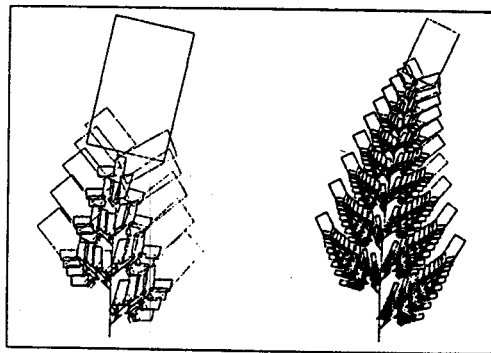
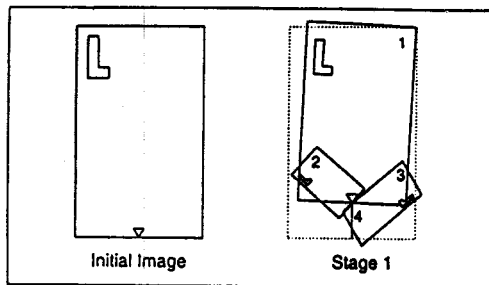


그림 4. Barnsley의 양치의 생성 과정(본문 참조). 아래의 왼쪽과 오른쪽 그림은 각각 5번째와 10번째 단계를 보여준다.

다. 이를 설명하기 위해서 다음의 한 예를 들기로 한다. 그림 5에서와 같이 x, y-평면 상에 1, 2, 3의 세 꼭지점을 설정한다. 그런 다음 랜덤으로 평면 상에 한 점을 정한다. 이 점을 게임점이라 부른다. 다음에 랜덤으로 꼭지점 중 하나를 선택하고 게임점과 선택된 꼭지점 중간을 새로운 게임점으로 선정한다. 이런 조작을 계속 반복하며 게임점들을 평면에 표시한다. 그 결과로 어떤 형태가 얻어질까 추측해 보자. 흥미롭게도 Sierpinski gasket이 얻어진다. 이와 유사한 방식으로 그림 4의 위 부분의 변환 조작에 관계되는 선형 방정식을 사용하여 Barnsley의 양치를 얻을 수도 있으며, 실제로 변환 조작에 의해 생성되는 프랙탈 도형들을 혼돈 게임을 통하여 얻을 수 있다. 어떻게 이것이 가능할까? 그것은 프랙탈 도형의 image 점들이 일종의 끌개(attractor)로 작용하기 때문이다.

이상과 같은 프랙탈 도형들 못지않게 중요한 프랙탈이 랜덤성만을 사용해 얻어지는 Brown 프랙탈이다. Brown은 수정(quartz)에 갇혀있는 물에서 작은 입자들이 제멋대로 움직이고 있는 것을 발견했다. 금세기에 들어와서야 Einstein 등에 의해서 이 Brown 운동에 대한 이해의 틀이 마련되었고, 그를 바탕으로 프랑스 물리학자 Perrin은 중력장의 영향하에서 확산하는 기체의 거동으로부터 기체가 Brown 입자들로 이루어져 있다는 것과 Avogadro 수가 대략  $6 \times 10^{23}$ 이라는 것을 밝혀내었다. 이 결과는 원자론의 확고한 증거로 받아들여졌고, 그 공적으로 Perrin은 1926

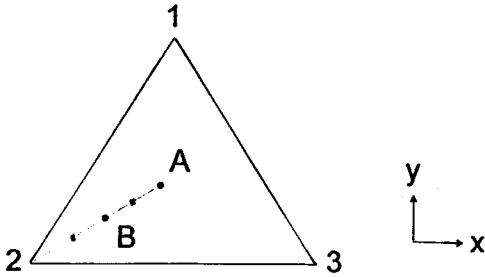


그림 5. Sierpinski gasket을 생성하기 위한 혼돈 게임. 현재의 게임 점(A)과 랜덤으로 선정된 꼭지점(여기서는 2)의 중간점이 새로운 게임점(B)이 된다.

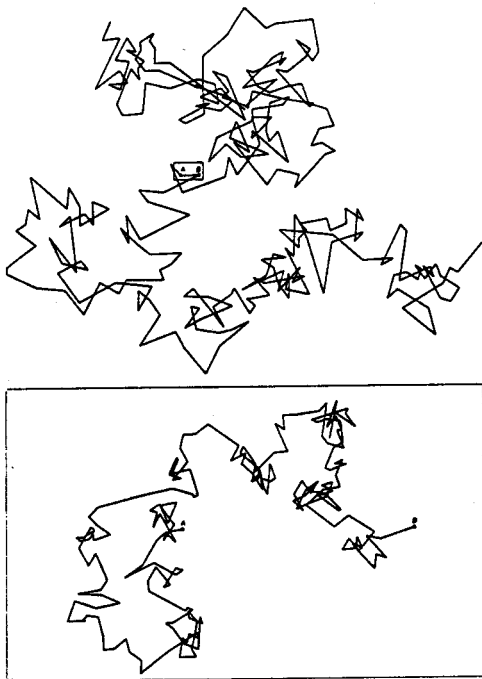


그림 6. 물에 떠있는 입자의 브라운 운동. a) 현미경을 사용하여 매 30초마다 입자의 위치를 관측했다. 직선은 관측된 위치들을 단순히 이은 것이다. b) a)의 A-B 사이를 더 자주 관찰할 경우에 얻는 입자의 궤적.

년에 노벨 물리학상을 받았다. Perrin의 관측에 의한 Brown 운동의 궤적이 그림 6a에 보여져 있다. 관측 대상인 입자는 랜덤으로 움직이는 물분자들과의 충돌에 의해서 다시 랜덤으로 운동을 한다. 따라서 Brown 운동의 프랙탈적 성질은 명백하다. 그림 6a에 직선으로 표시한, 관측되지 않은 두 위치 사이를 더 자주 관찰하면 그림 6b와 같은 결과를 얻는다. 이는 분자수준의 척도까지 확대하여도 마찬가지이다. 따라서 척도가 변하여도 자기유사성, 즉 이 경

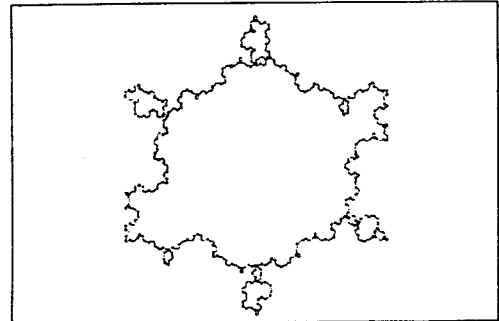
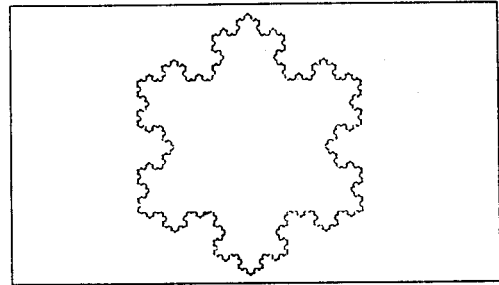


그림 7. 정상적인 Koch 눈송이와 랜덤 Koch 눈송이.

우에 랜덤성 또는 통계적 분포는 여전히 유지된다. 고분자 과학에서 Brown 운동 또는 랜덤 walk는 고분자 사슬 통계이론의 근간이 된다. 이는 고분자의 입체상태(conformation)에 대한 묘사로부터 고무 탄성 이론, 나아가서 점 탄성 이론에 적용된다.

프랙탈 도형을 얻는 방법과 관련하여 마지막으로 언급될 사항은 규칙적인 반복 조작에 랜덤성(randomness)을 가미하는 것이다. 한 예로서 그림 7에 Koch 곡선을 세 개 이어서 만든 소위 Koch 눈송이와, 정상적인 Koch 곡선을 만들 때와는 달리 각 단계에서 generator의 방향을 랜덤으로 적용하여 생성시킨 랜덤 Koch 눈송이를 보였다. 이러한 랜덤성의 도입을 통하여 프랙탈 도형이 더욱 다양한 형태를 띠게 된다.

이상과 같은 또는 변형된 프랙탈 구성 방식들을 사용하여 다양한 형태의 image를 만들어 낼 수 있다. 이들은 식물의 형상, 산이나 강 등의 지형, 새의 깃 등등의 자연 모습에서부터 예술성이 높은 추상적인 형태들에게까지 이른다.

### 3. 프랙탈 차원과 Scaling 법칙

프랙탈 성질을 정량화 하거나 어떤 도형이 프랙탈인지 아닌지 검증하기 위하여 주어진 도형이나 물리적 현상에 관여하는 차원을 조사하는 방법을 사용할 수 있다. 차원을 정의하는 문제는 의외로 복잡하고 어려운 수학적 개념들을

필요로 한다. 문헌에 자주 언급되는 차원의 종류만 해도 유클리드(Euclidean) 차원, 위상기하학적인(topological) 차원, capacity 차원, Hausdorff 차원, 프랙탈 차원, 정보(information) 차원 등등 여러 가지가 있다.<sup>9,10</sup>

가장 직관적인 접근 방식은 차원을 한 객체가 함유하는 점들을 유일하게 기술하는 독립적인 파라미터 또는 좌표들의 수라고 정의하는 것이다. Poincaré는 점을 0차원이라고 하고, 선분은 점(일차원)에 의해서 둘로 나누어지니까 1차원, 사각형은 직선에 의해서 둘로 나누어지니까 2차원, 그리고 입방체는 사각형에 의해서 나누어지니까 3차원, 하는 방식으로 차원을 정의했다. 위상기하학적인 차원은 예를 들어 원이 변형을 통해서 사각형, 또는 Koch 눈송이로 변화할 수 있고 그들은 위상기하학적으로 동등하기 때문에 모두 2차원 객체들로 간주된다. 그러나 이와 같은 단순한 개념들이 다룰 수 없는 경우가 많이 있다. 위에 소개한 Peano 곡선을 예로 들면, 이것은 엄연히 직선, 즉 일차원 물체로 이루어져 있다. 그러나 그 곡선의 외관은 공간이 선으로 채워진 일정한 크기의 사각형, 즉 이차원 물체이다. 극단적으로 말하면 차원조차 관찰자의 관점에 따라 좌우된다고 까지 볼 수 있다.<sup>11</sup> 이러한 난점을 해결하기 위한 한 가지 시도가 대상이 되는 객체를 어떻게 작은 도형들로 cover할 수 있느냐 하는 개념의 도입이다. 이것과 관련되는 사항들로 capacity 차원, covering 차원, Hausdorff 차원 등이 있다. Mandelbrot의 정의에 의하면 프랙탈은 Hausdorff 차원( $D_H$ )이 위상기하학적인 차원( $D_T$ )보다 엄격히 큰 객체이다. 여기에서  $D_H$ 가 정수가 아닌 경우가 포함된다. 그러나 Hausdorff 차원은 개념이 복잡하고 그 계산이 간단치 않다는 단점이 있다. 그래서 프랙탈 차원이 도입된다. 아래에 기술할 자기유사성 차원, 컴퍼스(compass ; 또는 divider) 차원, 그리고 box-counting 차원 등을 총체적으로 프랙탈 차원이라 부른다. 특히 box-counting 차원은 많은 경우에 Hausdorff 차원과 동일하다.

자기유사성 차원은 자기유사성 변환에 의해 자기유사성 기하(geometry)가 생성된다는 사실에 기초한다. 여기서 설명에 사용할 직선이나 사각형, 입방체 등은 자기유사성을 가졌으나 프랙탈은 아니지만 자기유사성 차원은 정의된다는 사실을 지적한다. 우선 사각형의 경우를 살펴보자. 축소인자가 1/3이면 원래의 사각형은  $3^2$ , 즉 9개의 축소된 사각형에 해당한다. 즉 자기유사성 차원은 2이다. 마찬가지로 입방체의 경우는 같은 축소인자에 대해  $3^3$ , 즉 27개의 축소된 입방체로 이루어져 있으며, 따라서 자기유사성 차원은 3이다. 즉 축소인자를  $s$ 라 하고, 자기유사성 차원을  $D_{SS}$ 라 하면 원래의 도형을 이루는 축소된 도형의 개수  $n$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$n = 1/s^{D_{SS}} \quad (2)$$

따라서  $D_{SS}$ 는 다음 식과 같이 주어진다.

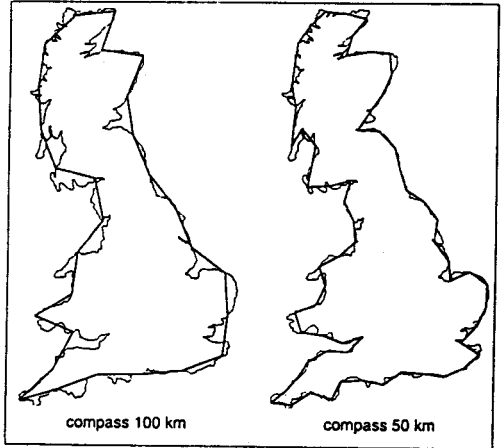


그림 8. 해안선의 길이의 측정. 좌측은 컴퍼스의 단위 길이를 100 Km로 놓은 것이고 우측은 50 Km로 놓은 것이다.

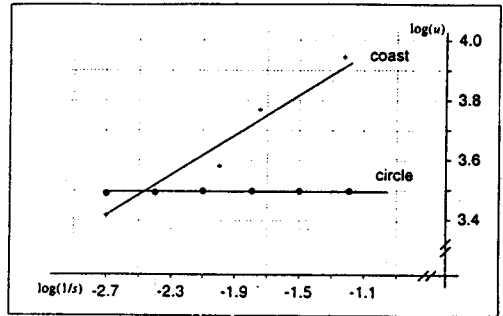


그림 9. 컴퍼스의 단위길이(s; Km)의 함수로 영국 해안선과 원의 길이(u; Km)를 측정된 결과.

$$D_{SS} = \frac{\log n}{\log(1/s)} \quad (3)$$

예를 들어 Koch 곡선은  $s=1/3$ 일 때 4개의 자기유사성 부분으로 나누어지므로  $D_{SS} = \log 4 / \log 3 \approx 1.2619$ 의 차원을 갖는다.

컴퍼스 차원에서 컴퍼스는 원을 그리는데 사용하는 문방구를 지칭한다. 컴퍼스 차원은 규칙적인 자기유사성을 보이지 않는 일반적인 곡선들의 경우에 유용하다. 전통적으로 유명한 영국 해안선의 길이에 대한 논의를 예로 드는 것이 좋을 것이다. 그림 8에 컴퍼스를 사용하여 단위 길이를 100 Km와 50 Km의 두 가지 경우로 놓고 지도에서 해안선을 측정된 결과를 보였다. 여기서 컴퍼스의 단위 길이(s)를 짧게 잡을수록 측정된 해안선의 길이가 길어진다는 사실을 간파할 수 있다.  $s$ 를 변화시키며 측정된 결과가 log-log 척도로 그림 9에 보여져 있다. 비교를 위해 같은 측정을 직경 1000 Km의 원에 대해 행한 결과가 또한 보여져 있다. 두 경우

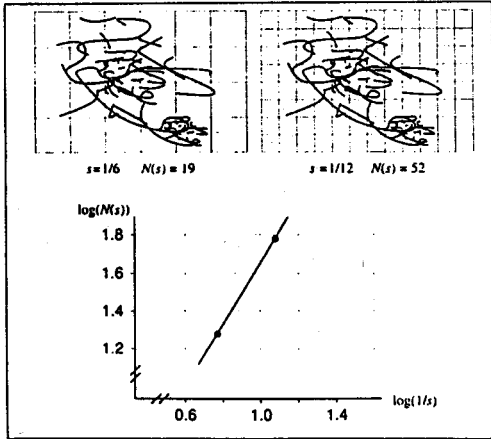


그림 10. Box-counting 차원의 측정 방법.

모두 직선으로 표시됨을 알 수 있다. 곧 측정된 길이를  $u$ 라 하면

$$\log u = d \log\left(\frac{1}{s}\right) + b \quad (4)$$

의 관계를 이룬다. 여기서  $d$ 는 직선의 기울기이고  $b$ 는 절편이다. 그림 9로부터 해안선의 경우  $d \approx 0.36$ , 그리고 원의 경우  $d \approx 0$ 임을 알 수 있다. 컴퍼스 차원  $D_C$ 는

$$D_C = 1 + d \quad (5)$$

로 정의된다.

Box-counting 차원은 mesh 즉 box를 도입하여 차원을 구하는 방법으로서 보다 복잡한 구조를 갖는 도형들의 경우에 용이하게 적용할 수 있다. 그림 10에 mesh의 크기( $s$ )가 큰 경우와 작은 경우를 보였는데, 각각의 경우에 객체의 일부분을 포함하고 있는 box들의 수( $N$ )를 구한다. 그 결과를  $\log N$  vs.  $\log(1/s)$ 으로 도시하고 식 (4)와 마찬가지로 기울기를 구하면 그것이 구하는 box-counting 차원  $D_{BC}$ 이다. 그림 10의 경우  $D_{BC} = \log(52/19) / \log 2 \approx 1.45$ 이다.

이상을 종합하면 프랙탈 차원들은 모두 척도( $s$ )의 변화에 따라 주목하는 대상의 어떤 성질이 어떤 방식으로 변하는지를 일종의 power law의 형태로 나타낼 때 관여하는 지수의 형태를 띠는 것을 알 수 있다. 예를 들어 길이  $u$ 와 척도  $s$  또는 그의 역수인 정밀도  $1/s$ 는

$$u = c(1/s)^d = c/s^d \quad (6)$$

의 관계를 이룬다. 여기서  $c$ 는 비례상수이고  $d$ 는 power law의 지수이다.  $s$ 를 길이 측정의 단위로 이해하면 간단히  $c=1$ 로 놓을 수 있다. 그리고 부분의 개수가  $n$ 이므로

$$u = n s \quad (7)$$

로 주어진다. 식 (3), (6), 및 (7)을 비교하면

$$D_{SS} = 1 + d \quad (8)$$

로 주어짐을 알 수 있다. 이 power law는 scaling 법칙의 근간을 이룬다. 그런데 scaling 법칙의 적용에 있어서와 마찬가지로 power law를 적용할 때에는 그것이 관심 대상이 되는 특정한 영역에서만 유의하기 때문에 함부로 다른 영역에까지 적용해서는 안되며, 또 마찬가지로 관점에서 power law는 경우에 따라 다른 형태를 취한다는 사실을 염두에 두어야 한다.

프랙탈 차원, 또는 scaling 법칙은 복잡한 현상과 구조를 갖고 있는 물리적 대상들에 대해서 새로운 규칙성을 발견하도록 해주고 나아가서 그들을 이해할 수 있게 도와준다. 프랙탈 차원은 한계가 없지는 않는데 그 중 하나는 위에서 살펴본 바처럼 몇 가지 종류의 차원이 존재한다는 사실이다. 그리고 한 가지 구조에서 프랙탈 차원들이 분포를 이루고 있을 가능성이 있는데 이런 경우 단순 적용이 어렵다는 것이다. 이를 극복하기 위해 최근 multifractal이라는 개념도 등장하고 있다. 프랙탈 차원을 종합하는 의미에서 몇 가지 프랙탈 차원의 예들을 표 1에 모아보았다.

Scaling 법칙은 또 다른 총설을 필요로 할 터인데 여기서는 프랙탈의 개념에 입각하여 간단히 그 의의를 살펴보기로 한다. Scaling 법칙에서는 어떤 시스템의 크기  $N$ 의 변화, 즉 척도(scale)의 변화에 따라 관심 대상인 성질  $P$ 가 어떤 방식으로 변하는지를 다음과 같은 power law의 형태로 나타낸다.

$$P \sim N^v \quad (9)$$

이것은 바로 식 (6)의 일반화이다. Scaling 법칙을 정립한 deGennes은 고분자의 작은 척도에서 볼 수 있는 국소 성질들과 큰 척도에서 볼 수 있는 전체 성질들을 대비시켜서, 어느 정도 이상의 척도 영역에서 전체 성질들을 구할 때, 사슬의 정적인 유연성과 동적인 유연성을 고려하면 자세한 국소 성질들의 차이를 무시할 수 있음을 보이고 있다

표 1. 프랙탈 차원들

악마의 계단	1.0
Peano 곡선	2.0
Cantor 집합	0.6309
Sierpinski gasket	1.5850
Menger 스핀지	2.7268
Norway의 해안(Fjord)	1.52
영국의 해안	1.36
미국 유타주의 경계	1.0
Koch 곡선	1.2619
Brown 운동	2.0
몸의 용적 대비 대사율	2.25
인간의 두뇌	2.73~2.79
인간의 동맥	2.7
우주의 구조	1과 2 사이

다.<sup>12</sup> 여기서 국소 성질에는 입체상태, 분자들의 운동, 측쇄기의 영향 등이 포함되며 전체 성질에는 사슬의 크기, 농도, 상호작용 파라미터 등이 포함된다. Scaling은 크게 두 가지 즉, 기하학적인 scaling과 동적 과정에 관여하는 scaling으로 분류된다.

#### 4. Percolation과 재정규화

Percolation과 재정규화는 scaling 개념의 측면에서 프랙탈과 밀접한 관련을 맺고 있다. Percolation은 'flow through'라는 의미를 갖는 말인데 원래 다공질 암석 위에 부은 액체가 이어진 구멍을 통하여 아래로 흘러나오는 현상을 지칭한다. 이 용어는 다공질 재료를 통한 액체의 흐름뿐 아니라 전기의 흐름, network을 이루는 고무의 탄성 등의 문제에서 자주 사용된다. Percolation을 다룰 때 주로 격자를 상정한다. 그리고 편의상 격자점들을 잇는 선을 bond라고 부른다. 여기서 전기의 흐름을 예로 들면 편리하다. 전체 bond들 중  $p$ 의 비율에 해당하는 bond들을 랜덤으로 선택해서 도선으로 대체한다고 할 때,  $p$ 가 얼마 이상이어야 격자 한 끝에서 반대까지 어느 경로로라도 도선으로 이어져서 전기가 흐를 것인가 하는 것이 문제가 된다. 고무의 경우에도 고분자들이 network로 이어져 있어야 탄성이 발현될 수 있음은 물론이다. 2차원 격자의 경우 그때의  $p$ , 즉 임계확률  $p_c$ 는 약 0.593이며  $p > p_c$ 의 범위에서 전도도  $\sigma$ 는

$$\sigma \sim I \sim (p - p_c)^\tau \quad (10)$$

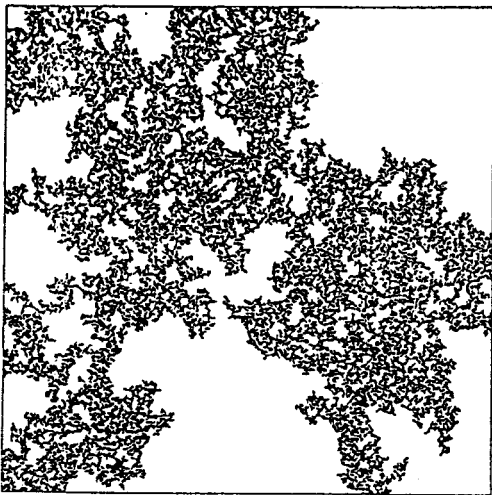


그림 11. 2차원 격자를 사용해 임계확률에서 얻은 percolation cluster.

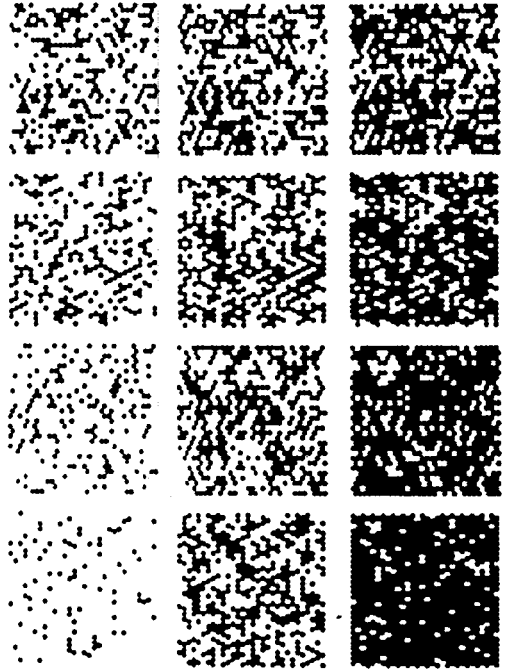


그림 12. 맨 위의 격자들에 대해 재정규화를 행한 결과. 왼쪽부터  $p=0.35 < p_c$ ,  $p=p_c$ ,  $p=0.65 > p_c$ 의 경우이다.

에 따른다. 여기서  $I$ 는 전류이고  $\tau$ 는  $d=2$ 일 때 약 1.3, 그리고  $d=3$ 일 때 약 2.0인 일반 상수이다. 그림 11은  $p = p_c$ 에서 생성시킨 percolation 격자 중에서 가장 큰 cluster 만을 보인 것이다.  $p < p_c$ 에서는 격자 크기 수준의 cluster는 생성되지 않다가  $p \approx p_c$ 에서 갑자기 생성되기 시작한다. 이상이 랜덤 percolation 모델이며, 격자의 형태나 bond를 선택하는 방법 등의 변화를 통해 다른 다양한 percolation 모델들을 생성할 수 있다. 플라스틱/고무 블렌드에서 함량에 따른 morphology와 modulus의 관계가 percolation 관점에서 고찰되었으며,<sup>13</sup> 다음 장에 고분자 계면 연구에 percolation 모델을 사용한 예가 소개되어 있다.

그런데 임계확률  $p_c$ 의 결정에 재정규화 이론(renormalization group theory)이 아주 유용하게 사용될 수 있다. 이것은 percolation cluster, 즉 임계상태에서 얻어지는 큰 cluster가 자기유사성을 갖고 있기 때문에 가능하다. 재정규화 이론은 상전이 현상의 규명을 위해서 제안되었으며 통계역학적인 배경을 갖고 있다.<sup>14</sup> 이 방법에서는 주목하는 시스템의 척도를 반복적으로 크게 하거나 작게 한다. 환원하면 재정규화를 행한다. 그러면 위의 percolation 격자의 경우, 그림 12에 보인 것처럼 자기유사성을 갖는 임계상태의 cluster의 크기는 일정하게 유지되는 반면 그 전후의 cluster들의 크기는 급격히 작아지거나 커진다. 따라서 임계점을 보다 정확히 결정할 수 있다. 재정규화는 이처럼



임계현상, 즉 전이 현상의 연구에 유용하다.

## 5. 고분자 연구에의 응용

프랙탈 개념을 통하여 고분자 물리의 몇몇 중요한 원리에 대한 직감적인 이해가 증진되어왔다. 선형 고분자의 랜덤 walk나 self-avoiding 랜덤 walk 등을 새롭게 이해하는데 프랙탈 또는 scaling의 관점에 도움을 주었으며, 분지 고분자의 경우 격자에서 격자의 occupation 확률  $p$ 가 0에 근접할 때 cluster로 남는 소위 'lattice animal' 들에 관한 묘사에도 프랙탈이 이용되었다.<sup>43,44</sup> 그리고 network이나 gel, 즉 가교와 gelation, dendrimer와 같은 경우에 분자수준의 구조,<sup>15</sup> 계면/표면, 상분리, 응집, 흡착, 다관능기 단량체들의 팽창합, 파괴 현상, membrane,<sup>16</sup> 복합재료 시스템, 분해, 등등의 많은 분야에 적용되어왔다. 이 중 대표적인 몇 가지 사항을 기술하기로 한다.

### 5.1 선형 고분자의 크기와 용액이론

선형 고분자의 크기에 대한 이론적인 고찰이 오랫동안 진행되어왔다. 우선 랜덤 walk를 가정하면, 크기의 한 척도인 말단-말단 거리의 제곱 평균  $\langle R^2 \rangle$ 은 단거리 상호관계(short-range correlations)만을 고려할 경우

$$\langle R^2 \rangle = NL^2 \quad (11)$$

으로 주어진다. 여기서  $L$ 은 랜덤 flight 사슬, 자유롭게 회전하는(freely rotating) 사슬, 또는 장애를 받는(hindered) 사슬에 있어서 각각 다르게 정의되는 한 link unit의 길이이고,  $N$ 은 link의 수이다.  $L$ 은 실제적으로 Kuhn의 persistence length로 이해된다. 사슬의 모델에 상관없이 식 (11)의 같은 scaling 법칙을 따른다는 사실이 중요하다. 반면에 self-avoiding 랜덤 walk(SARW)의 경우는 장거리 상호관계를 고려한다는 의미를 내포하며, 따라서 배제부피(excluded volume) 이론의 일종이 된다. 이 경우는

$$\langle R^2 \rangle \sim N^{2\nu} \quad (12)$$

또는

$$R \sim N^\nu \quad (13)$$

의 scaling 법칙을 따른다는 사실이 Flory에 의해서 일찌기 정립되었다.<sup>17</sup> 여기서  $\nu = 3/(d+2)$ 로 정의되는데 다시  $d$ 는 위상기하학적인 차원 또는 Euclid 차원이다. 그리고 식 (12)의  $R$ 은  $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ 을 의미한다.  $d=1$ 인 경우 식 (12)는  $\langle R^2 \rangle = L^2 N^2$ 이 되는데 이는 1차원상의 SARW는 당연히 직선을 결과한다는 사실과 합치한다.  $d$ 가 4보다 작은 경우에는  $\nu$ 가 Brown 운동, 즉 랜덤 walk의 경우의 프랙탈 차원  $D_B = 2$ 보다 작지만  $d=4$ 인 경우, 그리고 다른 고찰에서  $d > 4$ 인 경우에도 마찬가지로,  $\nu = D_B$ 가 된다. 즉 4차원이나

그 이상의 차원에서의 SARW는 랜덤 walk를 한다고 이해된다.

용액의 semidilute regime에서 사슬 간의 상호 침투가 일어나기 시작하는데 이때 삼투압  $\pi$ 는 농도  $c$ 에 대하여 다음의 scaling 법칙을 따른다.<sup>12,18</sup>

$$\pi \sim c^{3\nu(3\nu-1)} \sim c^{9/4} \quad (14)$$

두 번째 항의  $9/4$ 는  $d=3$ , 즉  $\nu=3/5$ 를 사용하여 얻어졌다. 이때  $R$ 은

$$R \sim c^{(2\nu-1)/(2-6\nu)} \sim c^{-1/8} \quad (15)$$

의 관계로 나타나는데 여기서 농도가 증가하면 사슬이 축소된다는 결론이 유도된다.

선형이고 유연한 고분자의 경우, 농축 용액과 용융상태에서 점도  $\eta$ 는

$$\eta \sim N^\epsilon \quad (16)$$

의 scaling 법칙을 따른다는 사실이 광범위한 실험을 거쳐 입증되었는데  $\epsilon$ 는 대략 3.4의 값을 취한다.<sup>18</sup> 이를 설명하기 위해서 de Gennes의 유명한 reptation 이론이 도입되었다.<sup>12</sup> 그러나 그 이론에 의하면  $\epsilon=3.0$ 의 값밖에 얻을 수 없어서 여러 수정이론이 제안되어왔다. 그 중 Scher와 Weiss 등의 이론에 의하여  $\epsilon=10/3$ 의 값이 얻어졌다.<sup>19,20</sup>

### 5.2 응 집

작은 입자들의 응집체(aggregate)들은 근본적으로 프랙탈의 형상을 띠는 경우가 많기 때문에 세라믹, 고분자 등의 분야를 포함한 재료분야에서 프랙탈 개념에 입각한 해석이 활발하게 진행되어 왔다. 응집체 프랙탈들은 질량 프랙탈과 표면 프랙탈로 나뉜다. 질량 프랙탈이란

$$M \sim R^{D_m} \quad (17)$$

의 scaling 법칙을 따르는 응집체를 말한다. 여기서  $M$ 은 질량이고  $D_m$ 은 질량 프랙탈 차원이라 불린다. 한편 표면 프랙탈은 공간( $d=3$ )에서 균일한 밀도를 갖지만 표면이 거칠면서 표면적  $S$ 가 다음의 법칙을 따른다.

$$S \sim R^{D_s} \quad (18)$$

여기서  $D_s$ 는 표면 프랙탈 차원이다.

이러한 응집체들의 프랙탈 차원을 구하는 방법에는 대표적으로 산란 기법들이 있으며 그 외에 흡착 기법, 그리고 전자여기의 직접적인 전이 등이 있다.<sup>21~23</sup> 산란 기법에서 산란 강도는

$$I \sim k^{-2D_m + D_s} = k^{-D_f} \quad (19)$$

으로 주어지며  $k$ 는 산란 wave vector이고 지수  $-D_f = -2D_m + D_s$ 는 Porod 기울기라 불린다. 이 기울기는 예를 들어 고분자 precursor에 의해 생성된 응집체에서는  $-1 \sim -3$ , 거친 표면의 콜로이드에서는  $-3 \sim -4$ , 그리고 평탄한 표

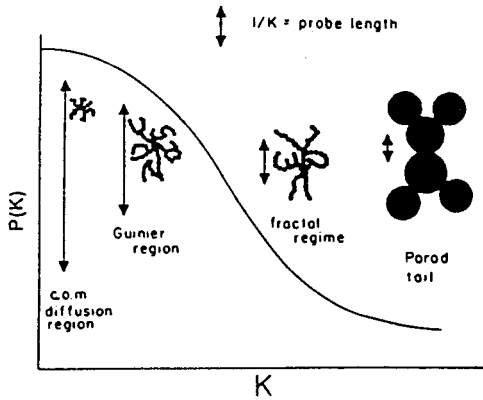


그림 13. 프랙탈 물체들에 대한 k에 따른 구조인자의 거동(본문 참조).

면의 콜로이드에서는  $-4$  정도이다. 그림 13에 프랙탈 물체들에 대해 k에 따른 구조인자(structure factor)  $P(k)$ 를 보였다. 무게중심(center of mass; c. o. m.) 확산 영역에서는  $kR \ll 1$ 이기 때문에  $P(k)$ 는 k에 무관하며  $P(k) \sim 1$ 이다. Guinier 영역에서는 일차입자들 사이의 내부간섭이 중요해지기 시작하며  $P(k) \sim 1 - 1/3(R_G^2/k^2)$ 이다. 프랙탈 영역에서는  $P(k) \sim k^{-D_f}$ 를 따른다. Porod tail에서는  $P(k)$ 가  $k^{-4}$ 에 따라 감소하는데 이것은 일차입자와 용매 간의 계면이 명확하고 따라서 일차입자 사이에 내부 간섭이 관여하지 않기 때문이다.

그리고 흡착 기법에서는 단면(cross-section)  $\sigma$ 가 다른 여러 흡착 분자를 사용한다. 응집체의 표면을 덮는 흡착 분자의 단층 용적(capacity)  $N(\sigma)$ 는

$$N(\sigma) \sim \sigma^{-D_s/2} \quad (20)$$

의 관계를 따르기 때문에  $D_s$ 를 구할 수 있다. 그러나 이 방법은 흡착과정이 비교적 복잡한 과정이며 따라서 기하학적인 상세함을 구별해 내지 못할 가능성이 있다는 제한이 있다. 또 전자여기의 직접적인 전이 방법은 donor와 acceptor를 사용하여 donor를 여기 시킨 다음 직접 acceptor로 전이시킬 때 관여하는 감쇠함수가 프랙탈 차원의 함수라는 사실을 이용한다. 이 방법은 anthracene을 충전시킨 vinyl-naphthalene 공중합체<sup>24</sup>와 doping시킨 고분자 필름 등의 다공성 재료의 연구 등에 적용되었다.

Poly(methacrylic acid)와 poly(ethylene glycol) 간의 응집에 미치는 소수성 말단기(pyrene)의 영향과 pH의 영향을 동적 광산란을 사용하여 측정된 결과 그림 14에 보인 두 가지 응집 모델 중에서 cluster-cluster 응집 모델을 따른다는 사실과 응집체들이 프랙탈이며 그 프랙탈 차원이 1.7임이 규명되었다.<sup>25</sup> 또한 salt의 첨가로 야기되는 polystyrene 구상 입자들의 응집을 정적 및 동적 광산란으로 측정하여 빠른 응집과 느린 응집을 구별하고 프랙탈 차원을 결

## Aggregation Models

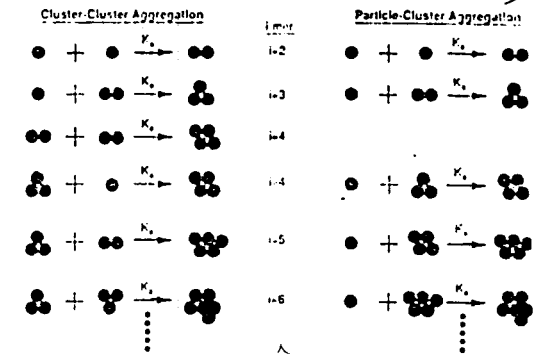


그림 14. 응집체 성장 모델들.

정한 연구도 있다.<sup>26</sup> 그 결과 입자 간 상호작용이 cluster들의 동적 성장에 뿐만 아니라 프랙탈 구조 및 cluster의 재구성의 정도에도 관여한다는 결론이 얻어졌다.

### 5.3 분지, Gelation 및 Network

Gelation 전후에 예측시 고분자의 구조를 규명하는데 프랙탈적 기하학 또는 프랙탈 차원이 유용하게 사용될 수 있다.<sup>27</sup> 그리고 gelation 전후에서 분지도가 높은 건강 분상 고분자의 프랙탈적 성질이 또한 규명되었다.<sup>28</sup> 연구 대상이 된 고분자는 pregel 상태에서 프랙탈 모델에 적합한 성장 kinetics를 보였으며, gelation 전과 후 모두 프랙탈 형상을 보였다. 그리고 이 시스템에 가해진 충전재와 oligomer가 modulus에 미치는 영향을 살펴봄으로써 적합한 성장 morphology들을 제안할 수 있었다.

동적역학실험에서 얻어지는 복소수 점도(complex viscosity)가 분자 cluster의 임의의 프랙탈 차원의 함수로 실험 진동수  $\omega$ 에 어떻게 의존하는지를 규명한 연구도 있는데,<sup>29</sup> 이의 적용을 통하여 진동수의 함수로 복소수 점도를 측정하면 고분자 시스템의 전체적인 구조에 대한 결론을 내릴 수 있다.<sup>30</sup> 그리고 gel을 형성하는 시스템들에서 scaling 법칙이 얼마나 적합하게 적용되는지에 대한 고찰이 삼관능기를 갖는 랜덤 분지를 갖는 고분자를 사용해서 실시되었다.<sup>31</sup> 여기서 percolation 이론과 Flory-Stockmayer 이론, 그리고 후자의 확장인 cascade 이론 등의 비교가 이루어 졌다. 또한 sol-gel 전이 근처에서 형성된 분지 silica 고분자의 semidilute 용액을 광산란으로 조사하여 팽윤에 의해서 프랙탈 차원이 변화한다는 사실을 실험적으로 밝혔다.<sup>32</sup> Alginate 수용액에서 mannuronate(M)와 gluronate(G)의 비를 바꾸어가면서 gel의 구조를 SAXS로 측정된 결과 G 성분이 많은 경우에  $D_f$ (식 17 참조)가 크다는 사실로부터 그 때의 gel 구조가 보다 밀도가 높다는 사실을 알 수 있었다.<sup>33</sup> 그리고 가교제로 divinylbenzene을 사용하여 얻어진 styrene의 microgel들은 정적 및 동적 성질들

이 scaling 법칙을 따르며 프랙탈 구조로 묘사될 수 있음이 보고되었다.<sup>34</sup>

#### 5.4 표면, 계면, 및 흡착

표면이나 계면에서의 고분자의 형상이나 분포 또는 성질들은 프랙탈 개념 적용의 좋은 대상이 된다. Cyclohexane 중에서 세 가지의 다른 다공성을 갖는 silica 표면에 polystyrene을 흡착 및 탈착시켜서 silica 표면의 형상이 흡·탈착 과정에 미치는 영향을 살핀 보고가 있다.<sup>35</sup> 여기서 탈착제로는 dioxane이 사용되었다. 흡·탈착 isotherm들을 pore 크기의 함수로 해석하는데 표면 프랙탈의 개념이 도입되었다. Pore의 직경과 고분자 크기의 비가 클수록 단순한 형상, 즉 작은 프랙탈 차원을 보였다. 고분자와 다양한 재료들의 표면들 간의 상호작용을 재료들의 표면 프랙탈 차원의 함수로 정리하여 유용한 정보를 얻어낼 수 있다.<sup>36</sup> 표면 프랙탈 차원은 평탄한 표면의 경우 약 2인 반면 거친 표면의 경우는 약 3이 된다. 하나의 결론으로, 표면의 불규칙성, 즉 프랙탈 차원을 높이면 고분자표면의 상호작용을 증가시키는 효과가 있음이 밝혀졌다. 따라서 표면의 거친 정도가 고분자-표면의 상호작용을 근본적으로 변화시킬 수 있음을 알 수 있다. 그리고 프랙탈 표면에서 고분자 사슬들의 흡착 거동을 이론적으로 규명한 평균장(mean-field) 이론이 또한 제안되어 있다.<sup>37</sup>

고분자 기질(substrate)의 금속화나 무정형 고분자들의 용접(welding)에 의해 얻어진 경계가 뚜렷하지 않은 계면의 구조 및 성질들을 규명하는데 gradient percolation 기법이 사용되었다.<sup>38</sup> 그러한 계면의 한 예로 전기화학적 증착 방법으로 얻어진 silver(A)와 polyimide(B) 간의 계면을 들 수 있다. B측으로 A가 확산되어 들어간다고 할 때 B측으로의 거리를  $x$ 라고 하면 1차원 관점에서 A의 농도 분포  $p$ 는  $x$ 와 시간  $t$ 의 함수로 다음과 같이 주어진다.

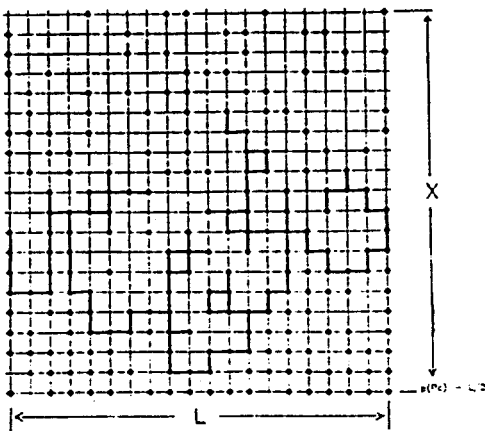


그림 15. Gradient percolation 모사 결과. B측으로 A가 확산되어 들어갈 때 B측의 상황이다. 검은 점은 A를 표시하며, 확산면이 붉은 선으로 표시되어 있다.

$$p(x, t) = p(x) = \text{erfc}(x/L_d) \quad (21)$$

이것은 Fickian 확산을 가정한 것이며, erfc는 에러 함수를 나타낸다. 여기서  $D_0$ 를 확산계수라 하면  $L_d = 2(D_0 t)^{1/2}$ 이고 이것은 '시간  $t$ 에서의 Einstein 확산 거리'라 불린다. 여기서 B측에 격자를 상징한다. 각 격자점은 A이거나 B가 되는데 gradient percolation 기법에서는 앞 장에서 다룬 랜덤 percolation과는 달리 주어진  $x$ 위치에서 A를 확률  $p(x)$ 에 따라 위치시킨다. 한 예가 그림 15에 보여져 있다. 확산면은 A측과 연결되며 B측으로 가장 멀리 가있는 격자점들을 이은 것으로 정의된다. 이런 방식을 통하여 1차원( $x$  방향)으로는 매끄러운 분포를 이루지만 이차원 또는 삼차원(삼차원 격자를 사용할 경우)에서는 프랙탈 성격을 갖는 불규칙한 구조를 보임을 알 수 있다. 경계가 뚜렷하지 않은 계면의 프랙탈 성격은 고분자-고분자, 그리고 고분자-금속의 계면들의 물리적 성질을 조절하는데 중요한 역할을 한다.

#### 5.5 시간 프랙탈

Scaling 개념을 시간 영역에서 적용하는 시간 프랙탈(time fractal)은 전달 현상이나 광전기현상,<sup>39</sup> 그리고 무질서한 시스템의 동력학 연구<sup>40</sup> 등에 적용된다. 확산적인(diffusive) Gaussian 전달 현상에서 확산 계수  $D(t)$ 는 시간에 관계없이 일정하며 이에 반하여 거시적으로 열의 전달에서부터 미시적으로 Brown 운동에 이르기까지 해당된다. 반면에 분산적인(dispersive) 전달 현상에서는 운동이 시간에 따라 느려지며 확산계수는

$$D(t) \sim t^{\gamma-1}, \quad \gamma < 1 \quad (22)$$

의 관계에 따른다. 이에 반하여 광전기현상이 있다.<sup>39</sup> 광전기현상은 빛에 의해서 전하 운반체가 생성되는 현상이다. 즉 전하가 기질 재료에 의해서 정해지는 포텐셜을 넘어가야 한다. 무정형 광전도성 고분자의 경우, 격자 개념에서 보면 불규칙한 격자 간극을 형성하고 있다. 즉 기하학적인 불규칙성을 이루고 있다. 이것은 다차원의 랜덤 포텐셜을 결과하게 된다. 즉 에너지 불규칙성을 이루는데 여기서 그림 16

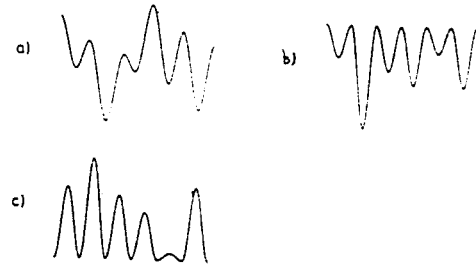


그림 16. 무정형 재료에서의 포텐셜 모델. (a) 랜덤 포텐셜, (b) 랜덤 골짜기 및 (c) 랜덤 장벽 모델.

에서와 같은 포텐셜 모델을 생각해 볼 수 있다. 이때 전기가 발생하기 위해서는 전하가 순차적으로 포텐셜 장벽을 뛰어 넘어야 하는데 에너지 불규칙성은 다시 jump 간의 대기 시간인 stepping 시간들 사이에 큰 편차를 도입해 준다. 이는 곧 시간적인 불규칙성이다. 대기 시간의 분포를  $\psi(t)$ 라고 하면 이것은 대개 다음과 같은 scaling 법칙에 의해 묘사된다.<sup>45,46</sup>

$$\psi(t) \sim t^{-1-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (23)$$

이 때 다음과 같은 함수

$$\psi(t) = \frac{1-a}{a} \sum_{n=1}^{\infty} a^n b^a \exp(-b^n t) \quad (24)$$

를 고려하자. 이 함수는  $b$ 가 그다지 작지 않을 때, 즉  $\psi_0(t)$ 의 감쇠가 지수 감쇠보다 느릴 때, 충분히 큰  $t$ 에 대해

$$\psi_0(t) \approx a b \psi_0(bt) \quad (25)$$

의 관계를 이룸을 보일 수 있다. 식 (25)는 일종의 scaling 거동을 묘사하고 있다. 따라서  $\psi(t)$ 를  $t$ 가 클 경우의  $\psi_0(t)$ 라고 놓을 수 있다. 환언하면  $\psi_0(t)$ 는 점근적으로  $\psi(t)$ 로 거동한다. 그러면 식 (25)와 (23)을 비교하면  $\gamma = \ln a / \ln b$ 로 주어짐을 알 수 있다. 식 (24)는 수 개의 동력학적 량들의 거동을 조사하는 것이 가능하게 해준다.

몇 가지 혼합(용매) 시스템의 거동도 프랙탈적인 성격을 보이는데, 이에 *viscous fingering*과 *invasion percolation* 등이 있다. *Viscous fingering*은 점도가 높은 물질에 점도가 낮은 물질이 침투해 들어가서 독특한 무늬를 형성하는 것이다. 최근 PVC와 공기의 경우가 보고되었다.<sup>41</sup> 그리고 *invasion percolation*은 하천의 생성에서처럼 가장 약한 부분으로 link가 형성되면서 성장이 이루어지는 경우를 지칭한다.<sup>42</sup>

## 6. 결 언

고분자과학의 분야에서 프랙탈은 특히 scaling 법칙과 깊은 관계를 맺고 있다. Scaling 법칙은 시스템의 크기의 변화에 따라서 주목하는 성질이 어떻게 변하는지 하는 scaling 거동의 고찰 및 관찰을 통해서 탐구하고자 하는 시스템을 이해할 수 있게 해준다. 그러나 이와 더불어 프랙탈의 도형적인 측면의 유용성 또한 무시할 수 없다. 프랙탈 개념은 고분자 사슬의 묘사에서부터 계면/표면의 연구에 이르기까지 폭넓은 응용 가능성을 지니고 있다. 프랙탈 이론을 제창한 Mandelbrot는 실상 프랙탈이란 용어의 정확한 정의를 내리지 않기를 원하는 편이었다고 한다. 이는 프랙탈이라는 개념이 그 의미의 확대가 가능하기 때문이며 또

상상력이 질식되는 것을 방지하기 위함이었을 것이다. 그런 측면에서 프랙탈의 구성 방식과 차원의 문제를 비교적 자세히 다루고 제한 되나마 고분자에의 응용을 다룬 본고가 적합한 프랙탈의 소개가 되었기를 바라고 또 프랙탈 개념을 많은 고분자 연구에 적용해 보는 계기가 되기를 바란다.

## 참 고 문 헌

1. M. F. Barnsley, "Fractals Everywhere", Academic Press, 1988.
2. M. Mitchell, *New Scientist*, **13 Feb. 1993**, 10 (1993).
3. P. W. Stephens and A. I. Goldman, *Scientific American*, **April 1991**, 24 (1991).
4. D. Amabilino and F. Stoddart, *New Scientist*, **19 Feb. 1994**, 25 (1994).
5. T. Dandekar, *Nature*, **351**, 21 (1991).
6. J. Maddox, *Nature*, **349**, 363 (1991).
7. B. B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature", W. H. Freeman and Co., New York, 1983.
8. H.-O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe, "Chaos and Fractals : New Frontiers of Science", Springer-Verlag, New York, 1991.
9. B. B. Mandelbrot, "Fractals, Forms, Chance, and Dimension", W. H. Freeman, San Francisco, 1977.
10. J. D. Farmer, E. Otto, and J. A. Yorke, *Physica*, **7D**, 153 (1983).
11. J. Briggs and F. D. Peat, "Turbulent Mirror", Harper & Row, New York, 1989.
12. P. G. de Gennes, "Scaling Concepts in Polymer Physics", Cornell Univ. Press, Ithaca, NY, 1979.
13. W. Hsu and S. Wu, *Polym. Eng. Sci.*, **33(5)**, 293 (1993).
14. D. Chandler, "Introduction to Modern Statistical Mechanics", Oxford Univ. Press, New York, 1987.
15. D. Farin and D. Avnir, *Angew. Chem. Int. Ed. Engl.*, **30(10)**, 1379 (1991).
16. C. M. Tam, T. Matsuura, and A. Y. Tremblay, *J. Colloid Interf. Sci.*, **147(1)**, 206 (1991).
17. P. J. Flory, *J. Chem. Phys.*, **17**, 303 (1949).
18. M. Doi and S. F. Edwards, "The Theory of Polymer Dynamics", Clarendon Press, Oxford, 1986.
19. H. Scher and M. F. Shlesinger, *J. Chem. Phys.*, **84**, 5922 (1986).
20. G. H. Weiss, J. T. Bendler, and M. F. Shlesinger, *Macromolecules*, **21**, 521 (1988).
21. D. W. Schaefer, *Science(Washington)*, **243**, 1023 (1989).
22. D. Avnir, "The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry", Wiley, New York, 1989.
23. J. Klafter and A. Blumen, *J. Chem. Phys.*, **80**, 875 (1984).
24. F. Bai, C.-H. Chang, and S. W. Weber, *Macromolecules*, **19**, 2484 (1986).
25. D. J. Hemker and C. W. Frank, *Macromolecules*, **23**, 4404 (1990).
26. Z. Zhou and B. Chu, *J. Colloid Interf. Sci.*, **143(2)**, 356 (1991).
27. B. Chu, C. Wu, D. Wu, and J. C. Phillips, *Macromolecules*, **20**, 2642 (1987).
28. S. M. Aharoni, N. S. Murthy, K. Zero, and S. F. Edwards, *Macromolecules*, **23**, 2533 (1990).
29. M. J. Muthukumar, *J. Chem. Phys.*, **83**, 3161 (1985).
30. M. Muthukumar and H. H. Winter, *Macromolecules*, **19**, 1284 (1986).
31. J. Bauer, P. Lang, W. Burchard, and M. Bauer, *Macromolecules*,

- 24, 2634 (1991).
32. J. E. Martin and J. Odinek. *Macromolecules*, **23**, 3362 (1990).
33. T. Matsumoto, M. Kawai, and T. Masuda. *Macromolecules*, **25**, 5430 (1992).
34. M. Antonietti and C. Rosenauer. *Macromolecules*, **24**, 3434 (1991).
35. M. Kawaguchi and T. Arai. *Macromolecules*, **24**, 889 (1991).
36. J. F. Douglas. *Macromolecules*, **22**, 3707 (1989).
37. M. Blunt, W. Barford, and R. Ball. *Macromolecules*, **22**, 1458 (1989).
38. R. Wool and J. M. Long. *Macromolecules*, **26**, 5227 (1993).
39. J. Mort and D. M. Pai. "Photoconductivity and Related Phenomena". Elsevier. Amsterdam, 1976.
40. P.-Z. Wong. *Phys. Today*, **41**(12), 24 (1988).
41. J. M. Garcia-Ruiz. *Nature*, **356**, 133 (1992).
42. C. P. Stark. *Nature*, **352**, 423 (1991).
43. T. C. Lubensky and T. C. Isaacson. *Phys. Rev.*, **A20**, 2130 (1979).
44. F. Family. *J. Phys.*, **A13**, L325 (1980).
45. H. Scher and M. Max. *Phys. Rev.*, **B7**, 4491, 4502 (1973).
46. H. Scher and E. W. Montroll. *Phys. Rev.*, **B12**, 2455 (1975).